تحليل كثيرة الحدود: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \dots \ + a_2x^2 + a_1x + a_0$

معلومة (1):

إذا كان $a_n + a_n + \cdots + a_n = 0$ (مجموع الأمثال يساوي الصفر) فإنّ كثيرة الحدود تقبل القسمة على $x - 1$ دون باق.

مثال: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

نلاحظ أنّ مجموع الأمثال يساوي الصفر (لأنّ: $1 - 6 + 11 - 6 = 0$)

إذاً $f(x)$ تقبل القسمة على $x - 1$ دون باق

الذي يعدم المقسوم عليه

1	1	−6	11	−6
		1	−5	6
	1	−5	6	0

أمثال المقسوم

أمثال ناتج القسمة ، ودرجته هي: درجة المقسوم - درجة المقسوم عليه

الباقي

إذاً: $f(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = (x-1)(x-2)(x-3)$

معلومة (2):

إذا كان مجموع أمثال الحدود ذات الأسس الزوجية يساوي مجموع أمثال الحدود ذات الأسس الفردية فإنّ كثيرة الحدود تقبل القسمة على $x + 1$ دون باق.

مثال: $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ (تذكر: $6 = 6x^0$)

نلاحظ أنّ أمثال الحدود ذات الأسس الزوجية هي: $(6\,,6)$ ومجموعها يساوي (12)

ونلاحظ أنّ أمثال الحدود ذات الأسس الفردية هي: $(1\,,11)$ ومجموعها يساوي (12)

فهما متساويين، إذاً $f(x)$ تقبل القسمة على $x + 1$ دون باق

ويكون:

-1	1	6	11	6
		-1	-5	-6
	1	5	6	0

إذاً: $f(x) = (x+1)(x^2+5x+6) = (x+1)(x+2)(x+3)$

ملاحظة (1): ويمكن أحياناً لتحليل كثير الحدود من الدرجة الثالثة $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$:

1 – نبحث عن حل تجريبي: نعوض في الأرقام $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ (إن أمكن)

تذكر: إذا كان مجموع الأمثال $= 0$ فإن الحل التجريبي لها هو (1)

وإذا تناوبت الإشارات كان الجذر عدد موجب

2 – نقسم المعادلة على $(x - x_0)$: حيث x_0 الجذر التجريبي ، فتتحول المعادلة إلى الشكل:

$$f(x) = (x - x_1)(ax^2 + bx + c)$$

ملاحظة (2): ويمكن أحياناً تحليل كثير الحدود من الدرجة الثالثة باستخدام التجميع في فئات

مثال: $f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 2$

بالتجريب نلاحظ أن العدد (2) هو جذر للمعادلة ، فنقسم المعادلة على $(x-2)$

باستخدام إحدى طرق القسمة (التركيبية أو المطولة) نجد:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x^2 + x - 1)$$

مثال: حلل كثير الحدود $f(x) = x^3 - 7x + 6$ ؟

نلاحظ أن مجموع الأمثال يساوي الصفر فالعدد (1) هو جذر للمعادلة ، فنقسم المعادلة على $(x-1)$

$$f(x) = x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6) = (x-1)(x-2)(x+3)$$

مثال:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = x^2(x+3) - 4(x+3)$$

$$= (x+3)(x^2 - 4) = (x+3)(x-2)(x+2)$$

تحليل ثلاثي الحدود من الشكل: $f(x) = ax^2 + bx + c$

الحالة العامة: يمكن تحليل ثلاثي الحدود إلى عاملين وذلك بتحليل العدد $(a.c)$ إلى عددين، بحيث يكون مجموعهما يساوي معامل الحد الأوسط (b).

طريقة المقص:

التحليل بطريقة المقص يحلل إلى عاملين ونستخدم سهمين متقاطعين على شكل مقص بحيث يحقق الشروط الآتية:

1) حاصل ضرب الحدين عند بدايتي السهمين = الحد الأول

2) حاصل ضرب الحدين عند نهايتي السهمين = الحد الثالث

3) حاصل ضرب الحدين عند بداية ونهاية السهم الأول + حاصل ضرب الحدين عند نهاية السهم الثاني يساوي الحد الأوسط.

