

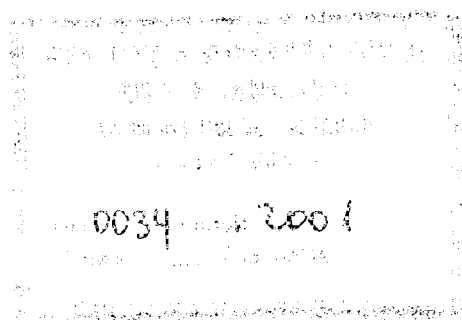
ÁLGEBRA y, TRIGONOMETRÍA CON APLICACIONES

L. MURPHY JOHNSON
ARNOLD R. STEFFENSEN

trillas 

ÁLGEBRA Y, TRIGONOMETRÍA CON APLICACIONES

L. MURPHY JOHNSON
ARNOLD R. STEFFENSEN



**EDITORIAL
TRILLAS** 

México, Argentina, España,
Colombia, Puerto Rico, Venezuela

Catalogación en la fuente

Johnson, L. Murphy
Álgebra y trigonometría con aplicaciones. --
México : Trillas, 1994.
714 p. : il. ; 23 cm.
Traducción de: *College Algebra and Trigonometry*
with applications
Incluye índices
ISBN 968-24-4734-8

1. Álgebra. 2. Trigonometría. I. Steffensen,
Arnold R. I. t.

LC- QA154.2'J6.3 D- 512.9'J836a

Título de esta obra en inglés:

College Algebra and Trigonometry with Applications

Versión autorizada en español de la

primera edición publicada en inglés por:

© Scott, Foresman and Company

La presentación y disposición en conjunto de

ALGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON APLICACIONES

son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra

puede ser reproducida o transmitida, mediante ningún sistema

o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,

la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento

de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados en lengua española

© 1994, Editorial Trillas, S. A. de C. V.,

Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,

C.P. 03340, México, D. F.

Tel. 6884233, FAX 6041364

División Comercial, Calz. de la Viga 1132, C.P. 09439

México, D. F., Tel. 6330995, FAX 6330870

Miembro de la Cámara Nacional de la

Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, febrero 1994

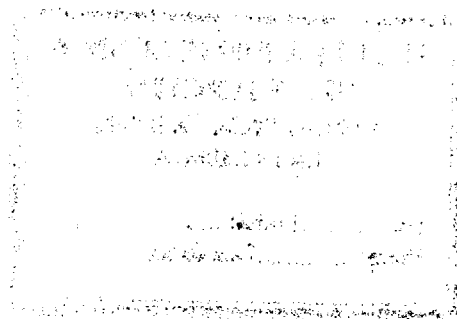
ISBN 968-24-4734-8

Impreso en México

Printed in Mexico

Traducción : **Jorge Mendoza Sierra**
Alejandro Rodríguez Doring
Lilia María Morteo Rojas

Revisión Técnica : **M. en C. Miguel Lara Aparicio**
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México



*Para
Barbara, Barbara,
Becky, Cindy y Pam*

Presentación

Esta obra se escribió para cubrir los temas habituales de álgebra y trigonometría que los alumnos requieren en cursos posteriores de matemáticas, ingeniería, comercio, estadística o ciencias naturales. Los estudiantes que han cursado dos años de álgebra a nivel de secundaria o su equivalente, deberían contar con las destrezas que son prerequisites de este curso.

La estructura del texto ofrece una flexibilidad máxima para la enseñanza. En el capítulo 1 se hace una revisión del álgebra básica, que puede cubrirse con rapidez en algunas clases, o bien, de considerarse apropiado, puede ser omitida. Los capítulos 2 a 5 presentan los temas de mayor relevancia en álgebra superior: ecuaciones y desigualdades; funciones y sus gráficas; teoría de polinomios, y funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas. Los capítulos 6 a 8 ofrecen un tratamiento completo de la trigonometría; las funciones trigonométricas se introducen a través de triángulos rectángulos, seguido por el enfoque del círculo unitario. Para obtener una mayor flexibilidad, los temas de geometría analítica se presentan por separado en el capítulo 9. El texto concluye con una variedad de otros temas algebraicos que incluyen sistemas de ecuaciones y de desigualdades, matrices, determinantes, sucesiones, series, y probabilidad. Las aplicaciones aportan motivación para la práctica a todo lo largo del libro.

CARACTERÍSTICAS

El texto está escrito de manera informal; las explicaciones están redactadas con cuidado para asegurar la comprensión del estudiante. El color se utiliza pedagógicamente para realzar los pasos importantes y destacar tanto los métodos como la terminología. Las figuras y gráficas están numeradas para una fácil referencia, y en ellas el color se emplea para esclarecer los conceptos presentados. La palabra *precaución* tiene el propósito de alertar a los estudiantes sobre errores comunes y problemas especiales, mientras que las *notas* ofrecen explicaciones adicionales u otra información pertinente.

Ejemplos

El texto contiene más de 650 ejemplos, cuidadosamente seleccionados, con soluciones detalladas paso por paso y útiles anotaciones adicionales.

Ejercicios

Hay más de 4 600 ejercicios en el texto, graduados cuidadosamente; inician con problemas sencillos de rutina, a los cuales les sigue una variedad de problemas más

complicados y numerosas aplicaciones. Al final de la mayoría de los conjuntos de ejercicios se incluye una serie de *ejercicios de repaso* a fin de ayudar a los estudiantes a revisar el material previamente cubierto o prepararlos para la siguiente sección. Cada capítulo concluye con una serie de ejercicios de repaso. Las respuestas de los ejercicios con numeración impar de cada sección y de todos los ejercicios de repaso y de repaso de capítulo se encuentran al final del libro.

Aplicaciones

Con el fin de mostrar la utilidad y el sentido práctico de las matemáticas se ha puesto atención particular a las aplicaciones. Más de 700 problemas relevantes de álgebra aplicada que abarcan áreas diversas tales como comercio, ingeniería, física, química, medicina, silvicultura y agricultura están incluidos en las introducciones, en los ejemplos y en los ejercicios de los capítulos.

Calculadoras

Las calculadoras se tratan en los lugares apropiados a lo largo del texto, y se incluyen ilustraciones tanto para la lógica algebraica como para la notación polaca inversa. Sin embargo, no hay una identificación específica para los ejercicios con calculadora, pues consideramos que los estudiantes deben aprender cuándo conviene utilizarla. Al final de la obra se agrega un apéndice sobre el uso de tablas logarítmicas y trigonométricas, para los profesores que prefieran que sus alumnos aprendan estas técnicas.

RECONOCIMIENTOS

Manifestamos nuestra sincera gratitud a quienes ayudaron a desarrollar este libro, con la revisión de todo o parte del manuscrito. Hemos puesto en práctica muchas de sus sugerencias, las cuales mejoran el texto significativamente.

Richard D. Armstrong, St. Louis Community College
 Edgar M. Chandler, Phoenix College
 Ben Cornelius, Oregon Institute of Technology
 Mary Coughlin, University of Toledo
 Michael B. Curry, Pima Community College
 John A. Dersch, Jr., Grand Rapids Junior College
 Karen R. Fawcett, University of Southern Mississippi
 Linda Holden, Indiana University
 Charles M. Lindsay, Coe College
 Carolyn F. Neptune, Johnson County Community College
 Charles V. Peele, Marshall University
 William Radulovich, Florida Community College
 James V. Stewart, Oregon Institute of Technology
 Eric Tellenbach, Citrus Community College

Expresamos un especial reconocimiento a Joseph Mutter por su revisión del manuscrito y sus numerosas sugerencias para mejorarlo; por haber escrito los



suplementos y verificado los problemas. Gracias a Diana Denlinger Vanlandingham y a Gail Dickerson por haber escrito a máquina el manuscrito y los suplementos.

A todos en Scott, Foresman and Company, con quienes nos sentimos en deuda. Gracias en especial a Jack Pritchard, Steve Quigley, Terry McGinnis, Sarah Joseph y Ellen Pettengell.

Por último, nos sentimos profundamente agradecidos con nuestras familias y en particular con nuestras esposas, Barbara y Barbara, quienes nos han dado su incesante apoyo, tiempo y estímulo a través de los años.

L. MURPHY JOHNSON

ARNOLD R. STEFFENSEN



Índice de contenido

Prefacio	5
Características, 5. Reconocimiento, 6.	
Al estudiante	11
Indicaciones generales, 11. Indicaciones específicas, 12.	
Un comentario sobre las calculadoras	13
Capítulo 1. Ecuaciones y desigualdades	15
1.1. El sistema de los números reales, 16. 1.2. Exponentes de enteros, 23. 1.3. Polinomios y factorización, 29. 1.4. Expresiones racionales, 37. 1.5. Radicales y exponentes racionales, 44. Ejercicios de repaso del capítulo 1, 49.	
Capítulo 2. Ecuaciones y desigualdades	52
2.1. Ecuaciones lineales y ecuaciones con valor absoluto, 53. 2.2. Aplicaciones de ecuaciones lineales, 62. 2.3. Ecuaciones cuadráticas, 70. 2.4. Ecuaciones que se transforman en ecuaciones cuadráticas, 79. 2.5. Aplicaciones de las ecuaciones cuadráticas, 84. 2.6. Números complejos, 93. 2.7. Desigualdades lineales y desigualdades con valor absoluto, 101. 2.8. Desigualdades cuadráticas y desigualdades racionales, 109. Ejercicios de repaso del capítulo 2, 117.	
Capítulo 3. Ecuaciones y desigualdades	120
3.1. El sistema de coordenadas cartesianas, 121. 3.2. Ecuaciones lineales, 126. 3.3. Funciones, 135. 3.4. Propiedades de las funciones y de las gráficas, 141. 3.5. Composición de funciones y funciones inversas, 152. 3.6. Funciones cuadráticas, 158. 3.7. Variación, 165. Ejercicios de repaso del capítulo 3, 171.	
Capítulo 4. Ecuaciones y desigualdades	175
4.1. Polinomios y división sintética, 176. 4.2. Teoremas sobre polinomios, 182. 4.3. Ecuaciones polinómicas, 190. 4.4. Graficación de funciones polinómicas, 198. 4.5. Graficación de funciones racionales, 205. Ejercicios de repaso del capítulo 4, 214.	
Capítulo 5. Ecuaciones y desigualdades	216
5.1. Logaritmos, 217. 5.2. Funciones exponenciales y logarítmicas, 221. 5.3. Propiedades de los logaritmos, 227. 5.4. Logaritmos comunes y logaritmos naturales, 233. 5.5. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas, 240. 5.6. Aplicaciones, 245. Ejercicios de repaso del capítulo 5, 254.	
Capítulo 6. Ecuaciones y desigualdades	257
6.1. Ángulos y medida angular, 258. 6.2. Longitud de arco y velocidad angular, 263. 6.3. Funciones trigonométricas de un ángulo agudo, 268. 6.4. Triángulos rectángulos y sus aplicaciones, 277. 6.5. Funciones	

trigonométricas de números reales, 286. 6.6. Gráficas de las funciones trigonométricas, 296. 6.7. Más sobre la graficación de las funciones trigonométricas, 305. 6.8. Identidades fundamentales, 312. Ejercicios de repaso del capítulo 6, 319.	
Cap. 7. Aplicaciones de la trigonometría	322
7.1. Funciones trigonométricas de ángulos arbitrarios, 323. 7.2. La ley de los senos, 331. 7.3. La ley de los cosenos, 337. 7.4. Área de un triángulo, 346. 7.5. Movimiento armónico simple, 354. 7.6. Vectores y sus aplicaciones, 361. Ejercicios de repaso del capítulo 7, 373.	
Cap. 8. Trigonometría analítica	375
8.1. Identidades trigonométricas, 376. 8.2. Identidades de suma y diferencia, 382. 8.3. Identidades de múltiplos de ángulos, 391. 8.4. Identidades para producto y suma, 399. 8.5. Ecuaciones trigonométricas, 407. 8.6. Funciones trigonométricas inversas, 415. Ejercicios de repaso del capítulo 8, 426.	
Cap. 9. Temas de geometría analítica	428
9.1. El círculo, 429. 9.2. La elipse, 434. 9.3. La hipérbola, 442. 9.4. La parábola, 449. 9.5. Rotación de ejes, 456. 9.6. Coordenadas polares y gráficas, 465. 9.7. Forma polar de los números complejos y teorema de Demoivre, 472. Ejercicios de repaso del capítulo 9, 481.	
Cap. 10. Sistemas de ecuaciones y de desigualdades	483
10.1. Sistemas lineales con dos variables, 484. 10.2. Sistemas lineales con más de dos variables, 494. 10.3. Sistemas lineales de desigualdades, 503. 10.4. Programación lineal, 510. 10.5. Sistemas no lineales, 516. 10.6. Fracciones parciales, 524. Ejercicios de repaso del capítulo 10, 529.	
Cap. 11. Matrices y determinantes	532
11.1. Matrices, 533. 11.2. Multiplicación de matrices, 541. 11.3. Resolución de sistemas de ecuaciones por medio de matrices, 548. 11.4. La inversa de una matriz cuadrada, 556. 11.5. Determinantes y La regla de Cramer, 566. 11.6. Propiedades de los determinantes, 578. Ejercicios de repaso del capítulo 11, 585.	
Cap. 12. Sucesiones, series y probabilidad	588
12.1. Sucesiones y series, 589. 12.2. Sucesiones aritméticas, 595. 12.3. Sucesiones geométricas, 601. 12.4. Inducción matemática, 610. 12.5. Permutaciones y combinaciones, 616. 12.6. El teorema del binomio, 626. 12.7. Probabilidad, 631. Ejercicios de repaso del capítulo 12, 638.	
Apéndice A. Tablas logarítmicas e interpolación	641
Apéndice B. Tablas de funciones trigonométricas e interpolación	645
Respuestas de ejercicios selectos	652
Índice de aplicaciones	699
Índice analítico	701
Compendio de fórmulas	709

Al estudiante

Durante varios años los autores han impartido la cátedra de álgebra superior y trigonometría a más de 1 500 estudiantes con diferentes orientaciones profesionales; algunos estaban cursando matemáticas para cumplir con requisitos de graduación, mientras que otros se estaban preparando para cursos más avanzados de matemáticas, ciencias, comercio o ingeniería. Sin considerar las metas académicas del lector, este texto se ha escrito pensando en el estudiante en general. El material se introduce en forma gradual: de destrezas básicas a más avanzadas. A lo largo de todo el texto se ha tratado de demostrar la relevancia y utilidad de las matemáticas con la inclusión de aplicaciones prácticas cotidianas. Al iniciar este curso, recuérdense estas indicaciones que son necesarias y útiles.

INDICACIONES GENERALES

1. Conocer a fondo el álgebra requiere motivación y dedicación. Así como un atleta no mejora sin el compromiso de conseguir una meta, un estudiante de álgebra debe estar preparado para trabajar duro y dedicar tiempo al estudio.
2. Ni el álgebra, ni la trigonometría se aprenden con sólo ver, oír o leer; *se aprenden practicando*. Use su lápiz y practique cuando sus pensamientos estén organizados y pueda escribirlos en forma clara y ordenada, habrá dado un gran paso hacia el éxito. Se debe ser conciso y escribir todos los detalles. Las siguientes son muestras del trabajo de dos estudiantes al afrontar un problema aplicado. ¿Cuál de los dos puede considerarse que tuvo más éxito en el curso?

Estudiante A	Estudiante F
Sea n = número de unidades producidas durante el mes.	$10 (\cancel{10,000})^2 - 100(10,000) - 2000$ =
C = costo total por mes	n = unidades
$C = 10n^2 - 100n - 2000$	$n = 10n^2 - 100n - 2000$
$10,000 = 10n^2 - 100n - 2000$	$0 = 10n^2 - 101n - 2000$
$0 = 10n^2 - 100n - 12,000$	
$0 = n^2 - 10n - 1200$	
$0 = (n-40)(n+30)$	
$n-40 = 0$ o $n+30 = 0$	
$n = 40$ o $n = -30$	
Así, 40 unidades fueron producidas.	

3. Una calculadora siempre es útil en cualquier curso de álgebra. Conviene familiarizarse con la calculadora consultando el manual correspondiente. Utilice la calculadora como un dispositivo para ahorrar tiempo al trabajar con fracciones decimales o funciones complicadas, pero tenga cuidado de no depender de ella para cálculos simples que pueden hacerse mentalmente. Aprenda cuándo usar la calculadora. Para mayor información acerca de cómo pueden utilizarse las calculadoras lea en esta obra "Un comentario sobre las calculadoras".

INDICACIONES ESPECÍFICAS

1. Al empezar a estudiar cada sección, inspeccione superficialmente el material para tener una idea preliminar de su contenido.
2. Regrese al inicio de la sección y estudie con cuidado el texto y los ejemplos. Los comentarios adicionales en color le ayudarán cuando algo no esté claro.
3. Periódicamente se encontrará una **precaución** o una **nota**. Las precauciones advierten sobre errores comunes y problemas especiales que han de evitarse. Las notas proporcionan información pertinente o explicaciones adicionales.
4. Después de haber completado el material de la sección, verifique su dominio de las destrezas adquiridas y aplique lo aprendido en la resolución de los ejercicios asignados por el instructor. Las respuestas de los problemas con numeración impar se encuentran al final del texto.
5. Los ejercicios marcados **para repaso**, localizados al final de la mayoría de conjuntos de ejercicios, ayudan a tener presente el material previamente cubierto, y con frecuencia preparan la introducción del contenido de la siguiente sección.
6. Después de haber concluido cada capítulo, revise cada sección y resuelva los **ejercicios de repaso** del capítulo. Las respuestas a todos estos ejercicios se encuentran al final del texto.

Si el estudiante sigue estas sugerencias, y trabaja conjuntamente con el profesor, aumentará en gran medida sus oportunidades de éxito en este curso.

Un comentario sobre las calculadoras

Para este curso se ha supuesto que la mayoría de los estudiantes tienen una calculadora manual. Aunque no es indispensable en absoluto, el uso de la calculadora facilita considerablemente el trabajo. La diferencia principal entre los tipos de calculadoras es la manera en la que realizan varias operaciones. Quizá el más deseable a este nivel, puesto que el orden en que se efectúan las operaciones es el mismo que en álgebra, es el tipo que usa la lógica algebraica (ALG). Sin embargo, muchos matemáticos y profesionales prefieren, como sistema alternativo, la notación polaca inversa (RPN). Con cada sistema, con sus ventajas y desventajas, se podrán efectuar los cálculos necesarios en este curso. A lo largo de todo el texto se ofrecen ilustraciones para ambos sistemas, utilizando ALG para lógica algebraica y RPN para notación polaca inversa. Como ejemplo, mostramos la secuencia de pasos utilizados en cada sistema para calcular

$$\frac{(2)(4.5) - (1.3)^2}{5\sqrt{3}}$$

Pantalla de la calculadora

ALG: 2 \times 4.5 $-$ 1.3 x^2 $=$ \div 5 \div 3 $\sqrt{}$ $=$ \rightarrow 0.8440861

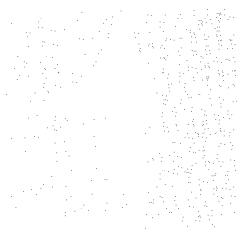
RPN: 2 ENTER 4.5 \times 1.3 x^2 $-$ 5 \div 3 $\sqrt{}$ \div \rightarrow 0.8440861

Obsérvese que las calculadoras RPN utilizan una tecla ENTER en lugar de la tecla $=$, que se emplea en las calculadoras ALG; ésta es una diferencia esencial entre los dos sistemas de operación; otras variaciones en los tipos de teclas son estrictamente de notación. Por ejemplo, para cambiar el signo de número (para introducir números negativos), algunas calculadoras tienen una tecla $+/-$, mientras que otras tienen una tecla CHS . Asimismo, una calculadora utiliza la tecla STO para introducir un número en la memoria, mientras que otra tiene una tecla M . En el momento preciso, se señalarán algunas de las diferencias que surgen al considerar varias maneras de hacer un cálculo. Sin embargo, ya que es imposible mencionar todas estas diferencias, el mejor consejo es leer el manual del usuario de la calculadora respectiva.

Con las calculadoras es posible que ocurran ligeras variaciones en exactitud debido a diferencias en el redondeo de cifras. La mayoría de éstas aparecerán en el

séptimo u octavo lugar decimal y no deberá dárseles mucha importancia. En este libro los resultados se han redondeado hasta el paso final, guardando los valores calculados en la memoria. Aun con esta aclaración, pueden surgir pequeñas variaciones debido a diferencias en las calculadoras individuales. No hay por qué alarmarse si una calculadora da una respuesta algo diferente a la que se ha mostrado.

Por último, recuérdese que una calculadora es una herramienta para hacer cálculos complicados; no piensa y sólo reacciona a la información de entrada. Nadie debe volverse tan dependiente de su calculadora que deba utilizarla para realizar cálculos simples que pueden hacerse mentalmente. Cada uno debe aprender en qué momento debe o no debe usar una calculadora y cuándo los resultados son razonables y apropiados.



Revisión de conceptos fundamentales

Un conocimiento del álgebra no sólo ofrece fundamentos para el estudio de matemáticas más avanzadas, sino que también proporciona las herramientas para resolver muchos problemas aplicados en la administración de empresas, las ciencias y la ingeniería. Considérense las siguientes aplicaciones.

Administración

El administrador de una oficina que lleva la nómina de pago necesita una fórmula para calcular el nuevo salario de los empleados que han recibido un aumento del 8%.

Sea x = salario anterior del empleado,
 $0.08x$ = aumento salarial del empleado.

El nuevo salario se encuentra al sumar el aumento al salario anterior:

$$\text{nuevo salario} = x + 0.08x = 1.08x$$

Por ejemplo, si el salario anterior x de un empleado era de 32 000 dólares por año, el nuevo salario $1.08x$ sería

$$(1.08)(32\,000) = 34\,560 \text{ dólares.}$$

Ingeniería

La altura en pies (ft) de un cohete, t segundos después del encendido, está dada por la expresión $-16t^2 + 180t$. Encontrar la altura a los cuatro segundos de vuelo.

$$\begin{aligned}\text{altura} &= -16t^2 + 180t \\ \text{altura a los 4 segundos} &= -16(4)^2 + 180(4) \\ &= -256 + 720 \\ &= 464 \text{ ft}\end{aligned}$$

En este capítulo se ofrece un repaso de los sistemas numéricos y sus propiedades básicas, los cuales sirven como fundamento para la exposición del álgebra.

1.1. EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

Puesto que los conjuntos de números son esenciales para el estudio del álgebra, iniciaremos con un breve repaso de ellos. Recuérdese que un **conjunto** es una colección de objetos llamados **elementos**. Los elementos de un conjunto se colocan dentro de llaves: $\{ \}$. A continuación se muestran los principales conjuntos básicos de números.

$$N = \{1, 2, 3, \dots\} \quad \text{Números naturales (o de conteo)}$$

$$W = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad \text{Números enteros no negativos}$$

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \quad \text{Enteros}$$

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \text{ tales que } a \text{ y } b \text{ son enteros, con } b \neq 0 \right\} \quad \text{Números racionales}$$

$$P = \{x \text{ tales que } x \text{ no es racional}\} \quad \text{Números irracionales}$$

$$R = \{x \text{ tales que } x \text{ es racional o irracional}\} \quad \text{Números reales}$$

Además de estos conjuntos de números, a menudo se hace referencia al conjunto de *enteros negativos*, $\{\dots, -3, -2, -1\}$, y al conjunto de *enteros positivos*, $\{1, 2, 3, \dots\}$. Obsérvese que los puntos suspensivos indican que el modelo continúa.

El conjunto de **números racionales** incluye al conjunto de enteros junto con todos los cocientes de enteros. Cada número racional puede escribirse con una fracción o un decimal. Por ejemplo, $\frac{3}{8}$ puede escribirse como 0.375 (dividiendo 3 entre 8) y $\frac{3}{11}$ como 0.2727... (dividiendo 3 entre 11). Al decimal 0.375 se le llama **decimal finito** porque la sucesión de dígitos es finita, mientras que 0.2727... es un **decimal periódico** porque el bloque de dígitos 27 se repite indefinidamente. Por lo general, los decimales periódicos se escriben con una barra sobre el bloque de dígitos que se repite. Por ejemplo,

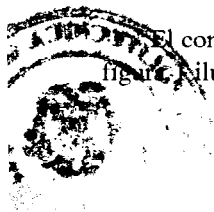
$$\frac{3}{11} = 0.\overline{27} \quad \text{y} \quad \frac{1}{3} = 0.\overline{3}.$$

Todo número racional tiene una forma decimal que es finita o periódica. A veces se utiliza esta propiedad para definir al conjunto de los números racionales.

A los números que no son racionales, es decir, que no pueden escribirse como un cociente de enteros, se les llama **números irracionales**. Un número irracional no puede escribirse como un decimal finito ni periódico. Uno de los números irracionales mejor conocidos es π , la razón de la circunferencia de un círculo con respecto a su diámetro. Los números tales como $\sqrt{2}$ y $\sqrt{26}$, raíces cuadradas de enteros positivos que no son cuadrados perfectos, son también irracionales.

El conjunto de los números reales

El conjunto de los **números reales** consta de los números racionales y de los números irracionales. La figura ilustra las relaciones entre los conjuntos de números que se han analizado.



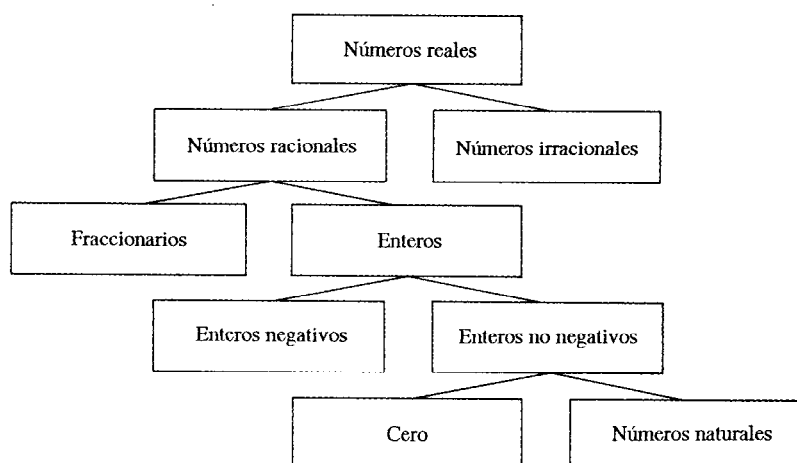


Figura 1. El sistema de los números reales.

Una forma excelente de exhibir los números y mostrar algunas de sus propiedades importantes es la **recta numérica**, como se presenta en la figura 2. Al **origen** se le designa cero y se marcan tramos de longitud unitaria en ambas direcciones. Los puntos que se encuentran a la derecha del cero se identifican con los números positivos, mientras que los puntos que se encuentran a la izquierda del cero corresponden a los números negativos.

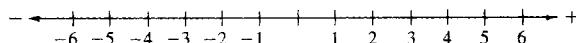


Figura 2. Recta numérica.

Cada número real puede identificarse exactamente con un punto en la recta numérica, y a cada punto en la recta numérica le corresponde exactamente un número real. La figura 3 muestra una recta numérica con puntos que corresponden a varios números reales marcados en ella.

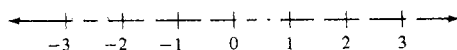


Figura 3. Puntos en una recta numérica.

Los números que son **iguales** entre sí ($a = b$) corresponden al mismo punto en la recta numérica. Si a está a la izquierda de b , se dice que a es menor que b y se escribe $a < b$. También se dice que b es mayor que a y se escribe $b > a$. Más formalmente, $a < b$ o $b > a$ si $b - a$ es un número positivo ($b - a > 0$).

Si a y b son números reales cualesquiera, la propiedad de **tricotomía** establece que exactamente una de las siguientes relaciones es válida.

$$a > b, \quad a = b, \quad \text{o} \quad a < b \quad \text{Propiedad de tricotomía}$$

La **propiedad transitiva** para desigualdades enuncia que

$$\text{si } a < b \quad \text{y} \quad b < c, \text{ entonces } a < c \quad \text{Propiedad transitiva}$$



Las propiedades tanto de tricotomía como transitiva son **axiomas**; es decir, propiedades que se aceptan sin verificación.

Los axiomas de igualdad que se utilizan para resolver ecuaciones y simplificar expresiones algebraicas se resumen en el siguiente recuadro.

- | | |
|-------------------------------------|---|
| ① Axiomas de igualdad | |
| ② Sean a, b y c números reales. | |
| ③ Propiedad reflexiva | $a = a$. |
| ④ Propiedad simétrica | Si $a = b$, entonces $b = a$. |
| ⑤ Propiedad transitiva | Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$. |
| ⑥ Propiedad de sustitución | Si $a = b$, entonces a y b pueden reemplazarse entre sí en cualquier enunciado sin afectar la veracidad del enunciado. |

EJEMPLO 1

Indicar la propiedad ilustrada.

- | | |
|--|-------------------------------|
| a) Si $x = 5$, entonces $5 = x$. | Propiedad simétrica |
| b) $-2 < -\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2} < 3$ implica que $-2 < 3$. | Propiedad transitiva para $<$ |
| c) Si $x = 7$ y $y + x = 6$, entonces $y + 7 = 6$. | Propiedad de sustitución |
| d) Si $y = 6$ y $6 = z$, entonces $y = z$. | Propiedad transitiva para $=$ |

Operaciones con números reales

Las operaciones básicas con los números reales son la **suma** y la **multiplicación**. Cuando estas operaciones se realizan con dos números reales siempre se obtiene un número real. Éste es el primero de los axiomas que involucran operaciones con números reales.

Axiomas de los números reales

Sean a, b y c números reales

Propiedades de cerradura

$a + b$ es un número real
 ab es un número real

Propiedades conmutativas

$a + b = b + a$
 $ab = ba$

Propiedades asociativas

$a + (b + c) = (a + b) + c$
 $a(bc) = (ab)c$

0 es la identidad aditiva

$a + 0 = a = 0 + a$

1 es la identidad multiplicativa

$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$

Negativos (inversos aditivos)

$a + (-a) = 0 = (-a) + a$

Recíprocos (inversos multiplicativos)

$a\left(\frac{1}{a}\right) = 1 = \left(\frac{1}{a}\right)a \quad (a \neq 0)$

Propiedad distributiva

$a(b + c) = ab + ac$

EJEMPLO 2

Indicar la propiedad ilustrada.

- a) $3(x + y) = 3x + 3y$ Propiedad distributiva
 b) $7 + (-7) = 0$ Existencia de negativos
 c) $5(xy) = (5x)y$ Propiedad asociativa de la multiplicación

Las operaciones de *resta* y *división* se definen en términos de suma y multiplicación, respectivamente. A la **resta** se le define mediante la suma de un negativo, mientras que a la **división** se le define mediante la multiplicación por un recíproco.

$$a - b = a + (-b) \quad \text{Resta}$$

$$a : b = \frac{a}{b} = a \left(\frac{1}{b} \right) \quad (b \neq 0) \quad \text{División}$$

A las propiedades que pueden demostrarse utilizando axiomas y definiciones se les denomina **teoremas**. A continuación se presenta la prueba del primero de los siguientes teoremas dejando algunas pruebas restantes como ejercicios.

Teoremas que involucran al cero

Si a es un número real

1. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
2. $a - 0 = a$ y $0 - a = -a$.
3. $0 \div a = \frac{0}{a} = 0$ ($a \neq 0$). $\left(\frac{a}{0} \text{ no está definido} \right)$

Prueba de 1

$$\begin{aligned}
 0 &= a + (-a) \\
 &= a \cdot 1 + (-a) \\
 &= a \cdot (0 + 1) + (-a) \\
 &= (a \cdot 0 + a \cdot 1) + (-a) \\
 &= (a \cdot 0 + a) + (-a) \\
 &= a \cdot 0 + (a + (-a)) \\
 &= a \cdot 0 + 0 \\
 &= a \cdot 0
 \end{aligned}$$

Por consiguiente, por la propiedad transitiva de la igualdad, $0 = a \cdot 0$. Por la **propiedad simétrica de la igualdad**, $a \cdot 0 = 0$. Ya que $0 \cdot a = a \cdot 0$ por la propiedad conmutativa de la **multiplicación**, por la **propiedad de sustitución de la igualdad**, $0 \cdot a = 0$.

Los siguientes teoremas, comprobables con facilidad mediante el empleo de los **axiomas de igualdad**, son importantes para resolver las ecuaciones del capítulo 2.

Teoremas de igualdad

Sean a , b y c números reales.

1. Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$.

Propiedad de la suma

2. Si $a = b$ entonces $ac = bc$.

Propiedad de la multiplicación

Las pruebas de varias de las siguientes propiedades de números negativos se obtienen a partir de los axiomas y las definiciones; pueden realizarse como ejercicios.

Teoremas que involucran negativos de números

Sean a y b números reales.

1. $-(-a) = a$

2. $(-a)b = -(ab) = a(-b)$

3. $(-a)(-b) = ab$

4. $(-1)a = -a$

5. $-(a + b) = -a - b$

6. $-(a - b) = -a + b$

7. $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} \quad (b \neq 0)$

8. $\frac{-a}{-b} = -\frac{-a}{b} = -\frac{a}{-b} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$

EJEMPLO 3

Utilizar los teoremas que involucran al cero y a los números negativos.

a) $3 - (-x + y) = 3 + x - y$

b) $0 - 8x = -8x$

c) $\frac{x - y}{y - x} = \frac{x - y}{-(x - y)} = -1$

d) $(4x + 3y) \cdot 0 = 0$

Valor absoluto

Al número de unidades que un número a dista de cero en la recta numérica se le llama el *valor absoluto* de a y se denota $|a|$. Véase la figura 4.

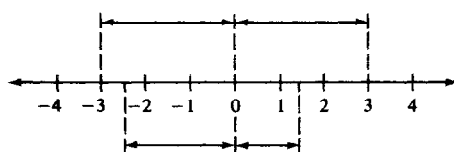


Figura 4. Identificación de valores absolutos.

Obsérvese que para cualquier número real a , $|-a| = |a|$ y que $|a| \geq 0$ (\geq se lee "mayor o igual que a "). Estas propiedades pueden demostrarse haciendo uso de la siguiente definición:

Sea a un número real. El **valor absoluto** de a se denota $|a|$ y

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{cuando } a \geq 0; \\ -a, & \text{cuando } a < 0. \end{cases}$$

EJEMPLO 4

Encontrar el valor absoluto.

a) $|-9| = -(-9) = 9$

b) $|0| = 0$

c) $|\sqrt{5}| = \sqrt{5}$

Puede usarse la noción del valor absoluto para definir la distancia entre dos números.

Sean a y b números reales cualesquiera. La distancia entre a y b se denota $d(a, b)$ y está dada por

$$d(a, b) = |a - b|.$$

EJEMPLO 5

Encontrar la distancia entre los números.

a) 6 y 13 $|6 - 13| = |-7| = -(-7) = 7$

b) 7 y -8 $|7 - (-8)| = |7 + 8| = |15| = 15$

1.1. Ejercicios

Responder cierto o falso en los ejercicios 1-24. Si la respuesta es falso, explicar por qué.