مثال: $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$

1 – نضع المقص:

الحد الأول	الحد الأخير (محاولة أولى)	الحد الأخير (محاولة ثانية)
$3x$	$+2$	-2
x	$+1$	-1

-2

في المحاولة الأولى: الحد الأوسط $3x + 2x = 5x \neq$ (محاولة فاشلة)

في المحاولة الثانية: الحد الأوسط $-3x - 2x = 5x =$ (محاولة ناجحة)

ومنه نجد: $f(x) = 3x^2 - 5x + 2 = (3x - 2)(x - 1)$

تمارين إضافية للتدريب:

$f(x) = 6x^2 - 11x + 5$	$f(x) = 9x^2 + 13x + 4$
$f(x) = x^2 - 6x - 5$	$f(x) = x^2 - 7x + 12$

2) طريقة التجميع في فئات:

1) نحسب الجداء (ac) ونبحث عن عددين مجموعهما الحد الأوسط (b) وجداؤهما (ac)

2) بعد معرفة الجذرين نفرق الحد الأوسط بدلالتهما ونجمع في فئات ونخرج العامل المشترك فيتم التحليل

مثال: $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$

خوارزمية الحل:

1- نحسب الجداء: $a.c = 3 \times 2 = 6$

2 – نبحث عن عددين مجموعها $b = -5$ وجداؤهما $ac = 6$

3 – العددين هما: -3 , -2 ثم نفرق الحد الأوسط بدلالتهما

4 – نجمع في فئات ونخرج العامل المشترك فيتم التحليل المطلوب:

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2 = 3x^2 - 3x - 2x + 2 = 3x(x-1) - 2(x-1)$$

ومنه نجد: $f(x) = (x-1)(3x-2)$

حالة خاصة (1):

إذا كان $a + b + c = 0$ فإنّ: $ax^2 + bx + c = (x-1)(ax-c)$

مثال:

$$f(x) = 9x^2 - 17x + 8 = (x-1)(9x-8)$$

لأنّ: $a + b + c = 9 - 17 + 8 = 0$

حالة خاصة (2):

إذا كان $a + c = b$ فإنّ: $ax^2 + bx + c = (x+1)(ax+c)$

مثال:

$$f(x) = 103x^2 + 107x + 4 = (x+1)(103x+4)$$

لأنّ: $a + c = 103 + 4 = 107 = b$

مثال: حلل كثير الحدود $f(x) = x^2 - (\sqrt{3}+1)x + \sqrt{3}$؟

طريقة أولى: التحليل بالتجميع في فئات

$$x^2 - (\sqrt{3}+1)x + \sqrt{3} = x^2 - \sqrt{3}x - x + \sqrt{3}$$

$$= x(x-\sqrt{3}) - (x-\sqrt{3}) = (x-\sqrt{3})(x-1)$$

طريقة ثانية: التحليل المباشر

بما أن $a+b+c=0$ فالمعادلة تكتب: $ax^2+bx+c=(x-1)(ax-c)$

$$\Rightarrow x^2 - (\sqrt{3}+1)x + \sqrt{3} = (x-1)(x-\sqrt{3})$$

طريقة ثالثة: طريقة المميز أو المجموع والجداء (لمعرفة الجذور ومن ثم التحليل)

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = \sqrt{3}+1 \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = \sqrt{3} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 = \sqrt{3} \\ x_2 = 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = (x-1)(x-\sqrt{3})$$

حالة خاصة (3):

نقول عن ثلاثي الحدود أنه مربع كامل إذا كان:

الحد الأوسط = ضعفي جذر الحد الأول في جذر الحد الأخير

$$\boxed{ax^2 \pm bx + c = \left(\sqrt{a} \pm \sqrt{b}\right)^2 \Leftrightarrow b = 2\sqrt{a} \times \sqrt{b}}$$

مثال:

$$f(x) = 25x^2 + 10x + 1 = (5x+1)^2$$

لأنّ: $b = 10 = b = 2\sqrt{a} \times \sqrt{b} = 2\sqrt{25} \times \sqrt{1} = 10$ فهو مربع كامل

تمارين إضافية للتدريب:

$f(x) = 15x^2 - 10\sqrt{3}x + 5$	$f(x) = 9x^2 + 12x + 4$
$f(x) = cos^2x - 2cosx + 1$	$f(x) = \frac{9}{4}x^2 - 3\sqrt{3}x + 3$

دراسة اشارة كثيرات الحدود

1 – كثير الحدود من الدرجة الأولى: $f(x) = ax + b \quad ; a \neq 0$

نوجد جذره الوحيد $x = -\frac{b}{a}$ فيكون ما قبل الجذر مخالف لإشارة a وما قبله موافق لإشارة a:

x	$-\infty$		x		$+\infty$
$f(x)$		مخالف لإشارة a	0	موافق لإشارة a	

2 – كثير الحدود من الدرجة الثانية: $f(x) = ax^2 + bx + c \quad ; a \neq 0$

نوجد جذور المعادلة بطريقة ايجاد المميز Δ (أو بأي طريقة أخرى) فنميز الحالات التالية:

المميز Δ: $\Delta = b^2 - 4ac$	حلول المعادلة	إشارة $f(x)$	تحليل $f(x)$
$\Delta < 0$	$\emptyset$	x: $-\infty$ … $+\infty$ $f(x)$: موافق لإشارة a دائماً إشارته من إشارة a	غير ممكن
$\Delta = 0$	$x_1 = -\frac{b}{2a}$	x: $-\infty$ … x_1 … $+\infty$ $f(x)$: موافق لإشارة a … 0 … موافق لإشارة a ما قبل الجذر وما بعده موافق لإشارة a	$f(x) = a(x - x_1)^2$
$\Delta > 0$	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	x: $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$ $f(x)$: موافق لإشارة a … 0 … مخالف لإشارة a … 0 … موافق لإشارة a ما بين الجذرين مخالف لإشارة a وخارج الجذرين موافق	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

الرجاء عند نقل الموضوع عدم التحوير فيه وذكر المصدر وصاحب العمل

حالات خاصة ترد إلى دراسة كثير الحدود من الدرجة الأولى أو الثانية:

3 – **كثير الحدود من الدرجة الثالثة:** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad ; a \neq 0$

نحاول كتابة كثير الحدود من الدرجة الثالثة بالشكل: $f(x) = (x - x_1)(x^2 + bx + c)$

أي نحصل على جداء تابعين أحدهما من الدرجة الأولى والاخر من الدرجة الثانية.

ثم ندرس إشارة التابع من الدرجة الأولى والذي جذره x_1 ، وندرس إشارة التابع من الدرجة الثانية والذي جذراه x_2 وَ x_3 فتكون إشارة التابع من الدرجة الثالثة هي جداء إشارتي التابعين.

4 – **دراسة إشارة الدالة الكسرية بسطها ومقامها كثيرتي حدود:**

ندرس إشارة كثيرة حدود البسط ، وندرس إشارة كثيرة حدود المقام ، فتكون إشارة التابع الكسري هي: ناتج قسمة إشارة البسط على إشارة المقام.

ملاحظات:

1 – التابع التناظري من الدرجة الأولى (البسط والمقام من الشكل: $\frac{ax+b}{a'x+b'}$ الكسري $f(x) =$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		موافق لإشارة $(a.a')$	0	مخالف لإشارة $(a.a')$	0	موافق لإشارة $(a.a')$	

جذري البسط والمقام هما: $x_1 = -\frac{a'}{b'}$, $x_1 = -\frac{a}{b}$ فنأخذ اشارة الجداء $(a.a')$ بالشكل:

2 – دوماً اشارة مربع أي مقدار موجب هي موجبة وكذلك الجذر.

3 – إشارة $f(x) = \frac{(g(x))^2}{h(x)}$ أو إشارة $f(x) = \frac{\sqrt{g(x)}}{h(x)}$ تماثل إشارة $h(x)$.

مثال (1): أوجد حلول المتراجحة: $\frac{x^2-x-20}{x^2} \geq 0$

الحل: نوجد أولاً مجموعة تعريف الدالة: $D_f = R \setminus \{0\} : f(x) = \frac{x^2-x-20}{x^2}$

ندرس إشارة البسط: $x^2 - x - 20 = (x-5)(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -4 \end{cases}$ (حالة $\Delta > 0$)

ندرس إشارة المقام: $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ (حالة $\Delta = 0$)

ننظم جدول الإشارة ونقسم إشارة البسط على إشارة المقام:

x	$-\infty$		-4		0		5		$+\infty$
البسط		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
المقام		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
الكسر	$-\infty$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$+\infty$

من جدول الإشارة نلاحظ أن $\frac{x^2-x-20}{x^2} \geq 0$ عندما: $x \in]-\infty, -4] \cup [5, +\infty[$

مثال (2): أدرس إشارة: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 4$ معرفة على: $R =]-\infty, +\infty[$

الحل: نوجد جذور $f(x)$ (مجموع الأمثال يساوي الصفر فالعدد (1) جذر فنقسم $f(x)$ على $(x-1)$):

نجد: $f(x) = (x-1)(x^2 - 3x + 4)$

ندرس إشارة: $(x-1)$ الذي ينعدم عند $x = 0$ (حالة حل وحيد)

وندرس إشارة: $(x^2 - 3x - 4)$ ولا ينعدم (حالة $\Delta < 0$)

ننظم جدول الإشارة ونضرب إشارة العامل الأول (القوس) في العامل الثاني:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$x^2 - 3x - 4$		$+$		$+$	