1. 3 es un número racional
2. $\frac{3}{2}$ es un número racional.
3. -5 es un número natural.
4. 0 es un número natural.
5. $\sqrt{5}$ es un número racional.
6. $0.\overline{281}$ es un número racional.
7. $0.\overline{65}$ es un número real.
8. $2\sqrt{3} - 1$ es un número real.
9. Cada entero es un número racional.
10. Cada número racional es un entero.
11. Algunos número irracionales son enteros.
12. Algunos números racionales son enteros.
13. El conjunto de los números enteros no negativos es cerrado con respecto a la suma.
14. El conjunto de los números enteros no negativos es cerrado con respecto a la multiplicación.
15. El conjunto de los números enteros no negativos es cerrado con respecto a la división.
16. El conjunto de los números enteros no negativos es cerrado con respecto a la resta.
17. Para cada número real a , $|a| \geq 0$.
18. Para cada número real a , $|a| > 0$.

65. $0 - a = -a$

67. Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$.

69. $-(-a) = a$

71. $-(a + b) = -a - b$

66. $0 \div a = 0$

68. Si $a = b$ entonces $ac = bc$.

70. $(-1)a = -a$

72. $-(a - b) = -a + b$

Para multiplicar por sí mismo un número o una expresión varias veces, puede utilizarse la **notación exponencial** a fin de evitar un gran número de factores. Por ejemplo,

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4.$$

Notación exponencial

Si a es un número real y n es un entero positivo,

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a,$$

donde a es la **base**, n es el **exponente**, y a^n es la **expresión exponencial**.

PRECAUCIÓN. Un exponente se aplica sólo al factor adyacente a él, a menos que se utilicen paréntesis. Por ejemplo,

$$2y^3 = 2 \cdot y \cdot y \cdot y \quad \text{y} \quad (2y)^3 = (2y)(2y)(2y) = 8y^3.$$

También $-x^2 \neq (-x)^2$. Así, $-4^2 = -16$ pero $(-4)^2 = 16$.

Propiedades de los exponentes

Al realizar operaciones que involucran expresiones exponenciales, el trabajo puede simplificarse al aplicar las propiedades básicas de los exponentes. Por ejemplo,

$$a^3 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a)(a \cdot a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^7.$$

Así, en general, si m y n son enteros positivos,

$$a^m \cdot a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a = a \cdot a \cdot \dots \cdot a = a^{m+n}.$$

Habiéndose demostrado así el teorema

Regla del producto.

De manera similar, puede mostrarse que si m y n son enteros positivos y $m - n$ es positivo,

Regla del cociente.

Cuando se eleva una potencia a otra potencia, los exponentes se multiplican. Por ejemplo,

$$(a^2)^3 = (a^2)(a^2)(a^2) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^6.$$

Así,

Regla de las potencias.

EJEMPLO 1

Simplificar aplicando las reglas de los exponentes.

a) $2x^6 \cdot x^3 = 2x^{6+3} = 2x^9$

b) $\frac{b^5}{b^2} = b^{5-2} = b^3$

c) $(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6$

También existen reglas para elevar productos o cocientes a una potencia. Por ejemplo,

$$(4x)^3 = (4x)(4x)(4x) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot x \cdot x \cdot x = 4^3 x^3$$

$$\text{y } \left(\frac{4}{x}\right)^3 = \left(\frac{4}{x}\right)\left(\frac{4}{x}\right)\left(\frac{4}{x}\right) = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{x \cdot x \cdot x} = \frac{4^3}{x^3}.$$

Así, siendo n un entero positivo,

EJEMPLO 2

Simplificar aplicando las reglas de los exponentes.

a) $(3x^4y^3)^4 = 3^4 \cdot (x^4)^4(y^3)^4 = 3^4 x^{16} y^{12}$

b) $\left(\frac{2w^2}{z^4}\right)^3 = \frac{(2w^2)^3}{(z^4)^3}$
 $= \frac{2^3(w^2)^3}{(z^4)^3}$
 $= \frac{8w^6}{z^{12}}$

Con la finalidad de extender la regla del cociente al caso donde $m \neq n$, considérese

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^0.$$

Ya que $a^m/a^m = 1$, esto sugiere la siguiente definición. Si a es un número real excepto cero,

Con el fin de llegar a una definición para exponentes negativos, considérese extender la regla del cociente a $n > m$. Por ejemplo, sea $m = 2$ y $n = 5$.

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$$

También
$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^2}{a^5} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^3}.$$

Esto sugiere que $a^{-3} = 1/a^3$. Así, si $a \neq 0$ y n es un entero positivo, entonces

EJEMPLO 3

Simplificar aplicando las reglas de los exponentes.

a) $8^0 = 1$

b) $(2x^2y^2)^0 = 1$ ($x \neq 0$ y $y \neq 0$)

c) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$

d) $\frac{1}{3^{-2}} = \frac{1}{\frac{1}{3^2}} = 3^2 = 9$

No se escriba 5^{-2} como -5^2 o $(-2)(5)$. Todos éstos son números diferentes.

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}, \quad -5^2 = -25, \quad (-2)(5) = -10$$

Es posible extender las reglas desarrolladas para exponentes enteros positivos a enteros negativos. Estas reglas se resumen ahora para todos los exponentes enteros.

Reglas de los exponentes

Sean a y b números reales cualesquiera, m y n enteros.

1. $a^m a^n = a^{m+n}$

2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

3. $(a^m)^n = a^{mn}$

4. $(ab)^n = a^n b^n$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ($b \neq 0$)

6. $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)

7. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ($a \neq 0$)

8. $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$ ($a \neq 0$)

EJEMPLO 4

Simplificar y escribir sin exponentes negativos.

a) $(3x)^{-1} = \frac{1}{(3x)^1} = \frac{1}{3x}$

b) $3x^{-1} = 3\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x}$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \left(\frac{x^2y^3}{xy^4}\right)^{-2} &= (x^{2-1}y^{3-4})^{-2} && \text{Potencia de una potencia: } (a^m)^n = a^{m \cdot n} \\
 &= (xy^{-1})^{-2} \\
 &= x^{-2}y^2 && (ab)^n = a^n b^n \\
 &= \frac{y^2}{x^2} && a^{-n} = \frac{1}{a^n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \frac{2^0}{a^{-2} + b^{-2}} &= \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} && a^0 = 1 \text{ para } a \neq 0 \\
 &= \frac{1}{\frac{b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2}{a^2b^2}} && \text{Común denominador} \\
 &= \frac{1}{\frac{b^2 + a^2}{a^2b^2}} = \frac{a^2b^2}{b^2 + a^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \left[\left(\frac{3x^6y^{-6}}{x^{-5}y^{-3}}\right)^3\right]^{-1} &= \left(\frac{3x^6y^{-6}}{x^{-5}y^{-3}}\right)^{-3} && (a^m)^n = a^{m \cdot n} \\
 &= (3x^{11}y^{-3})^{-3} && \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\
 &= 3^{-3}x^{-33}y^9 && (ab)^n = a^n b^n \\
 &= \frac{y^9}{27x^{33}} && a^{-n} = \frac{1}{a^n}
 \end{aligned}$$

Notación científica

Una aplicación importante de los exponentes enteros es la **notación científica**. Un número está escrito en notación científica cuando su expresión corresponde a la forma

$$a \times 10^n \quad \text{donde } 1 \leq a < 10 \text{ y } n \text{ es un entero.}$$

Por ejemplo, una célula vegetal podría contener 208 000 000 000 000 moléculas, cantidad que podría escribirse como 2.08×10^{14} . Asimismo, una estimación para el peso de un molécula de oxígeno es 0.000 000 000 000 000 000 000 053, lo que, en notación científica, es 5.3×10^{-23} .

Los números mayores que 10 tendrán exponentes enteros positivos en la notación científica, mientras que los números menores que 1 mostrarán una potencia entera negativa de 10. El exponente se determina mediante el conteo de posiciones decimales.

EJEMPLO 5

Escribir cada número en notación científica.

$$\text{a) } \underbrace{93\,000\,000}_{7 \text{ lugares}} = 9.3 \times 10^7$$

$$\text{b) } \underbrace{0.000\,000\,93}_{7 \text{ lugares}} = 9.3 \times 10^{-7}$$

$$\text{c) } \underbrace{10}_{1 \text{ lugar}} = 1 \times 10^1 = 1 \times 10$$

$$\text{d) } \underbrace{0.1}_{1 \text{ lugar}} = 1 \times 10^{-1}$$



Los cálculos en notación científica pueden hacerse utilizando las reglas de los exponentes. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\frac{(3.2 \times 10^{-8})(8.4 \times 10^4)}{2.1 \times 10^{16}} &= \frac{(3.2)(8.4)}{(2.1)} \times \frac{10^{-8}10^4}{10^{16}} \\ &= 12.8 \times 10^{-8+4-16} \\ &= 12.8 \times 10^{-20} \\ &= 1.28 \times 10^1 \times 10^{-20} \\ &= 1.28 \times 10^{-19}\end{aligned}$$

Los números muy grandes o muy pequeños deben escribirse en notación científica para introducirlos en una calculadora. La tecla **EE** o **EEX** permite incluir números en notación científica. El cálculo de arriba se llevaría a cabo como sigue:

ALG: 3.2 **EE** 8 **+/-** **×** 8.4 **EE** 4 **÷** 2.1 **EE** 16 **=** **1.28** **-19**

Pantalla de la calculadora

RPN: 3.2 **EEX** 8 **CHS** **ENTER** 8.4 **EEX** 4 **×** 2.1 **EEX** 16 **÷** **1.28** **-19**

La respuesta en notación científica es 1.28×10^{-19} .

EJEMPLO 6

Convertir a notación científica y usar una calculadora para efectuar las operaciones indicadas.

a) $\frac{(0.000\ 036)(69\ 000\ 000)}{0.000\ 000\ 012} = \frac{(3.6 \times 10^{-5})(6.9 \times 10^7)}{1.2 \times 10^{-8}}$

ALG: 3.6 **EE** 5 **+/-** **×** 6.9 **EE** 7 **÷** 1.2 **EE** 8 **+/-** **=** **2.07** **11**

Calculadora
calculadora

RPN: 3.6 **EEX** 5 **CHS** **ENTER** 6.9 **EEX** 7 **×** 1.2 **EEX** 8 **CHS** **÷** **2.07** **11**

Así, el resultado en notación científica es 2.07×10^{11} .

b) $\frac{(3.25 \times 10^9)^2}{(7.86 \times 10^{26})(5.82 \times 10^{-10})}$

ALG: 3.25 **EE** 9 **x²** **÷** 7.86 **EE** 26 **÷** 5.82 **EE** 10 **+/-** **=** **2.309** **01**

RPN: 3.25 **EEX** 9 **ENTER** **x²** 7.86 **EEX** 26 **÷** 5.82 **EEX** 10 **CHS** **÷** **2.309** **01**

De esta manera, la respuesta, redondeada a dos posiciones decimales, es 2.31×10^1 .

Cifras significativas

Obsérvese que la respuesta en el ejemplo 6 b) se ha redondeado al mismo número de lugares decimales que los números en el problema original. El redondeo es necesario cuando se emplean números de medida aproximada en un cálculo, puesto que sería impropio dar una respuesta con un grado de exactitud superior al de los valores utilizados para calcularla. Por lo general, la noción de *cifras significativas* se emplea para describir valores aproximados. Supóngase que un número x se ha escrito en notación científica como $a \times 10^n$



donde a se ha redondeado a k lugares decimales. En este caso, se dice que x es exacto hasta $k + 1$ cifras significativas. Por ejemplo, dado que $x = 12.3456$, se tiene lo siguiente:

Aproximación de x	12.346	12.35	12.3	12	10
Número de cifras significativas	5	4	3	2	1

1.2. Ejercicios

En los ejercicios 1-30 simplificar y escribir cada expresión sin exponentes negativos. Supóngase que las variables en los denominadores son diferentes de cero.

1. x^4x^3
2. $a^2a^{-3}a^4$
3. $6x^3x^{-2}$
4. $\frac{x^2x^{-5}}{x^3}$
5. $(b^{-3})^{-2}$
6. $(b^2)^{-3}$
7. $\frac{a^3}{b^2}$
8. a^4b^3
9. $(5^0)^3$
10. $(7^4)^0$
11. $(8x)^{-1}$
12. $8x^{-1}$
13. $\frac{2x^2}{x^{-2}}$
14. $\frac{9y^{-3}}{3y^3}$
15. $\left(\frac{6x^2}{y^{-4}}\right)^0$ ($x \neq 0, y \neq 0$)
16. $\left(\frac{8a^{-3}}{9b^{-2}}\right)^0$ ($a, b \neq 0$)
17. $\frac{1}{x^{-1} + y^{-1}}$
18. $\frac{1}{(x + y)^{-1}}$
19. $\left(\frac{2x^2}{y^{-3}}\right)^{-2}$
20. $\left(\frac{2x^2}{y^{-3}}\right)^2$
21. $\frac{3x^3y^{-5}}{12x^{-4}y^{-1}}$
22. $\frac{8a^{-5}b^8}{2a^7b^{-3}}$
23. $\left(\frac{6^0x^6y}{3x^{-2}y^{-1}}\right)^3$
24. $\left(\frac{8^0a^{-6}b^{-1}}{2a^4b^{-3}}\right)^4$
25. $\left(\frac{2x^{-2}y^{-3}}{x^4y^{-1}}\right)^{-2}$
26. $\left(\frac{3x^4y^{-2}}{x^{-4}y^3}\right)^{-3}$
27. $\left[\left(\frac{2a^{-2}b^{-3}}{a^{-4}b^2}\right)^{-2}\right]^{-1}$
28. $\left[\left(\frac{x^{-3}y^4}{2x^{-5}y^{-1}}\right)^{-2}\right]^3$
29. $\left(\frac{a^6b^2}{a^{-1}b}\right)^2\left(\frac{2a^{-1}b^3}{a^{-4}}\right)^{-2}$
30. $\left(\frac{x^4y^3}{x^{-1}y^2}\right)^{-1}\left(\frac{3x^{-4}y}{x^{-1}y^{-1}}\right)^{-2}$

En los ejercicios 31-34 escribir cada número en notación científica.

31. 456 000 000
32. 0.000 000 000 003 21
33. 0.01
34. 100

En los ejercicios 35-38 escribir cada número en notación decimal.

35. 2.35×10^8
36. 8.62×10^2
37. 4.17×10^{-8}
38. 3.2×10^{-1}

Usar una calculadora en los ejercicios 39-42 para efectuar las operaciones indicadas. Redondear a tres cifras significativas y dar las respuestas en notación científica.

39. $(0.000\ 273)(428\,000)$
40. $(0.000\ 000\ 018\ 2)(0.007\ 26)$
41. $\frac{(86\ 000)^2(0.000\ 000\ 392)}{(0.001\ 57)^2}$
42. $\frac{(0.000\ 005\ 62)^2(369\ 000)^2}{183\ 000\ 000\ 000}$

Resolver utilizando notación científica.

43. **Economía.** La deuda nacional de un país pequeño asciende a 6 250 000 000 dólares y la población es de 2 120 000. ¿Cuál es el monto de la deuda por persona?
44. **Administración.** Una compañía produjo 925 000 pequeños aparatos electrodomésticos en un año y obtuvo una utilidad de 8 620 000 dólares. ¿Cuál fue la utilidad por cada aparato?

45. **Astronomía.** La Tierra está aproximadamente a 92 900 000 millas del Sol. Si $mi = 1.61 \times 10^3$ m, ¿a qué distancia está el Sol de la Tierra en metros?
46. **Física.** Si la velocidad de la luz es 3.00×10^8 m/s, utilícese la respuesta del ejercicio 45 para estimar cuánto tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra.

Responder cierto o falso en los ejercicios 47-50. Si la respuesta es la indicada, explicar por qué.

47. Cada número natural es un entero no negativo.
48. El conjunto de los enteros es cerrado con respecto a la división.
49. Para todos los números reales x , $|x| = |-x|$.
50. Si $x > y$, entonces $|x - y| = x - y$.

Antes de iniciar el estudio de los polinomios, revisaremos varias definiciones importantes. Recuérdese que una **variable** es un símbolo o letra utilizado para representar a un elemento arbitrario de un conjunto que contiene a más de un elemento. A un símbolo utilizado para representar a un elemento específico se le denomina **constante**. Una **expresión algebraica** involucra sumas, diferencias, productos y cocientes de números y variables elevadas a varias potencias. Un **término** de una expresión algebraica involucra sólo al producto de un número, llamado **coeficiente numérico**, y a variables elevadas a varias potencias. Por ejemplo,

$$3x^2y - 2xy^2, \quad \sqrt{xy} + 2x + 5y, \quad y \quad \frac{x+y}{x-y} - \frac{2xy}{3x-y}$$

son tres expresiones algebraicas.

La expresión $3x^2y - 2xy^2$ es también un polinomio. Un **polinomio** es una expresión algebraica con términos que son productos de números y variables elevadas a exponentes enteros no negativos. En la siguiente tabla se ofrecen ejemplos de polinomios, sus términos y sus coeficientes.

Polinomio	Términos	Coeficientes
$3x^4 - 2x^2 + x - 8$	$3x^4, -2x^2, x, -8$	3, -2, 1, -8
$4x^2y - 3xy^2 - xy$	$4x^2y, -3xy^2, -xy$	4, -3, -1
$\sqrt{2}x^4y^4 - \frac{3}{4}$	$\sqrt{2}x^4y^4, -\frac{3}{4}$	$\sqrt{2}, -\frac{3}{4}$
6	6	6

Las expresiones tales como $\sqrt{x} + 5$ y $\frac{3}{xy} + y^2$ no son polinomios puesto que las variables no están elevadas a potencias enteras no negativas. Por supuesto, la expresión 3^x tampoco es un polinomio ya que el exponente de 3 es una variable.

Un **monomio** es un polinomio con un término, mientras que un **binomio** tiene dos términos y un **trinomio** tiene tres términos. A un polinomio con más de tres términos se le llama simplemente polinomio. Además, a los polinomios se les clasifica por grados. Al **grado de un término** se le define como la suma de potencias de las variables incluidas en el término. El **grado del polinomio** es el mismo que el del término con el grado más alto. Un polinomio constante, tal como 5, tiene grado cero ya que puede escribirse como $5x^0$. Sin embargo, el polinomio cero, 0, no tiene grado. La siguiente tabla ilustra la noción de grado.

Polinomio	Tipo	Grado
$8x^4$	Monomio	4
$3x^4 - 6x^7 + 5x$	Trinomio	7
16	Monomio	0
$3x^3y^2 - 7xy^6$	Binomio	7
$8a^2b^2c^2 - 6a^5b - 7b^4c^4$	Trinomio	8

Suma y resta de polinomios

Al sumar o restar polinomios se realiza una combinación de *términos semejantes*. Dos términos son semejantes si contienen las mismas variables elevadas a las mismas potencias. Recuérdese que todos los signos dentro del paréntesis multiplicado por el signo menos se cambian al eliminar el paréntesis.

EJEMPLO 1 Suma y resta de polinomios

- a) Súmese $(x^4y - 5x^3y^2 - 3xy^3 + 7y) + (-5x^4y + 8x^2y^3 + 4xy^3 + 3y)$
- $$= x^4y - 5x^3y^2 - 3xy^3 + 7y - 5x^4y + 8x^2y^3 + 4xy^3 + 3y$$
- $$= (1 - 5)x^4y - 5x^3y^2 + 8x^2y^3 + (-3 + 4)xy^3 + (7 + 3)y$$
- $$= -4x^4y - 5x^3y^2 + 8x^2y^3 + xy^3 + 10y$$
- b) Réstese $-8y^3 + 6y^2 - 2y - 3$ de $-4y^3 - 6y^2 + 5y - 1$.
- $$(-4y^3 - 6y^2 + 5y - 1) - (-8y^3 + 6y^2 - 2y - 3)$$
- $$= -4y^3 - 6y^2 + 5y - 1 + 8y^3 - 6y^2 + 2y + 3$$
- $$= (-4 + 8)y^3 + (-6 - 6)y^2 + (5 + 2)y + (-1 + 3)$$
- $$= 4y^3 - 12y^2 + 7y + 2$$

Multiplicación de polinomios

En la sección 1.2 se empezó a estudiar la multiplicación de polinomios; en ella se multiplicaron monomios utilizando la regla del producto para exponentes. Al multiplicar un monomio por un polinomio con dos o más términos se aplica la propiedad distributiva. Al multiplicar dos polinomios, ninguno de los cuales es un monomio, se multiplica cada término de uno por cada término del otro y los términos semejantes se agrupan. Cuando se trata de multiplicar dos binomios puede usarse el método PEIU (P representa los Primeros Términos; E representa los términos Exteriores; I representa los términos interiores; U representa los Últimos Términos).*

EJEMPLO 2 Multiplicación de polinomios

Multiplicar.

$$(a) \quad -4a^3b^2(2a^2b^3 - 3a) = (-4a^3b^2)(2a^2b^3) - (-4a^3b^2)(3a)$$

$$= (-4)(2)(a^3a^2)(b^2b^3) - (-4)(3)(a^3a)b^2$$

$$= -8a^5b^5 + 12a^4b^2$$

* N. del R.T. En inglés, método FOIL ("hoja"): First, Outside, Inside, Last.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } (5a + 2b)(3a - 7b) &= (5a)(3a) + (5a)(-7b) + (2b)(3a) + (2b)(-7b) \\
 &= 15a^2 - 35ab + 6ab - 14b^2 \\
 &= 15a^2 - 29ab - 14b^2
 \end{aligned}$$

Cuando se multiplican polinomios con tres o más términos, a menudo es conveniente escribir uno arriba del otro y ordenar los términos semejantes del producto en columnas verticales.

EJEMPLO 3

Multiplicar.

$$\begin{array}{r}
 3x^2 - 5xy + 2y^2 \\
 7x - 8y \\
 \hline
 21x^3 - 35x^2y + 14xy^2 \\
 \quad - 24x^2y + 40xy^2 - 16y^3 \\
 \hline
 21x^3 - 59x^2y + 54xy^2 - 16y^3
 \end{array}$$

$\begin{array}{l} \text{Se multiplican los términos de la columna} \\ \text{de la izquierda por los de la columna} \end{array}$

Varios productos especiales, útiles al multiplicar, son importantes para factorizar.

Fórmulas de productos

$$\begin{aligned}
 (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2 \\
 (a + b)(a + b) &= (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\
 (a - b)(a - b) &= (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 4

Multiplicar.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } (x + 5)(x - 5) &= x^2 - 5^2 && \text{Diferencia de cuadrados} \\
 &= x^2 - 25 \\
 \text{b) } (x + 5)(x + 5) &= (x + 5)^2 && \text{Cuadrado de un binomio} \\
 &= x^2 + 2(x)(5) + 5^2 && \text{Se multiplican los términos de la columna} \\
 &= x^2 + 10x + 25 && \text{de la izquierda por los de la columna} \\
 \text{c) } (3a^2 - 2b)(3a^2 + 2b) &= (3a^2)^2 - (2b)^2 && \text{Diferencia de cuadrados} \\
 &= 3^2(a^2)^2 - 2^2b^2 && \text{Se eleva al cuadrado cada término} \\
 &= 9a^4 - 4b^2 && \text{Se simplifica} \\
 \text{d) } (3a^2 - 2b)(3a^2 - 2b) &= (3a^2 - 2b)^2 && \text{Cuadrado de un binomio} \\
 &= (3a^2)^2 - 2(3a^2)(2b) + (2b)^2 && \text{Se multiplican los términos de la columna} \\
 &= 9a^4 - 12a^2b + 4b^2 && \text{de la izquierda por los de la columna}
 \end{aligned}$$

División de polinomios

Para dividir un polinomio entre un monomio, cada término del polinomio se divide entre el monomio.

EJEMPLO 5

Dividir

$$\text{a) } \frac{5x^3 + 10x^2 - 20x}{5x} = \frac{5x^3}{5x} + \frac{10x^2}{5x} - \frac{20x}{5x} = x^2 + 2x - 4$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{6a^4b^3 + 9a^2b^5 - 18ab^7 + 6a^2}{6a^2b^3} &= \frac{6a^4b^3}{6a^2b^3} + \frac{9a^2b^5}{6a^2b^3} - \frac{18ab^7}{6a^2b^3} + \frac{6a^2}{6a^2b^3} \\ &= a^2 + \frac{3b^2}{2} - \frac{3b^4}{a} + \frac{1}{b^3} \end{aligned}$$

Para dividir un polinomio entre un binomio; sigase el procedimiento utilizando en la división larga de números. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6

Dividir

$$\begin{array}{r} x + 7 \\ x - 3 \overline{) x^2 + 4x - 25} \\ \underline{x^2 - 3x} \\ 7x - 25 \\ \underline{7x - 21} \\ -4 \end{array}$$

Se divide el término x^2 entre x para obtener x .
 Se multiplica x por $x - 3$ para obtener $x^2 - 3x$.
 Se resta $x^2 - 3x$ de $x^2 + 4x - 25$ para obtener $7x - 25$.
 Se divide $7x$ entre x para obtener 7 .
 Se multiplica 7 por $x - 3$ para obtener $7x - 21$.
 Se resta $7x - 21$ de $7x - 25$ para obtener -4 .

La respuesta es $x + 7$ con un residuo de -4 o $x + 7 - \frac{4}{x - 3}$.

$$\begin{array}{r} y^2 - 4y + 3 \\ y^2 + 3 \overline{) y^4 - 4y^3 + 6y^2 + 8} \\ \underline{y^4 + 3y^2} \\ -4y^3 + 3y^2 \\ \underline{-4y^3 + 12y} \\ 3y^2 + 12y + 8 \\ \underline{3y^2 + 9} \\ 12y - 1 \end{array}$$

La respuesta es $y^2 - 4y + 3 + \frac{12y - 1}{y^2 + 3}$.

Factorización de polinomios

La factorización de un polinomio consiste en expresarlo como un producto; como tal, es el proceso inverso de la multiplicación. El primer tipo de problema de factorización a considerar es una aplicación directa de la propiedad distributiva.

Por ejemplo,

$$8x^3y - 12x^2y^2 = 4x^2y(2x - 3y).$$

Aquí, $4x^2y$ es el monomio común más grande que aparece en los términos de $8x^3y - 12x^2y^2$. Al factorizar, el polinomio se expresa como un producto de otros polinomios. El primer paso consiste en eliminar siempre el monomio común más grande de todos los términos.

A un polinomio se le llama **primo** cuando no contiene factores polinómicos diferentes de 1 o -1 . En esta obra, la factorización se restringe al uso de enteros. Por ejemplo, $x^2 - 7$ puede factorizarse como $(x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7})$, pero ya que $\sqrt{7}$ no es un entero, a $x^2 - 7$ se le considera primo.

Es posible aplicar también la propiedad distributiva para eliminar factores comunes que son binomios. Por ejemplo,

$$3a(2a + b) - 2b(2a + b) = (3a - 2b)(2a + b).$$

En realidad, este es el último paso de un proceso llamado **factorización por agrupamiento**, el cual consiste en agrupar término, factorizar cada grupo y luego, si es posible, eliminar del resultado los factores comunes que son binomios.

EJEMPLO 7

Factorizar los polinomios por agrupamiento de términos.

- (a) $3x^2y - 6xy^2 + 4x - 8y = 3xy(x - 2y) + 4(x - 2y)$
 $= (3xy + 4)(x - 2y)$
- (b) $7ab^3 - 14a^2b^2 - b + 2a = 7ab^2(b - 2a) - (b - 2a)$
 $= (7ab^2 - 1)(b - 2a)$

Expondremos la factorización de un trinomio de la forma $ax^2 + bxy + cy^2$, pero primero se recordará el método PEIU para multiplicación de binomios.

$$\begin{aligned} (5x - 3y)(2x + 7y) &= (5x) \cdot (2x) + (5x) \cdot (7y) + (-3y) \cdot (2x) + (-3y) \cdot (7y) \\ &= (5 \cdot 2)x^2 + (5 \cdot 7)xy + (-3)(2)xy + (-3) \cdot (7)y^2 \\ &= 10x^2 + 35xy - 6xy - 21y^2 \\ &= 10x^2 + 29xy - 21y^2 \end{aligned}$$

Los primeros dos términos de los binomios se multiplican para dar $10x^2$, los dos últimos términos se multiplican para dar $-21y^2$, y $29xy$ proviene de los productos $35xy$ e $-6xy$. Así, para factorizar $10x^2 + 29xy - 21y^2$ debe factorizarse $10x^2$, y $-21y^2$, y, al formar los términos medios, determinar qué productos se sumarán para dar $29xy$. Para factorizar $ax^2 + bxy + cy^2$ debe llenarse cada espacio en blanco de

$$ax^2 + bxy + cy^2 = \left(\frac{\quad}{\quad}x + \frac{\quad}{\quad}y\right)\left(\frac{\quad}{\quad}x + \frac{\quad}{\quad}y\right).$$

Deben elegirse los factores de modo que los términos $\frac{\quad}{\quad}x \cdot \frac{\quad}{\quad}y$ e $\frac{\quad}{\quad}y \cdot \frac{\quad}{\quad}x$ sumen bxy .

EJEMPLO 8

Factorizar los trinomios.

a) $2x^2 + 11xy + 12y^2$

$$2x^2 + 11xy + 12y^2 = (\underline{\quad}x + \underline{\quad}y)(\underline{\quad}x + \underline{\quad}y)$$

Puesto que todos los términos del trinomio son positivos, se usan sólo factores positivos. Los factores de c deben ensayarse en ambos órdenes con los factores de a .

Factores de a

1, 2

Factores de c

1, 12 o 2, 6 o 3, 4

$$2x^2 + 11xy + 12y^2$$

$$= (x + \underline{\quad}y)(2x + \underline{\quad}y)$$

$$\underline{\quad} (x + 12y)(2x + y)$$

$$\underline{\quad} (x + y)(2x + 12y)$$

$$\underline{\quad} (x + 3y)(2x + 4y)$$

$$\underline{\quad} (x + 4y)(2x + 3y)$$

$$\text{Así, } 2x^2 + 11xy + 12y^2 = (x + 4y)(2x + 3y).$$

b) $-12u^2 - 14uv + 40v^2$

Primero, se elimina el factor común y se asigna el coeficiente principal

$$-12u^2 - 14uv + 40v^2 = -2(6u^2 + 7uv - 20v^2)$$

Ahora, se factoriza $6u^2 + 7uv - 20v^2$ donde $a = 6$, $b = 7$ y $c = -20$. Ya que $c = -20$, es necesario considerar factores tanto positivos como negativos de c .

$$6u^2 + 7uv - 20v^2 \underline{\quad} (u + 20v)(6u - v)$$

$$\underline{\quad} (2u - 5v)(3u + 4v)$$

$$\underline{\quad} (2u + 5v)(3u - 4v)$$

$$\text{Así, } -12u^2 - 14uv + 40v^2 = -2(2u + 5v)(3u - 4v).$$

En la lista siguiente aparecen varias fórmulas que pueden utilizarse para factorizar. Las primeras tres fueron empleadas previamente para multiplicar. Las otras fórmulas pueden verificarse multiplicando el lado derecho para obtener el izquierdo.

Fórmulas de factorización

1. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Diferencia de cuadrados

2. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

Cuadrado perfecto

3. $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Cuadrado perfecto

4. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Suma de cubos

5. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Diferencia de cubos

EJEMPLO 9

Factorizar

$$\begin{aligned}\text{a) } u^2 - 25v^2 &= u^2 - 5^2v^2 \\ &= u^2 - (5v)^2 \\ &= (u + 5v)(u - 5v)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } 49x^4 - 70x^2y + 25y^2 &= 7^2(x^2)^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5x^2y + 5^2y^2 \\ &= (7x^2)^2 - 2(7x^2)(5y) + (5y)^2 \\ &= (7x^2 - 5y)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } u^3 + 125v^3 &= u^3 + 5^3v^3 \\ &= u^3 + (5v)^3 \\ &= (u + 5v)[u^2 - u(5v) + (5v)^2] \\ &= (u + 5v)(u^2 - 5uv + 25v^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d) } 16x^3 - 54y^6 &= 2(8x^3 - 27y^6) \\ &= 2[2^3x^3 - 3^3(y^2)^3] \\ &= 2[(2x)^3 - (3y^2)^3] \\ &= 2(2x - 3y^2)[(2x)^2 + (2x)(3y^2) + (3y^2)^2] \\ &= 2(2x - 3y^2)(4x^2 + 6xy^2 + 9y^4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{e) } 4x^2 - y^2 - 10x + 5y &= (4x^2 - y^2) - 5(2x - y) \\ &= (2x + y)(2x - y) - 5(2x - y) \\ &= [(2x + y) - 5](2x - y) \\ &= (2x + y - 5)(2x - y)\end{aligned}$$

1.3. Ejercicios

Indicar en los ejercicios 1-4 si cada polinomio es un monomio, binomio o trinomio y dar el grado de cada uno.

1. $x^3 - 6x$

2. $-3a^2b^3$

3. $a^3b^3 - 6a^2bc^4 + 8ab$

4. -2

Sumar los polinomios en los ejercicios 5-8.

5. $3x^2 + 2x - 5$ y $-2x^2 + 5$

6. $-8x^3 + 2x^2 - 1$ y $5x^3 + x - 5$

7. $6a^2b^2 - 3ab + 2$ y $4a^2b^2 + 8ab - 5$

8. $8a^3b^2 - 3ab + 9$ y $-4a^3b^2 + 4ab - 3$

Restar los polinomios en los ejercicios 9-12.

9. $2x^2 + 3x - 4$ de $6x^2 - 4x + 1$

10. $8x^3 + 4x - 5$ de $-9x^3 + x^2 + 9$

11. $-7a^2b^2 + 6ab - 3$ de $2a^2b^2 - 6ab - 3$

12. $4a^4b - 6ab^4 + 2$ de $2a^4b + ab^4 - 7$

Realizar las operaciones indicadas en los ejercicios 13-20.

13. $(a^2 + 3a - 4) + (a^3 - a^2 - a + 4)$

14. $(x^3 + 4x^4 - 2) + (x^4 - x^3 - x + 1)$

15. $(y^5 + 4y^2 - 2) - (2y^2 - y^5 + 6)$

16. $(3z^2 + 2z - 8) - (2z^3 - z^2 - z - 2)$

17. $(5a^4b^2 - 7a^2b^4 + 3) - (6a^4b^2 + 6a^2b^4 - 7)$

18. $(5x^2y^2z^2 - 6xyz) - (-2x^2y^2z^2 + xyz + 1)$

19. $(4a^2b^2 - 2ab + 3) + (2a^2b^2 + ab - 7) - (-a^2b^2 - ab - 6)$

20. $(-4a^3b^2 - 6a^2b^3 + a^2b^2) - (-8a^2b^3 + 3a^2b^2 - 5) - (7a^3b^2 + a^2b^3 + 8)$

Encontrar cada producto en los ejercicios 21-52. Debe suponerse que todos los exponentes son enteros positivos.

21. $(-6x^2y^3)(-3x^4y)$ 22. $(5a^2b)(-7a^3b^3)$ 23. $4ab^3(-3a^2b^2 + 5ab)$
 24. $-6x^2y(2xy - 8x^3)$ 25. $(a - b)(a + 2b)$ 26. $(a - b)(a - 2b)$
 27. $(5xy + 3)(2xy - 7)$ 28. $(2ab - c)(3ab + 2c)$ 29. $(x - 2y)(x + 2y)$
 30. $(7a + 2b)(7a - 2b)$ 31. $(x + 2y)^2$ 32. $(7a + 2b)^2$
 33. $(x - 2y)^2$ 34. $(7a - 2b)^2$ 35. $(3a^2 - b^2)(3a^2 + b^2)$
 36. $(3a^2 - b^2)(3a^2 - b^2)$ 37. $(6x - 7y + 2)(2x - 3y)$ 38. $(-5x + 8y - 4)(4x + 2y)$
 39. $(3a - 7b)(4a^2 - 2ab + 7b^2)$ 40. $(4a + 5b)(8a^2 + ab - 3b^2)$ 41. $(x + 2y - 5)^2$
 42. $(x - 2y + 5)^2$ 43. $[(x - 2y) + 5][(x - 2y) - 5]$ 44. $[x - (2y - 5)][x + (2y - 5)]$
 45. $x^{2n}y^n(x^n - y^n)$ 46. $x^{n+2}y^2(x^n + y^n)$ 47. $(x^n - y^n)(x^n + y^n)$
 48. $(a^{2n} + b^{2n})(a^{2n} - b^{2n})$ 49. $(x^{n+1} + y^{n+1})^2$ 50. $(x^n y^n - z^n)^2$
 51. $(x^2 - 3xy + 2y^2)(2x^2 + 4xy - 3y^2)$ 52. $(2a^2 - 5ab + 2b^2)(3a^2 - 6ab - b^2)$

Encontrar cada cociente en los ejercicios 53-62.

53. $(5y^5 - 30y^4 + 25y^3 - 5) \div 5y^2$ 54. $(-22x^4 + 11x^3 - 33x^2) \div (-11x)$
 55. $(15x^4y^3 - 5x^3y^4 + 10x^5y^5) \div (-5x^2y^3)$ 56. $(18a^5b^3 - 24a^2b^5 + 6ab) \div (-6a^3b^3)$
 57. $(a^3 + a - 3) \div (a - 1)$ 58. $(a^2 - a^3 + 1) \div (a - 2)$
 59. $(2x^2 + 5xy - 3y^2) \div (2x - y)$ 60. $(6a^3 + 5a^2b + 4ab^2 + b^3) \div (3a + b)$
 61. $(x^5 - x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 15x + 5) \div (x^2 - 5)$ 62. $(y^5 - y^4 + y^2 + 3y + 2) \div (y^2 + y + 1)$

Factorizar cada polinomio en los ejercicios 63-110.

63. $6x^2y^2 - 3xy$ 64. $9a^4b^5c^2 - 18a^4b^3c + 81a^2b^2c^2$
 65. $5a^2b - 10ab + 3a - 6$ 66. $3xy^2 - 15xy - 4y + 20$
 67. $8a^3b^3 - 2a^2b^2 - 12abc^2 + 3c^2$ 68. $10x^3y^3 + 25x^2y^2z - 12xyz - 30z^2$
 69. $x^2 + 8x + 7$ 70. $x^2 - 8x + 7$ 71. $u^2 + 9u + 20$
 72. $x^2 - 2x - 35$ 73. $3x^2 - 5x - 2$ 74. $4x^2 + 4x - 15$
 75. $5u^2 + 24uv - 5v^2$ 76. $3x^2 + 10xy - 8y^2$ 77. $4x^2 - 9y^2$
 78. $25u^2 - 16v^2$ 79. $4x^2 + 12xy + 9y^2$ 80. $4x^2 - 12xy + 9y^2$
 81. $27u^3 - v^3$ 82. $27u^3 + v^3$ 83. $6x^2 - 6y^2$
 84. $18u^2 - 8v^2$ 85. $28x^2 - 58xy - 30y^2$ 86. $-4u^2 - 34uv - 70v^2$
 87. $5u^2v^2 - 11uv + 2$ 88. $6x^2 + 7xy - 10y^2$ 89. $3u^2 - 60uv + 300v^2$
 90. $8x^2 - 56xy + 98y^2$ 91. $32x^3 + 4y^9$ 92. $250u^6 - 16v^9$
 93. $x^2 + 2xy + 2$ 94. $x^2 - xy + y^2$ 95. $-5u^2 + 70uv - 240v^2$
 96. $-3x^2 - 12xy + 96y^2$ 97. $3u^2 - 2uv - 16v^2$ 98. $15x^2 + 11xy - 56y^2$
 99. $(u - v)^2 - 16$ 100. $(u - v)^2 - 4(u - v) + 4$ 101. $9u^6 - 30u^3v^2 + 25v^4$
 102. $9u^6 + 30u^3v^3 + 25v^6$ 103. $15x^2 + 34xy + 15y^2$ 104. $35x^2 - 74xy + 35y^2$
 105. $(x + y)^2 - (u + v)^2$ 106. $(x + 2y)^2 - (x - 2y)^2$ 107. $x^4 + 2x^2y^2 - 15y^4$
 108. $u^4 - 10u^2v^2 + 21v^4$ 109. $8u^6 - 7u^3v^3 - v^6$ 110. $x^6 + 7x^3y^3 - 8y^6$

En los ejercicios 111-114 factorizar suponiendo que n es un entero positivo.

111. $4x^{2n} - y^{2n}$ 112. $x^{2n} - 4y^{6n}$ 113. $27x^{3n} - 8y^{3n}$ 114. $27x^{3n} + 8y^{3n}$

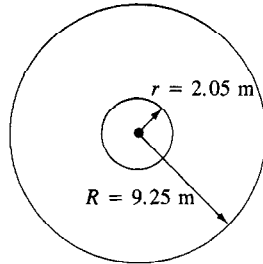
En los ejercicios 115-120 factorizar por agrupamiento utilizando las fórmulas especiales.

115. $x^2 - 4y^2 + 6x - 12y$ 116. $4x^2 - 9y^2 - 2x - 3y$ 117. $u^2 + 10uv + 25v^2 - w^2$
 118. $x^2 - y^2 - 4y - 4$ 119. $x^3 + y^3 + 2x^2y + 2xy^2$ 120. $x^3 - y^3 - x^2y + xy^2$

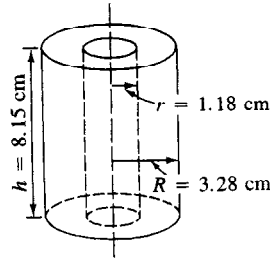


Resolver.

- 121. Economía.** En una empresa el costo de manufactura está dado por $M = 4u^2 - u + 5$, y el costo al por mayor en dólares está dado por $W = 2u^2 + u + 6$, donde u es el número de unidades producidas.
- Determinar el polinomio que representa al costo total C de la operación, si $C = M + W$.
 - Determinar el costo total cuando se producen y venden 15 unidades.
- 122. Economía.** La renta total en dólares de la operación en el ejercicio 121 está dada por $R = 7u^2 - u + 3$.
- Encontrar el polinomio que representa a la utilidad P , si $P = R - C$.
 - Encontrar la utilidad cuando se producen y venden 8 unidades.
- 123. Agricultura.** Un jardín circular de radio R tiene una fuente circular en el centro con radio r . Encontrar un polinomio que represente al área del jardín que puede cultivarse. **a)** Factorizar este polinomio. **b)** Encontrar el área con dos lugares decimales de exactitud cuando $R = 9.25 \text{ m}$ y $r = 2.05 \text{ m}$. (Emplear 3.14 para π .) **c)** ¿Cuántas plantas deberían comprarse si cada una requiere aproximadamente 0.75 m^2 para crecer adecuadamente?



Ejercicio 123



Ejercicio 124

- 124. Ingeniería.** Un cilindro circular de radio R tiene barrenado su centro con un radio igual a r . Si el cilindro tiene h unidades de altura, encontrar un polinomio que represente al volumen del metal restante.
- Factorizar este polinomio.
 - Encontrar el volumen con dos lugares decimales de exactitud cuando $R = 3.28 \text{ cm}$, $r = 1.18 \text{ cm}$, y $h = 8.15 \text{ cm}$. (Utilizar 3.14 para π .)

Problemas de repaso

Simplificar y escribir sin exponentes negativos.

125. $\left(\frac{3x^3}{y^{-2}}\right)^{-2}$

126. $\left(\frac{2a^{-4}}{b^6}\right)^2$

127. $\frac{4x^5y^{-2}}{10x^{-2}y^{-4}}$

128. $\frac{9a^4b^{-6}}{18a^{-2}b^8}$

129. $\left(\frac{2^0x^4y^{-9}}{3(xy)^{-6}}\right)^{-2}$

130. $\frac{9(a^2b)^{-3}}{3^0(a^{-4}b^{-2})^{-1}}$

Problemas de repaso de la sección anterior

Al cociente de expresiones algebraicas se le denomina **fracción algebraica**. En esta sección se considera a las **expresiones racionales** las cuales son cocientes de dos polinomios. Por ejemplo,

$$\frac{x^2 + 4}{x - 2}, \quad \frac{x + 3y}{2x - 5y}, \quad \frac{u^2 + 3v^2}{(x + y)^2}, \quad \frac{3x(x + 3)}{(x - 5)(x + 3)}$$

son expresiones racionales.

Expresiones equivalentes

Los polinomios están definidos para todos los números reales, pero las expresiones racionales no están definidas para valores de la variable que anulen el denominador. Por ejemplo,



$$\frac{3x(x+3)}{(x-5)(x+3)}$$

no está definido para $x = 5$ y $x = -3$. Además, ya que

$$\frac{3x(x+3)}{(x-5)(x+3)} = \frac{3x}{x-5}$$

se dice que estas dos expresiones son *equivalentes*. En general a/b y c/d son equivalentes si una expresión puede obtenerse de la otra al multiplicar o dividir tanto al numerador como al denominador por una misma expresión diferente de cero.

El ejemplo anterior se escribe por lo común

$$\frac{3x(\cancel{x+3})}{(x-5)(\cancel{x+3})} = \frac{3x}{x-5}$$

y se dice que se han **cancelado** los factores comunes. Si 1 o -1 son los únicos factores comunes del numerador y denominador, la expresión racional está **reducida a su mínima expresión**.

EJEMPLO 1

Reducir cada expresión racional a su mínima expresión.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{8x^4 + 2x}{2x} &= \frac{\cancel{2x}(4x^3 + 1)}{\cancel{2x}} \\ &= \frac{4x^3 + 1}{1} = 4x^3 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{2a^3 + a^2b - ab^2}{a^3 - ab^2} &= \frac{a(2a^2 + ab - b^2)}{a(a^2 - b^2)} \\ &= \frac{(2a - b)}{(a - b)} \\ &= \frac{2a - b}{a - b} \end{aligned}$$

PRECAUCIÓN. Sólo los factores deben cancelarse, no los términos. Por ejemplo,

$$\frac{2a - b}{a - b} \quad \text{no se cancela} \quad \frac{\cancel{2a} - \cancel{b}}{\cancel{a} - \cancel{b}}.$$

Multiplicación y división de expresiones racionales

Si a/b y c/d son expresiones racionales, donde $b \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces

Multiplicación de expresiones racionales.

Así, deben multiplicarse los numeradores entre sí y los denominadores entre sí. Sin embargo, es preferible reducir las fracciones antes de obtener los productos.

EJEMPLO 2

Multiplicar.

$$\frac{2a^2 + ab - b^2}{6a^2 + 5ab + b^2} \cdot \frac{3a^2 - 2ab - b^2}{2a^2 - ab} = \frac{(\cancel{2a-b})(a+b)(a-b)(\cancel{3a+b})}{(\cancel{3a+b})(2a+b)a(\cancel{2a-b})}$$

$$= \frac{(a+b)(a-b)}{a(2a+b)} = \frac{a^2 - b^2}{2a^2 + ab}$$

ya sea $\frac{(a+b)(a-b)}{a(2a+b)}$ o $\frac{a^2 - b^2}{2a^2 + ab}$ es una respuesta aceptable.

La división de expresiones racionales se define como sigue, siendo b, c y $d \neq 0$:

División de expresiones racionales.

A la fracción d/c se le denomina el **recíproco** de c/d . Entonces, la división es una multiplicación por el recíproco del divisor.

EJEMPLO 3

Realizar las operaciones indicadas.

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 - 10ab + 25b^2}{2a^2 - 7ab - 4b^2} \cdot \frac{3a^2 - 17ab + 20b^2}{a^2 - 25b^2} \div \frac{3a^2 - 20ab + 25b^2}{2a^2 - ab - b^2} \\ &= \frac{a^2 - 10ab + 25b^2}{2a^2 - 7ab - 4b^2} \cdot \frac{3a^2 - 17ab + 20b^2}{a^2 - 25b^2} \cdot \frac{2a^2 - ab - b^2}{3a^2 - 20ab + 25b^2} \\ &= \frac{(a-5b)(a-5b)(3a-5b)(a-4b)(2a+b)(a-b)}{(a-4b)(2a+b)(a-5b)(a+5b)(3a-5b)(a-5b)} = \frac{a-b}{a+5b} \end{aligned}$$

Suma y resta de expresiones racionales

La suma o resta de expresiones racionales con un denominador común se define como sigue, siendo

y

Suma y resta.

Si los denominadores no son iguales, debe convertirse a las fracciones en fracciones equivalentes que tengan un denominador común. Tratándose de expresiones racionales, el procedimiento más adecuado es encontrar el **mínimo común denominador (MCD)**.

Para encontrar el MCD de dos o más fracciones

1. Se factorizan todos los denominadores y se reduce cada fracción, si es posible.
2. Cada factor de un denominador aparece en el MCD tantas veces como aparece en el denominador donde se encuentra el mayor número de veces.

EJEMPLO 4

Encontrar el mínimo común denominador (MCD).

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{ab}{a^2 - 5ab + 6b^2} \quad \text{y} \quad \frac{a+2b}{a^3 - ab^2} \\ & \frac{ab}{a^2 - 5ab + 6b^2} = \frac{ab}{(a-2b)(a-3b)} \\ & \frac{a+2b}{a^3 - 4ab^2} = \frac{a+2b}{a(a+2b)(a-2b)} = \frac{1}{a(a-2b)} \end{aligned}$$

Así, los factores del MCD son un factor $(a - 2b)$, un factor $(a - 3b)$, y un factor a . Por consiguiente, el MCD es $a(a - 2b)(a - 3b)$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{3x+y}{x^2-6xy+9y^2}, \frac{xy}{x^2-9y^2}, \text{ y } \frac{x-y}{4x^5-4x^4y+x^3y^2} \\ \frac{3x+y}{x^2-6xy+9y^2} &= \frac{3x+y}{(x-3y)^2} \quad \text{Factorización por trinomio cuadrado perfecto} \\ \frac{xy}{x^2-9y^2} &= \frac{xy}{(x+3y)(x-3y)} \quad \text{Factorización por diferencia de cuadrados} \\ \frac{x-y}{4x^5-4x^4y+x^3y^2} &= \frac{x-y}{x^3(2x-y)^2} \quad \text{Factorización por agrupación} \end{aligned}$$

Así, los factores del MCD incluyen dos factores $(x - 3y)$, un factor $(x + 3y)$, tres factores x y dos factores $(2x - y)$. El MCD es

$$x^3(x + 3y)(x - 3y)^2(2x - y)^2.$$

Para sumar o restar fracciones, cada una debe transformarse en una fracción equivalente que tenga al MCD como su denominador. Esto se lleva a cabo multiplicando tanto al numerador como al denominador por todos los factores del MCD que no están presentes en el denominador de la fracción particular. Una vez que todas las fracciones se han escrito en otras como equivalentes que tienen al MCD como denominador, se procede a sumar o restar los numeradores y el resultado se coloca sobre el MCD. Si es posible, se reduce la fracción resultante a su mínima expresión.

EJEMPLO 5

Realizar las operaciones indicadas.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{3x+y}{x^2+4xy-21y^2} + \frac{x+y}{9y^2-x^2} \\ &= \frac{3x+y}{(x-3y)(x+7y)} + \frac{x+y}{(3y-x)(3y+x)} \\ &= \frac{3x+y}{(x-3y)(x+7y)} + \frac{x+y}{-(x-3y)(3y+x)} \quad \text{Factorización por diferencia de cuadrados} \\ &= \frac{3x+y}{(x-3y)(x+7y)} - \frac{x+y}{(x-3y)(x+3y)} \\ &= \frac{(3x+y)(x+3y)}{(x-3y)(x+7y)(x+3y)} - \frac{(x+y)(x+7y)}{(x-3y)(x+3y)(x+7y)} \\ &= \frac{(3x+y)(x+3y) - (x+y)(x+7y)}{(x-3y)(x+3y)(x+7y)} \\ &= \frac{3x^2+10xy+3y^2 - (x^2+8xy+7y^2)}{(x-3y)(x+3y)(x+7y)} \quad \begin{array}{l} \text{Se realiza la operación para} \\ \text{eliminar los signos de} \end{array} \\ &= \frac{3x^2+10xy+3y^2-x^2-8xy-7y^2}{(x-3y)(x+3y)(x+7y)} = \frac{2x^2+2xy-4y^2}{(x-3y)(x+3y)(x+7y)} \\ &= \frac{2(x+2y)(x-y)}{(x-3y)(x+3y)(x+7y)} \quad \text{No hay factores comunes} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } & \frac{2xy}{x^2 - y^2} - \frac{y}{x + y} + 2 \\
&= \frac{2xy}{(x + y)(x - y)} - \frac{y}{x + y} + 2 \\
&= \frac{2xy}{(x + y)(x - y)} - \frac{y}{(x + y)} + \frac{2(x + y)(x - y)}{(x + y)(x - y)} \quad \begin{matrix} 2 = \frac{2}{1} \\ \text{MCM} = \\ (x + y)(x - y) \end{matrix} \\
&= \frac{2xy - y(x - y) + 2(x + y)(x - y)}{(x + y)(x - y)} \\
&= \frac{2xy - yx + y^2 + 2(x^2 - y^2)}{(x + y)(x - y)} = \frac{2xy - xy + y^2 + 2x^2 - 2y^2}{(x + y)(x - y)} \\
&= \frac{xy - y^2 + 2x^2}{(x + y)(x - y)} = \frac{2x^2 + xy - y^2}{(x + y)(x - y)} \\
&= \frac{(2x - y)(x - y)}{(x + y)(x - y)} \quad \begin{matrix} \text{Se cancela } (x - y) \text{ del numerador y del denominador} \\ \text{cancelándose cancelando factores} \end{matrix} \\
&= \frac{2x - y}{x + y}
\end{aligned}$$

Fracciones complejas

A una fracción algebraica que contiene al menos una fracción en su numerador o en su denominador se le llama **fracción compleja**. Las siguientes son fracciones complejas.

$$\frac{\frac{3}{7}}{\frac{5}{x}}, \quad \frac{\frac{x+y}{y}}{\frac{x-y}{x}}, \quad \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{a - b}, \quad \frac{\frac{1}{(x+h)^4} - \frac{1}{x^4}}{h}.$$

Hay dos métodos para simplificar fracciones complejas. El primero consiste en transformar al numerador en una fracción simple, modificar al denominador en una fracción simple y luego dividir. El segundo método consiste en multiplicar tanto al numerador como al denominador por el MCD de todas las fracciones.

EJEMPLO 6

Simplificar cada fracción compleja.

$$\begin{aligned}
\text{a) } & \frac{\frac{b}{a+b} - 1}{\frac{b}{a-b} + 1} = \frac{\frac{b}{a+b} - \frac{a+b}{a+b}}{\frac{b}{a-b} + \frac{a-b}{a-b}} \\
&= \frac{\frac{b - (a+b)}{a+b}}{\frac{b + a - b}{a-b}} = \frac{\frac{b - a - b}{a+b}}{\frac{b + a - b}{a-b}} = \frac{\frac{-a}{a+b}}{\frac{a}{a-b}} \\
&= \frac{\cancel{-1}}{a+b} \cdot \frac{a-b}{\cancel{a}} = \frac{-(a-b)}{a+b} = \frac{b-a}{a+b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \frac{\frac{y-x}{1} - \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{y^3} - \frac{1}{x^3}} &= \frac{(y-x)}{\left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{x^3}\right)} \\
 &= \frac{(y-x)x^3y^3}{\frac{x^3}{y^3} - \frac{y^3}{x^3}} \\
 &= \frac{(y-x)x^3y^3}{x^3 - y^3} = \frac{x^3y^3}{(x^2 + xy + y^2)} \\
 &= \frac{-(x-y)x^3y^3}{(x-y)(x^2 + xy + y^2)} = \frac{-x^3y^3}{x^2 + xy + y^2}
 \end{aligned}$$

1.4. Ejercicios

Determinar en los ejercicios 1-3 los valores de las variables para los cuales la expresión racional no está definida.

$$1. \frac{(y-3)(x+2)}{(y^2-5y+6)(x+7)}$$

$$2. \frac{a^2+b^2}{(a^2-10a+25)(b^2-1)}$$

$$3. \frac{6a+b}{a^2+ab}$$

En los ejercicios 4-6 determinar si las fracciones dadas son equivalentes donde están definidas.

$$4. \frac{a-b}{a^2-b^2}, \frac{1}{a+b}$$

$$5. \frac{x^2(x+2)}{x(x-1)}, \frac{x(x+2)}{(x-1)}$$

$$6. \frac{a^2-b^2+c^2}{b-c}, \frac{-a^2+b^2-c^2}{c-b}$$

Reducir cada fracción a su mínima expresión en los ejercicios 7-9.

$$7. \frac{77x^2y^4}{33x^3y^2}$$

$$8. \frac{a-b}{b^2-a^2}$$

$$9. \frac{15x+7x^2-2x^3}{x^2-8x+15}$$

En los ejercicios 10-24 realizar las operaciones indicadas y luego simplificar.

$$10. \frac{200a^2b^3}{36ab} \cdot \frac{14a^3b^2}{21}$$

$$11. \frac{3(x+y)}{6x^2y^2} \cdot x^3y^3$$

$$12. \frac{4a+8}{9a+9} \cdot \frac{a^2-1}{2a+4}$$

$$13. \frac{3(x^2+xy)}{16(x^2-y^2)} \cdot \frac{20y^2}{9(xy+y^2)}$$

$$14. \frac{a^2-b^2}{3a+3b} \div \frac{(a-b)^2}{9}$$

$$15. \frac{x^2-x-12}{x^2-9} \div \frac{x^2-16}{5x-5}$$

$$16. \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3} \div \frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$$

$$17. \frac{6x^2-x-35}{2x^2-3x-5} \div \frac{3x^2+x-14}{x^2-x-2}$$

$$18. \frac{a^4-b^4}{a^2+ab-2b^2} \div (a^2+b^2)$$

$$19. \frac{y^2-1}{2y+2} \cdot \frac{y^2-8y+12}{y^2-4y+4} \cdot \frac{y+2}{y-6}$$

$$20. \frac{a^2-4}{a^2-4a+4} \cdot \frac{a^2-9a+14}{a^3+2a^2}$$

$$21. \frac{uv-uw+xv-xw}{v-w} \div \frac{v^2-2vw+w^2}{xv-xw}$$

$$22. \frac{a^3+64}{2a^2+18a+40} \div \frac{a^2-4a+16}{a^2+4a}$$

$$23. \frac{x^2-y^2}{x^2-xy+y^2} \cdot \frac{2x^2-3xy-2y^2}{x^2+2xy+y^2} \div \frac{2x^2-xy-y^2}{x^3+y^3}$$

$$24. \frac{3u^2-5uv-2v^2}{u^2+uv-2v^2} \cdot \frac{v^2+4vu-5u^2}{12u^2+7uv+v^2} \div \frac{5u^2-9uv-2v^2}{8u^2-2uv-v^2}$$

Encontrar el MCD de las fracciones dadas en los ejercicios 25-28.

$$25. \frac{6}{x^2y} \quad \text{y} \quad \frac{7}{xy^2}$$

$$26. \frac{6x}{x^2-y^2} \quad \text{y} \quad \frac{5y}{x^2+2xy+y^2}$$

$$27. \frac{x+7}{x^5-27x^2} \quad y \quad \frac{x-3}{5x^3+15x^2+45x}$$

$$28. \frac{3x+y}{6(x-y)^3} \quad y \quad \frac{7}{(y-x)^4}$$

Realizar las operaciones indicadas en los ejercicios 29-55.

$$29. \frac{6y-2}{y} + \frac{3y-1}{-y}$$

$$30. \frac{3a}{a-4} + \frac{5a}{4-a}$$

$$31. \frac{a+2}{a^2-4} - \frac{3}{a-2}$$

$$32. \frac{x}{1-x^2} - \frac{1-2x}{(x-1)(x+1)}$$

$$33. \frac{6}{5x-10} + \frac{3}{x+2}$$

$$34. \frac{5x}{x^3-16x} - \frac{4}{x-4}$$

$$35. \frac{y-2}{y^2+y-6} + \frac{2}{y^2+4y+3}$$

$$36. \frac{6a}{a^3-27} - \frac{4}{2(a^2+3a+9)}$$

$$37. \frac{3x^2+2}{x^2-7x+6} - 3$$

$$38. \frac{2ab}{a^2-b^2} - \frac{b}{a-b} + 5$$

$$39. \frac{3}{2x-4} + \frac{2}{3x+6} - \frac{5}{4x+4}$$

$$40. \frac{2y-1}{y^2-4y+4} + \frac{2y+3}{4-y^2}$$

$$41. \frac{1 - \frac{x^3}{y^3}}{1 - \frac{x}{y}}$$

$$42. \frac{\frac{1}{u} + \frac{2}{u^2}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{a^2}}$$

$$43. \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$44. \frac{\frac{a}{a-b} - 1}{\frac{a}{a+b} - 1}$$

$$45. \frac{x+6+\frac{8}{x}}{x+4+\frac{4}{x}}$$

$$46. \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$$

$$47. \frac{\frac{1}{a-1} + 1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{a-1}}$$

$$48. \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$49. \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h}$$

$$50. \frac{(x^2+5)3x^2 - x^3(2x)}{(x^2+5)^2}$$

$$51. \frac{(4x+3)(6x+2) - (3x^2+2x)(4)}{(4x+3)^2}$$

$$52. \frac{x^{-1} + y^{-1}}{x^{-1}y^{-1}}$$

$$53. (a^{-1} + b^{-1})^{-1}$$

$$54. \frac{x^{-1} - y^{-1}}{x^{-1} + y^{-1}}$$

$$55. \frac{u^{-2} - v^{-2}}{u^{-1} - v^{-1}}$$

Es necesario recordar el orden de las operaciones en los ejercicios 56-57. Primero hay que hacer las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha. Luego hay que hacer las sumas y las restas de izquierda a derecha.

$$56. \frac{x}{x^2-y^2} - \frac{y}{x^2-y^2} \cdot \frac{x+y}{x-y} + \frac{y(x+y)}{x^2-3xy-4y^2} \div \frac{(x+y)^2}{x-4y}$$

$$57. \frac{ab}{(a-b)^2} + \frac{a^2b}{a^2-4ab-21b^2} \cdot \frac{(a-7b)}{a} - \frac{b(a+b)}{(a-b)} \div \frac{a^2-b^2}{a}$$

58. **Ingeniería.** En un circuito electrónico la frecuencia está dada por la expresión de la forma.

$$\frac{\frac{1}{p} \left(1 + \frac{p}{q} \right)}{1 + (1+p) \frac{q}{p}}$$

Simplificar la fracción compleja.

59. **Ingeniería.** En un circuito electrónico la corriente está dada por una expresión de la forma

$$\frac{uv}{u+v - \frac{u}{1+uv}}$$

Simplificar la fracción compleja.

Para repaso

Factorizar los polinomios en los ejercicios 60-62.

60. $10x^2 - 1000y^2$

61. $6u^2 + uv - 35v^2$

62. $27u^3 - 64v^3$

Realizar las operaciones indicadas en los ejercicios 63-65.

63. $(7a^3b^2 - 8a^2b^3 + 2) - (3a^3b^2 - 5a^2b^3 - 7)$

64. $(3x + 5y)(9x^2 - 15xy + 25y^2)$

65. $(8x^4 - 26x^3 + 19x^2 - 20x + 25) \div (2x - 5)$

En los ejercicios 66-69 responder cierto o falso. Si la respuesta es falsa, explicar por qué.

66. -18 es un entero.

67. $\sqrt{8}$ es un número irracional.

68. Algunos enteros son números no negativos.

69. El conjunto de los números no negativos es cerrado con respecto a la resta.

En los ejercicios 70-72 encuentre a) el cuadrado y b) el cubo de cada expresión.

70. y

71. $2x$

72. $3z^2$

1.5. RADICALES Y EXPONENTES RACIONALES**Raíces y radicales**

Si $b^2 = a$, entonces b es una **raíz cuadrada** de a ; y si $b^3 = a$, entonces b es una **raíz cúbica** de a . Este concepto se generaliza en la definición siguiente.

Raíz k -ésima principal

Sea k un entero positivo mayor que 1. Entonces

$$b = \sqrt[k]{a} \text{ si } b^k = a.$$

Si k es par, entonces $a \geq 0$ y $b \geq 0$, también.

A la expresión $\sqrt[k]{a}$ se le llama **radical** ($\sqrt{}$ es el **signo radical**), a a **radicando** y a k **índice**. Cuando k es par, por ejemplo $k = 2$, puede tenerse $(3)^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$; es decir,

$$3 = \sqrt{9} \quad \text{y} \quad -3 = -\sqrt{9}$$

lo que hace que tanto 3 como -3 sean raíces cuadradas de 9. Sin embargo, sólo 3 es la raíz cuadrada principal. Así, a $b = \sqrt[k]{a}$ se le llama la **raíz k -ésima principal de a** , siendo b no negativa cuando k es par. Si k es impar, $\sqrt[k]{a}$ es no negativa cuando $a \geq 0$ y negativa cuando $a < 0$. Lo anterior se puede resumir de la siguiente manera:

$$\sqrt[k]{a^k} = |a| \quad \text{si } k \text{ es par;}$$

$$\sqrt[k]{a^k} = a \quad \text{si } k \text{ es impar.}$$

EJEMPLO 1

- a) $\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$ *A es 64.*
 b) $\sqrt[3]{(-7)^3} = -7$ *k es 10,000.*
 c) $\sqrt[4]{-16}$ no es un número real
 d) $-\sqrt[6]{64} = -\sqrt[6]{2^6} = -|2| = -2$
 e) $\sqrt{25x^2} = \sqrt{(5x)^2} = |5x| = 5|x|$ *6.*

Obsérvese que en el ejemplo 1 e) la respuesta debe dejarse como $5|x|$ puesto que se desconoce si x es positivo o negativo. Para lo restante de esta sección, se supondrá que las *variables bajo radicales con índice par representan números reales positivos*, eliminando así la necesidad de usar valores absolutos en las respuestas.

Simplificación de radicales

Los radicales con frecuencia pueden simplificarse utilizando las propiedades siguientes.

Para los números reales a y b ($a > 0$ y $b > 0$ cuando el índice es par),

1. $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, **Propiedad del producto**
2. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, **Propiedad del cociente**
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$. **Propiedad del índice**

Cuando se utilicen estas propiedades, se buscan las potencias k -ésimas perfectas que se pueden formar bajo el radical. El ejemplo 2 ilustra esta técnica.

EJEMPLO 2

- a) $\sqrt{32x^5} = \sqrt{2 \cdot 2^4 \cdot x \cdot x^4}$ *2^4 y x^4 son combinados perfectos*
 $= \sqrt{2^4 x^4 \cdot 2x}$
 $= \sqrt{2^4 x^4} \sqrt{2x}$
 $= 2^2 x^2 \sqrt{2x} = 4x^2 \sqrt{2x}$
- b) $\frac{\sqrt{27u^3}}{\sqrt{3u}} = \sqrt{\frac{27u^3}{3u}}$ *$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$*
 $= \sqrt{9u^2}$
 $= 3u$ *puesto que la suposición es $u > 0$, $|u| = u$*
- c) $\sqrt[5]{9a^2b^3} \sqrt[5]{81a^3b^4} = \sqrt[5]{3^6 a^5 b^7}$ *$a^5 b^5 = (ab)^5$*
 $= \sqrt[5]{3^5 a^5 b^5 \cdot 3b^2}$ *se buscan las potencias quintas perfectas*
 $= \sqrt[5]{3^5 a^5 b^5} \sqrt[5]{3b^2}$
 $= 3ab \sqrt[5]{3b^2}$

Nótese que en el primer paso no se han multiplicado los números. Más bien, se han factorizado al buscar las potencias quintas perfectas.

$$\begin{aligned} \text{d) } \sqrt[3]{\sqrt{64x^7y^{13}}} &= \sqrt[6]{64x^7y^{13}} \\ &= \sqrt[6]{2^6x^6y^{12} \cdot xy} \\ &= \sqrt[6]{2^6x^6(y^2)^6} \sqrt[6]{xy} \\ &= 2xy^2\sqrt[6]{xy} \end{aligned}$$

Exponentes racionales

Algunas expresiones con radicales pueden simplificarse con mayor facilidad al utilizar exponentes racionales. Si se supone que las reglas de los exponentes enteros son válidas para exponentes racionales, entonces

$$(a^{1/k})^k = a^{(1/k)k} = a^1 = a.$$

Esto indicaría que $a^{1/k} = \sqrt[k]{a}$. En general, se tiene la siguiente definición.

Si a es tal que $\sqrt[n]{a}$ es un número real, entonces

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

EJEMPLO 3

Utilizar exponentes racionales para simplificar.

$$\begin{aligned} \text{a) } (\sqrt[3]{-8x^9y^6})^2 &= (-8x^9y^6)^{2/3} \\ &= [(-2)^3]^{2/3}(x^9)^{2/3}(y^6)^{2/3} \\ &= (-2)^2x^6y^4 = 4x^6y^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt[4]{\frac{16x^9}{81y^8}} &= \left(\frac{2^4x^9}{3^4y^8}\right)^{1/4} \\ &= \frac{(2^4)^{1/4}(x^9)^{1/4}}{(3^4)^{1/4}(y^8)^{1/4}} \\ &= \frac{2x^{9/4}}{3y^2} = \frac{2x^2x^{1/4}}{3y^2} \\ &= \frac{2x^2\sqrt[4]{x}}{3y^2} \end{aligned}$$

PRECAUCIÓN. No hay reglas para la suma y la resta de radicales similares a las empleadas para la multiplicación y la división. En general,

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \text{y} \quad \sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}.$$

Sin embargo, es posible simplificar algunas expresiones mediante la combinación de radicales semejantes.

EJEMPLO 4

Sumar o restar.

$$\begin{aligned}\text{a) } 6\sqrt{125} + 3\sqrt{20} &= 6\sqrt{25 \cdot 5} + 3\sqrt{4 \cdot 5} \\ &= 6\sqrt{25}\sqrt{5} + 3\sqrt{4}\sqrt{5} \\ &= 6 \cdot 5\sqrt{5} + 3 \cdot 2\sqrt{5} \\ &= 30\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 36\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } 4\sqrt[3]{8x^4y^5} - 3\sqrt[3]{27x^4y^5} &= 4\sqrt[3]{2^3x^3y^3 \cdot xy^2} - 3\sqrt[3]{3^3x^3y^3 \cdot xy^2} \\ &= 4(2xy)\sqrt[3]{xy^2} - 3(3xy)\sqrt[3]{xy^2} \\ &= 8xy\sqrt[3]{xy^2} - 9xy\sqrt[3]{xy^2} \\ &= -xy\sqrt[3]{xy^2}\end{aligned}$$

Racionalización de denominadores

Por uniformidad de respuestas y simplicidad en los cálculos, con frecuencia es deseable **racionalizar denominadores**. Esto significa transformar a la fracción en una expresión equivalente sin radicales en el denominador. Si la fracción tiene un término en el denominador, el proceso requiere multiplicar por un radical que haga al radicando en el denominador una potencia k -ésima perfecta. Por ejemplo, ya que sea que $9x = 3^2x$ sea un cubo perfecto, se multiplica por $3x^2$ para obtener 3^3x^3 en el radicando del denominador de la siguiente expresión.

$$\sqrt[3]{\frac{5y}{9x}} = \sqrt[3]{\frac{5y}{9x} \cdot \frac{3x^2}{3x^2}} = \sqrt[3]{\frac{15x^2y}{27x^3}} = \frac{\sqrt[3]{15x^2y}}{3x}$$

Si el denominador tiene un factor binomial de la forma $c\sqrt{x} + d\sqrt{y}$, entonces se multiplica tanto al numerador como al denominador por $c\sqrt{x} - d\sqrt{y}$.

EJEMPLO 5

Racionalizar los denominadores.

$$\begin{aligned}\text{a) } \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{7} + \sqrt{5}} &= \frac{\sqrt{5}}{(2\sqrt{7} + \sqrt{5})} \\ &= \frac{\sqrt{5}(2\sqrt{7} - \sqrt{5})}{(2\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2} \\ &= \frac{2\sqrt{35} - 5}{4(7) - 5} \\ &= \frac{2\sqrt{35} - 5}{23}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{b) } \frac{(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} &= \frac{(x-y)\sqrt{x}+\sqrt{y}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})\sqrt{x}+\sqrt{y}} \\
 &= \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2} \\
 &= \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y} = \sqrt{x}+\sqrt{y}
 \end{aligned}$$

En este último caso, el denominador se puede simplificar al multiplicar por el conjugado del denominador, es decir, $\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

Si es necesario un valor aproximado de un radical, una calculadora puede ser de utilidad. Para raíces cuadradas debe usarse la tecla $\sqrt{\square}$; para otras raíces, la tecla y^x . Por ejemplo, para encontrar $\sqrt[3]{15}$, considérese lo siguiente.

ALG: 15 y^x 3 $1/x$ = 2.4662121

RPN: 15 ENTER 1 ENTER 3 \div y^x 2.4662121

1.5. Ejercicios

Supóngase que todas las variables y expresiones algebraicas bajo los radicales con índice par son positivas. Simplificar cada expresión en los ejercicios 1-24.

- | | | | |
|---|--|---|--|
| 1. $\sqrt{81}$ | 2. $\sqrt[3]{-64}$ | 3. $-\sqrt[4]{625}$ | 4. $-\sqrt[3]{-27}$ |
| 5. $\sqrt[4]{16a^{12}}$ | 6. $\sqrt[3]{27x^{12}}$ | 7. $\sqrt[5]{-243a^5b^{10}}$ | 8. $\sqrt[4]{625x^{16}y^8}$ |
| 9. $\sqrt{x^2+10x+25}$ | 10. $\sqrt{4x^2+8x+4}$ | 11. $4\sqrt{5}\sqrt{125}$ | 12. $3\sqrt{7}\sqrt{49}\sqrt{7}$ |
| 13. $7\sqrt[3]{128}$ | 14. $8\sqrt{108}$ | 15. $\sqrt[3]{2xy^2}\sqrt[4]{4x^4y^2}$ | 16. $\sqrt[4]{8u^3v^7}\sqrt[4]{8u^2v^8}$ |
| 17. $\frac{\sqrt{125x^3y}}{\sqrt{5xy^3}}$ | 18. $\frac{\sqrt[3]{81a^4b^5}}{\sqrt[3]{3ab}}$ | 19. $\frac{\sqrt[4]{25x^3y^2}}{\sqrt[4]{5^{-2}x^{-1}y^{-2}}}$ | 20. $\frac{\sqrt[3]{2^{-1}x^{-3}y^{-2}}}{\sqrt[3]{16^{-1}x^{-4}y^{-8}}}$ |
| 21. $\sqrt{\sqrt[3]{x^{12}y^{18}}}$ | 22. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^{24}b^{48}}}$ | 23. $\sqrt{\sqrt[3]{16x^6y^9}}$ | 24. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{11u^{25}v^{19}}}$ |

En los ejercicios 25-36 escribir cada expresión utilizando exponentes racionales, y luego simplificarlas. Las respuestas deben darse en notación de radicales.

- | | | | |
|---------------------------|--------------------------------|--|--|
| 25. $\sqrt{125x^2}$ | 26. $\sqrt[3]{125x^4}$ | 27. $\sqrt[6]{64a^{18}b^{24}}$ | 28. $\sqrt[3]{-27x^6y^9}$ |
| 29. $\sqrt{75x^5y^7}$ | 30. $\sqrt[3]{24a^{10}b^{11}}$ | 31. $\sqrt{\frac{25a^3b^4}{4a^{-3}b^2}}$ | 32. $\sqrt[3]{\frac{8x^{-3}y^7}{27x^3y^{-2}}}$ |
| 33. $\sqrt[4]{32(x+y)^5}$ | 34. $\sqrt{5a^2+20a+20}$ | 35. $\sqrt[4]{(16x^{12}y^{-8})^{-3}}$ | 36. $\sqrt{(a^3b^2)(a^2b^3)^3}$ |

En los ejercicios 37-57 simplificar cada expresión. Aquí se entiende por simplificar que el radicando no contiene factor alguno elevado a una potencia mayor o igual que el índice, y que no hay fracciones en un radicando ni radicales en el denominador.

- | | | |
|---|-----------------------------------|---|
| 37. $6\sqrt{147}-3\sqrt{75}$ | 38. $4\sqrt[3]{81}+5\sqrt[3]{24}$ | 39. $3\sqrt[4]{48}+5\sqrt[4]{243}$ |
| 40. $5\sqrt{\frac{16}{9}}-3\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{32}}$ | 41. $6\sqrt{8x^3y}+2x\sqrt{8xy}$ | 42. $2\sqrt[3]{27x^4y^6}-4y\sqrt[3]{125x^4y^3}$ |
| 43. $\frac{8+\sqrt{48}}{4}$ | 44. $\frac{9-\sqrt{63}}{6}$ | 45. $\sqrt{\frac{250}{27}}$ |

46. $\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{7}}$

47. $\frac{\sqrt{8x}}{\sqrt{6y}}$

48. $\sqrt{\frac{9x^3}{2xy}}$

49. $\frac{\sqrt[3]{3xy}}{\sqrt[3]{2y^2}}$

50. $\sqrt{\frac{3a^3b^2}{150ab^3}}$

51. $\frac{\sqrt[4]{32a^5}}{\sqrt[4]{2b^3}}$

52. $\frac{\sqrt[3]{72x^2}}{3xy}$

53. $\frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$

54. $\frac{3\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

55. $\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$

56. $\frac{\sqrt{a} + 2\sqrt{b}}{\sqrt{a} - 2\sqrt{b}}$

57. $3\sqrt{20a} - \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{5}}$

En los ejercicios 58-60 racionalizar cada numerador.

58. $\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$

59. $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$

60. $\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$

Economía. Un índice de manufactura I , relacionado con el número de unidades en existencia u , en miles de unidades, se calcula haciendo uso de la expresión $I = 0.712(1 + u)^{1/3}$. Usar esta expresión en los ejercicios 61-62.

61. Hacer uso de una calculadora para encontrar I , y con una exactitud de tres lugares decimales cuando $u = 0.521$.

62. Encontrar el índice con tres lugares decimales cuando $u = -0.102$, es decir, cuando las órdenes exceden a las existencias disponibles en 102 unidades.

Usar la expresión $L = 3.2s^{1/2}t^{2/3}$ en los ejercicios 63-64.

63. ¿Por cuál factor se multiplica L cuando tanto s como t se duplican? La respuesta debe darse con una cifra decimal de aproximación.

64. ¿Por cuál factor se multiplica L cuando s se multiplica por 0.8 y t por 1.4? Dar la respuesta con una cifra decimal de aproximación.

Realizar las operaciones indicadas en los ejercicios 65-70.

65. $\frac{x^2 - 3xy - 40y^2}{x^2 - 25y^2} \cdot \frac{x - 5y}{x^2 - 16xy + 64y^2}$

66. $\frac{a}{a^3 - 9a} - \frac{3}{a^2 - 7a + 12}$

67. $\frac{\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x+y} - \frac{1}{y}}$

68. $\frac{u^{-1} + v^{-1}}{1 - (uv)^{-1}}$

69. $(3u - 2v + 1)^2$

70. $(2x^2y^2 - 5xy^2 + 8xy) + (-3x^2y^2 + 2xy^2 - 4xy)$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 1

Contestar cierto o falso en los ejercicios 1-4. Si la respuesta es falso, explicar por qué.

1. $\sqrt{5}$ es un número racional.

2. Algunos enteros son números naturales.

3. Si a es un número racional, entonces \sqrt{a} es racional.

4. Para todos los números reales positivos x y y , $\sqrt{x+y}$ es positivo.

Determinar la propiedad ilustrada en los ejercicios 5-6.

5. $3x + (y + 2) = (3x + y) + 2$

6. Si $a < 5$ y $5 < b$, entonces $a < b$.

Simplificar cada expresión en los ejercicios 7-9.

7. $-[a - (b + a)]$

8. $|-6| - |-13|$

9. $|-x|$ si $x < 0$

Encontrar la distancia entre los números dados en los ejercicios 10-11.

10. $-\frac{1}{5}$ y $\frac{3}{10}$

11. $\sqrt{7}$ y $-3\sqrt{7}$

En los ejercicios 12-15 simplificar cada expresión y escribir sin exponentes negativos.

12. $5x^3 \cdot x^{-5}$

13. $3y^{-1}$

14. $\left(\frac{8^0 x^{-1}}{y^3}\right)^{-2}$

15. $\left(\frac{5x^2 y}{x^{-1} y^2}\right)^{-3}$

En los ejercicios 16-17 usar una calculadora para realizar las operaciones indicadas. El resultado debe redondearse a tres cifras significativas y las respuestas deben darse en notación científica.

16. $\frac{(0.000\ 571)^2}{992\ 000}$

17. $\frac{(0.000\ 021\ 6)(8\ 360\ 000)}{(0.000\ 000\ 011\ 5)}$

18. Sumar $13x^2y^2 - 7xy + 8$ y $-2x^2y^2 + 3xy + 1$.

19. Restar $3x^2 + 2y^2 - 5x + 4y$ de $2x^2 - 5y^2 - 6x + 2y$.

20. Realizar las operaciones indicadas.

$(8u^3v^2 - 2u^2v^3) + (-4u^2v^3 + 2u^2v^2) - (u^2v^2 - 2)$

Encontrar cada producto en los ejercicios 21-26.

21. $5x^3y^2(-2xy + 7x^2y)$

22. $(7x - 2y)^2$

23. $(3a + 8b)(3a - 8b)$

24. $(2a^2 + b)(5a^2 - 2b)$

25. $(5u + 8v)(2u^2 - 3uv + v^2)$

26. $(3x - 2y - 5)^2$

Determinar cada cociente en los ejercicios 27-28.

27. $\frac{14a^3b^4 - 28a^2b^3 + 49ab^5}{-7a^2b^3}$

28. $(x^3 - 4x^2y + 2xy^2 - 3y^3) \div (x - 3y)$

Factorizar cada polinomio en los ejercicios 29-40. Supóngase que n es un entero positivo.

29. $10x^2y^3 - 15xy^2$

30. $2x^2 - 4xy - 3x + 6y$

31. $9a^2 - 16b^2$

32. $3a^2 + ab - 14b^2$

33. $54x^3 + 2y^6$

34. $25x^2 + 30xy + 9y^2$

35. $8u^2 - 2uv - 15v^2$

36. $125x^3 - 64y^3$

37. $16x^2 - 56xy + 49y^2$

38. $2u^4 - u^2v^2 - v^4$

39. $x^2 - y^2 + 10y - 25$

40. $9x^{2n} - y^{2n}$

En los ejercicios 41-42 determinar los valores de la variable para los cuales la expresión racional no está definida.

41. $\frac{x+7}{x^2-3x+2}$

42. $\frac{4a^2+5b}{(a^2-4)(b+7)}$

Respecto a las fracciones dadas en los ejercicios 43-44, ¿son equivalentes entre sí donde están definidas?

43. $\frac{x+y}{x^2-y^2}, \frac{1}{x-y}$

44. $\frac{a^2+1}{a}, \frac{a^2+2}{a^2+1}$

En los ejercicios 45-47 reducir cada fracción a su mínima expresión.

$$45. \frac{36a^2b^2c^2}{75ab^4c^2}$$

$$46. \frac{x-5}{5-x}$$

$$47. \frac{x^2+5x-24}{x^2-10x+21}$$

Realizar las operaciones indicadas en los ejercicios 48-49.

$$48. \frac{a^2-5a+6}{a^2-6a+9} \cdot \frac{a^2+4a-21}{a^2+2a-35}$$

$$49. \frac{a^3-b^3}{a^2+4a-5} \div \frac{a^2+ab+b^2}{a^2+10a+25}$$

Realizar el MCD de las fracciones dadas en los ejercicios 50-51.

$$50. \frac{8ab}{a^3-b^3} \text{ y } \frac{7}{(a-b)^2}$$

$$51. \frac{a+1}{a^2-7a+6} \text{ y } \frac{a+5}{a^2-12a+36}$$

Realizar las operaciones indicadas en los ejercicios 52-55.

$$52. \frac{3}{y^2+y} - \frac{2}{y+1}$$

$$53. \frac{2xy}{x^2-y^2} + \frac{y}{y-x} + 3$$

$$54. \frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{b}{a}-1}$$

$$55. \frac{a-7+\frac{10}{a}}{a-10+\frac{25}{a}}$$

Simplificar las expresiones de los ejercicios 56-70. Racionalizar los denominadores cuando sea necesario. Supóngase que todas las variables representan números reales positivos.

$$56. \sqrt[3]{-27}$$

$$57. \sqrt[6]{-64}$$

$$58. \sqrt{9a^4}$$

$$59. \sqrt[4]{81a^8b^{20}}$$

$$60. 3\sqrt{4x}\sqrt{12xy^2}$$

$$61. \frac{\sqrt{20a^3b^7}}{\sqrt{5ab}}$$

$$62. \frac{\sqrt[4]{48a^5b^{10}}}{\sqrt[4]{243ab^5}}$$

$$63. 4\sqrt{125} + 5\sqrt{80}$$

$$64. 4\sqrt[3]{3xy^3} - 6y\sqrt[3]{81x}$$

$$65. \frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

$$66. \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$67. 5\sqrt{40a} + \frac{8\sqrt{2a}}{\sqrt{5}}$$

$$68. \frac{\sqrt[3]{-81x^3y^{-3}}}{\sqrt[3]{3x^{-3}y^3}}$$

$$69. \left(\frac{8a^5b^7}{a^{-4}b^{-3}}\right)^{1/3}$$

$$70. \left(\frac{27^{2/3}x^{-5/3}y^2}{x^{-10/3}y^{-2}}\right)^{-3}$$

Resolver.

71. Física. Si la velocidad de la luz es 3.00×10^5 km/s, calcular el valor de un año luz en kilómetros. (Un año luz es la distancia que la luz recorre en un año.)

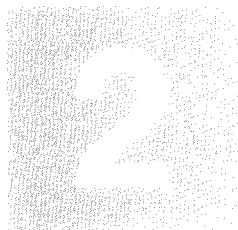
72. Cálculo. Simplificar la expresión que proviene de efectuar una derivada en cálculo.

$$\frac{4x^3(4x) - (2x^2 - 1)12x^2}{16x^6}$$

73. Administración. Todos los empleados de Mutter Manufacturing recibieron un aumento del 12%. Determinar una expresión polinómica para el nuevo salario si s es el salario anterior. ¿A cuánto ascendió el nuevo salario de Pat Wood si ganaba 24 500 dólares antes del aumento?

74. Ingeniería. La altura en pies de un cohete t segundos después del encendido es $-16t^2 + 240t$. ¿Cuál es la altura después de 3.25 segundos?

Capítulo



Ecuaciones y desigualdades

La resolución de ecuaciones es una parte importante del álgebra y de las matemáticas en general. Con frecuencia, las ecuaciones surgen como modelos matemáticos de problemas de aplicación. A continuación se presentan dos ejemplos de los tipos de problemas que se estudiarán en este capítulo.

Ecología

Un guardabosques desea estimar el número de truchas que habitan en un lago. Captura 200 peces, les marca una aleta y los regresa al lago. Después de un periodo durante el cual los peces marcados se mezclan con la población total, atrapa otra muestra de 200 peces y descubre que tres de ellos tienen las marcas. Utilícese una proporción para estimar el número de truchas que habitan en el lago.

Administración

En la manufactura y venta de álbumes de discos, los ingresos obtenidos por la venta de x álbumes son de $2.20x$ dólares, y el costo de producir x álbumes es $1.30x + 4\,500$ dólares. A fin de obtener una utilidad, los ingresos recibidos deben ser mayores que los costos de producción. ¿Para qué valores de x habrá una utilidad?

La resolución de problemas de esta naturaleza (véase el ejemplo 8 en la sección 2.2 y el ejemplo 4 en la sección 2.7) consta de dos pasos. Primero, debe determinarse una ecuación o desigualdad que describa al problema; segundo, debe resolverse la ecuación o desigualdad resultante. Aquí se empezará por repasar las técnicas básicas de solución, y luego se considerará una diversidad de aplicaciones en las que intervienen problemas cotidianos simples, así como también problemas más complejos tomados de economía y administración, ciencias, música y otros campos.

Ecuaciones

A la proposición de que dos cantidades son iguales se le denomina **ecuación**. Algunas ecuaciones son verdaderas, otras falsas, y en algunas, como

$$x + 3 = 5,$$

el valor de verdad de la ecuación depende del valor de la variable x . Si se puede sustituir la variable por un número que haga verdadera a la ecuación, a ese número se le llama **solución** o **raíz** de la ecuación. La resolución de una ecuación consiste en determinar todas las soluciones o raíces de dicha ecuación.

Ecuaciones tales como $x + 3 = 5$, que son verdaderas para algunas situaciones de la variable (cuando $x = 2$) y falsas para otras, reciben el nombre de **ecuaciones condicionales**. A una ecuación del tipo

$$x + 2 = 2 + x,$$

que es verdadera para todas las situaciones de la variable (todo número es una solución), se le llama **identidad**. Por último, a una ecuación como

$$x + 2 = x - 2,$$

que no tiene ninguna solución, se le denomina **contradicción**.

A dos ecuaciones que tienen exactamente las mismas soluciones se les llama **equivalentes**. Obsérvese que

$$x + 3 = 5 \quad \text{y} \quad x = 2$$

son equivalentes. Para resolver una ecuación, se le convierte en una ecuación equivalente que pueda resolverse por inspección directa. Esto se lleva a cabo al transformar la ecuación dada, mediante una sucesión de pasos, en una ecuación equivalente en la que la variable despejada aparece en un lado.

Ecuaciones lineales

En esta sección la atención se centrará en las ecuaciones lineales de una variable, en donde la variable sólo está elevada a la primera potencia. Por esta razón, a las ecuaciones lineales suele llamárseles **ecuaciones de primer grado**. Cada ecuación lineal con una variable x puede escribirse como una ecuación equivalente de la forma

$$ax + b = 0,$$

donde a y b son números reales conocidos y $a \neq 0$.

EJEMPLO 1

Resolver:

a) $3(x - 4) + 5x = 4$

$$3x - 12 + 5x = 4$$

$$8x - 12 = 4$$

Se eliminan los paréntesis.

Se eliminan los términos semejantes.

$$8x - 12 = 4 \quad | +12 \text{ a los dos miembros} \quad 8x - 12 + 12 = 4 + 12$$

$$8x = 16$$

$$\frac{8x}{8} = \frac{16}{8} \quad | :8 \text{ a los dos miembros} \quad \frac{8x}{8} = \frac{16}{8}$$

$$x = 2$$

Comprobación: $3(\quad - 4) + 5(\quad) \geq 4$

$$3(-2) + 10 \geq 4$$

$$-6 + 10 \geq 4$$

$$4 = 4$$

La solución es 2.

b) $1.2y - 3.6 = 2.4$

Cuando en una ecuación intervienen decimales o fracciones, es más fácil resolverla si se eliminan antes de proceder.

$$10(1.2y - 3.6) = 2.4(10) \quad | \cdot 10 \text{ a los dos miembros} \quad 10(1.2y - 3.6) = 2.4(10)$$

$$12y - 36 = 24 \quad | -36 \text{ a los dos miembros} \quad 12y - 36 = 24$$

$$12y - 36 = 24 \quad | +36 \text{ a los dos miembros} \quad 12y - 36 + 36 = 24 + 36$$

$$12y = 60$$

$$\frac{12y}{12} = \frac{60}{12} \quad | :12 \text{ a los dos miembros} \quad \frac{12y}{12} = \frac{60}{12}$$

$$y = 5$$

Comprobación: $1.2(\quad) - 3.6 \geq 2.4$

$$6.0 - 3.6 \geq 2.4$$

$$2.4 = 2.4$$

La solución es 5.

c) $\frac{5}{2}z + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}z - (3 - z)$

$$2\left[\frac{5}{2}z + \frac{3}{2}\right] = 2\left[\frac{3}{2}z - (3 - z)\right] \quad | \cdot 2 \text{ a los dos miembros} \quad 2\left[\frac{5}{2}z + \frac{3}{2}\right] = 2\left[\frac{3}{2}z - (3 - z)\right]$$

$$5z + 3 = 3z - 2(3 - z)$$

$$5z + 3 = 3z - 6 + 2z$$

$$5z + 3 = 5z - 6$$

$$5z + 3 = 5z - 6 \quad | -5z \text{ a los dos miembros} \quad 5z + 3 = 5z - 6$$

$$3 = -6$$

Cada vez que se obtenga una contradicción, como $3 = -6$, se sabe que la ecuación original es también una contradicción. Por consiguiente, no hay solución alguna para esa ecuación.

En el ejemplo 1 c) se muestra que siempre que haya una contradicción la ecuación no tendrá solución. De manera similar, si en algún paso se presenta una identidad, la ecuación original también es una identidad y cada número real es una solución.

A primera vista, es probable que una ecuación no parezca lineal. Tal es el caso del siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2

Resolver: $a^2 - 5 = (a + 2)(a - 3) + 8$.

$$a^2 - 5 = a^2 - a - 6 + 8$$

$$a^2 - 5 = a^2 - a + 2$$

$$-5 = -a + 2$$

$$-7 = -a$$

$$7 = a$$

La solución es 7, lo cual puede comprobarse.

Ecuaciones con radicales

Si en una ecuación la variable aparece en un radicando, aquella recibe el nombre de **ecuación con radicales**. Es posible transformar algunas ecuaciones de este tipo en ecuaciones lineales. El primer paso consiste en el uso del siguiente teorema.

Teorema sobre potencias

Si a y b son dos expresiones algebraicas, y si $a = b$, entonces $a^n = b^n$, para cualquier número natural n .

Cuando se hace uso del teorema sobre potencias en una ecuación en que interviene una variable, la ecuación resultante puede tener más soluciones que la original. Por ejemplo, la ecuación

$$x = 4$$

tiene una sola solución, pero

$$x^2 = 16$$

tiene dos soluciones, 4 y -4. Así, al utilizar el teorema sobre potencias, todas las soluciones posibles *deben* comprobarse en la ecuación original. A las soluciones que no hacen válida a la ecuación se les llama **raíces extrañas** y tienen que ser descartadas.

Para resolver una ecuación que contiene radicales

1. Se despeja un radical en un lado de la ecuación.
2. En ambos lados de la ecuación se eleva a una potencia igual al índice de ese radical.
3. Se resuelve la ecuación. Si queda un radical, se repiten los pasos anteriores.
4. Se efectúa la comprobación de todas las soluciones posibles en la ecuación *original*.

EJEMPLO 3

Resolver: $\sqrt{x^2 + 5} - x + 5 = 0$

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 5} &= x - 5 \\ (\sqrt{x^2 + 5})^2 &= (x - 5)^2 \\ x^2 + 5 &= x^2 - 10x + 25 \\ 5 &= -10x + 25 \\ -20 &= -10x \\ 2 &= x\end{aligned}$$

Comprobación: $\sqrt{2^2 + 5} - 2 + 5 \stackrel{?}{=} 0$

$$\begin{aligned}\sqrt{9} - 2 + 5 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 3 - 2 + 5 &\neq 0\end{aligned}$$

La ecuación no tiene ninguna solución.

PRECAUCIÓN. Un error común en el que se incurre al resolver algunas ecuaciones con radicales consiste en elevar al cuadrado término por término en lugar de despejar al radical y elevar al cuadrado en ambos lados. Por ejemplo, para resolver

$$\sqrt{y + 3} - \sqrt{y - 2} = 1$$

es *incorrecto* elevar al cuadrado término por término y obtener

$$(y + 3) - (y - 2) = 1.$$

Se puede apreciar fácilmente que esta técnica no funciona si se considera un ejemplo numérico.

$$\sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$$

Sin embargo, $(\sqrt{9})^2 - (\sqrt{4})^2 = 9 - 4 = 5$, no 1^2 o 1.

La forma correcta de resolver este tipo de ecuación se muestra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4

Resolver: $\sqrt{y + 3} - \sqrt{y - 2} = 1$

$$\begin{aligned}\sqrt{y + 3} &= 1 + \sqrt{y - 2} \\ (\sqrt{y + 3})^2 &= (1 + \sqrt{y - 2})^2 \\ y + 3 &= 1 + 2\sqrt{y - 2} + y - 2 \\ 3 &= 2\sqrt{y - 2} + 1 \\ 4 &= 2\sqrt{y - 2} \\ 2 &= \sqrt{y - 2} \\ 4 &= y - 2 \\ 6 &= y\end{aligned}$$

Se despeja el radical $\sqrt{y + 3}$ y se eleva al cuadrado en ambos lados. Se simplifica y se despeja el radical $\sqrt{y - 2}$. Se eleva al cuadrado en ambos lados y se simplifica. Se despeja y y se verifica la solución.



$$\begin{aligned}\text{Comprobación: } \sqrt{6+3} - \sqrt{6-2} &\stackrel{?}{=} 1 \\ \sqrt{9} - \sqrt{4} &\stackrel{?}{=} 1 \\ 3 - 2 &= 1\end{aligned}$$

La solución es 6.

Ecuaciones con fracciones

A una ecuación que contiene una o más fracciones algebraicas se le denomina **ecuación con fracciones**. El procedimiento para eliminar o simplificar las fracciones consiste en multiplicar a ambos lados de la ecuación por el MCD de todas las fracciones. La ecuación resultante puede ser una ecuación lineal que se resuelve por medio de las técnicas anteriores.

Para resolver ecuaciones con fracciones

1. Se encuentra el MCD de todas las fracciones presentes en la ecuación.
2. En ambos lados de la ecuación se multiplica por el MCD para eliminar fracciones. Hay que asegurarse de haber multiplicado *todos* los términos.
3. Se resuelve esta ecuación.
4. Se comprueba la solución en la ecuación original para asegurarse de que el denominador no resulta igual a cero. Si esto ocurre, debe descartarse esa solución.

EJEMPLO 5

$$\text{Resolver: } \frac{x+2}{x-1} + \frac{3}{x} = 1$$

Como el MCD de la fracción es $x(x-1)$, se multiplica en ambos lados por esta expresión.

$$\begin{aligned}x(x-1)\left[\frac{x+2}{x-1} + \frac{3}{x}\right] &= x(x-1)[1] \\ x(x-1)\frac{x+2}{x-1} + x(x-1)\frac{3}{x} &= x(x-1) \\ x(x+2) + 3(x-1) &= x(x-1) \\ x^2 + 2x + 3x - 3 &= x^2 - x \\ 6x - 3 &= x^2 - x \\ 6x &= 3 \\ x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Comprobación: } \frac{+2}{-1} + \frac{3}{\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\begin{aligned}-\frac{2}{1} + \frac{3}{\frac{1}{2}} &\stackrel{?}{=} 1 \\ -2 + 6 &\stackrel{?}{=} 1 \\ 4 &\stackrel{?}{=} 1\end{aligned}$$

La solución es $\frac{1}{2}$.



PRECAUCIÓN Un error común consiste en confundir la suma o resta de fracciones algebraicas con la resolución de una ecuación con fracciones. Por ejemplo, compárense los dos problemas siguientes.

$$\text{Resolver } \frac{x+2}{x-1} + \frac{3}{x} = 1. \quad \text{Sumar } \frac{x+2}{x-1} + \frac{3}{x} + 1.$$

En cada caso, debe encontrarse el MCD de todas las fracciones; sin embargo, se utiliza de dos maneras muy diferentes. En el primer caso, puesto que se tiene una *ecuación*, puede multiplicarse a ambos lados por el MCD, $(x-1)$, para encontrar la solución numérica como en el ejemplo 5. En el segundo caso, se reescribe cada uno de los tres términos con el denominador correspondiente al MCD y luego se suman los numeradores.

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x-1} + \frac{3}{x} + 1 &= \frac{x(x+2)}{x(x-1)} + \frac{3(x-1)}{x(x-1)} + \frac{x(x-1)}{x(x-1)} \\ &= \frac{x(x+2) + 3(x-1) + x(x-1)}{x(x-1)} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 3x - 3 + x^2 - x}{x(x-1)} \\ &= \frac{2x^2 + 4x - 3}{x(x-1)} \end{aligned}$$

EJEMPLO 6

$$\text{Resolver: } \frac{y^2+9}{y^2-9} - \frac{y}{y-3} = \frac{3}{y+3}$$

En ambos lados se multiplica por el MCD de todas las fracciones, $(y-3)(y+3)$.

$$(y-3)(y+3) \left[\frac{y^2+9}{(y-3)(y+3)} - \frac{y}{y-3} \right] = (y-3)(y+3) \left[\frac{3}{y+3} \right]$$

Se eliminan corchetes y se dividen los factores comunes

$$\begin{aligned} y^2 + 9 - y(y+3) &= 3(y-3) \\ y^2 + 9 - y^2 - 3y &= 3y - 9 \\ -6y &= -18 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Comprobación: } \frac{y^2+9}{y^2-9} - \frac{y}{y-3} &\stackrel{?}{=} \frac{3}{y+3} \\ \frac{18}{0} - \frac{3}{0} &\stackrel{?}{=} \frac{3}{6} \end{aligned}$$

Puesto que la división entre cero no está definida, debe descartarse el 3. No hay solución alguna.

Ecuaciones con valores absolutos

A las ecuaciones en que intervienen valores absolutos, como

$$|x| = 4, \quad |3x-1| = 5, \quad \text{y} \quad |1-2x| = 0,$$

se les llama **ecuaciones con valores absolutos**. Para obtener la solución de una ecuación de este tipo, por ejemplo $|x| = 4$, es necesario resolver dos ecuaciones relacionadas ya que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Las dos ecuaciones a resolver son

$$x = 4 \quad \text{y} \quad -x = 4.$$

La segunda ecuación se convierte en $x = -4$, por lo que las dos ecuaciones son

$$x = 4 \quad \text{y} \quad x = -4,$$

llegándose asimismo a dos soluciones; 4 y -4.

EJEMPLO 7

Resolver:

a) $|3x - 1| = 5$

Deben resolverse las siguientes dos ecuaciones.

$$\begin{array}{ll} 3x - 1 = 5 & \text{y} \quad 3x - 1 = -5 \\ 3x = 6 & 3x = -4 \\ x = 2 & x = -\frac{4}{3} \end{array}$$

Las soluciones 2 y $-\frac{4}{3}$. Compruébese.

b) $|1 + 2x| = |x|$

La única manera de que los valores absolutos de dos expresiones puedan ser iguales es que las dos expresiones sean iguales o de signo opuesto. Así, debe resolverse

$$\begin{array}{ll} 1 + 2x = x & \text{o} \quad 1 + 2x = -x. \\ 1 = -x & 1 = -3x \\ -1 = x & -\frac{1}{3} = x \end{array}$$

Las soluciones son -1 y $-\frac{1}{3}$. Compruébese.

Ecuaciones literales

En una **ecuación literal** intervienen dos o más variables. Fórmulas como $P = 2l + 2w$ y $d = rt$ son ejemplos de ecuaciones literales. Recuérdese que las letras en una ecuación literal representan números. Todas las reglas que sirven para resolver ecuaciones en que participan números también son aplicables para la resolución de ecuaciones literales. En los siguientes ejemplos se muestra cómo se resuelve una ecuación numérica similar junto a cada ecuación literal, a fin de poner en claro los procedimientos de solución.

EJEMPLO 8

a) Resolver: $\sqrt{xy + z} = z$ para x .

$$\begin{aligned}
 \sqrt{xy + z} &= z \\
 (\sqrt{xy + z})^2 &= z^2 \\
 xy + z &= z^2 \\
 xy &= z^2 - z \\
 \frac{\cancel{xy}}{\cancel{y}} &= \frac{z(z - 1)}{y} \\
 x &= \frac{z(z - 1)}{y}
 \end{aligned}$$

Ejemplo numérico similar

$$\begin{aligned}
 \sqrt{3x + 7} &= 5 \\
 (\sqrt{3x + 7})^2 &= 5^2 \\
 3x + 7 &= 25 \\
 3x &= 18 \\
 \frac{\cancel{3x}}{\cancel{3}} &= \frac{18}{3} \\
 x &= 6
 \end{aligned}$$

b) Resolver: $\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ para r_1 .

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{R} &= \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \\
 Rr_1r_2\left(\frac{1}{R}\right) &= \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)Rr_1r_2 \\
 r_1r_2 &= Rr_2 + Rr_1 \\
 r_1r_2 - Rr_1 &= Rr_2 \\
 r_1(r_2 - R) &= Rr_2 \\
 \frac{r_1(\cancel{r_2} - R)}{\cancel{r_2} - R} &= \frac{Rr_2}{r_2 - R} \\
 r_1 &= \frac{Rr_2}{r_2 - R}
 \end{aligned}$$

Ejemplo numérico similar

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{5} &= \frac{1}{r_1} + \frac{1}{3} \\
 15r_1\left(\frac{1}{5}\right) &= \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{3}\right)15r_1 \\
 3r_1 &= 15 + 5r_1 \\
 3r_1 - 5r_1 &= 15 \\
 (3 - 5)r_1 &= 15 \\
 \frac{\cancel{3}r_1}{\cancel{-2}} &= \frac{15}{-2} \\
 r_1 &= -\frac{15}{2}
 \end{aligned}$$

2.1. Ejercicios

Resolver cada ecuación en los ejercicios 1-48.

1. $3y + 5 = 7 - y$
2. $4z - 3 = 3 - 2z$
3. $1.8x - 4.1 = 6.5 + 0.2x$
4. $2.5y - 6.1 = 7.4 + 1.3y$
5. $\frac{z}{2} + \frac{3}{8} - \frac{z}{4} = \frac{5}{4}$
6. $\frac{x}{5} + \frac{1}{10} - \frac{x}{2} = \frac{1}{20}$
7. $4(y + 2) = 7(3 - y)$
8. $5(z - 1) = 8(z + 2)$
9. $5 + 7x = 7x + 4$
10. $2(y - 1) = 4 + 2y$
11. $5 + 7z = 7z + 5$
12. $3(x - 5) = 3(1 + x) - 18$
13. $3y - (y - 2) = 8$
14. $5z - (1 - z) = 11$
15. $2(3x - 2) - 2(4x + 3) = 4$
16. $4(2y - 1) - (3y + 2) = 0$
17. $z^2 + 2 = (z - 1)(z + 1) + z$
18. $(3y + 2)(y - 1) = (y - 4)(3y + 5)$
19. $2[z - (1 - 3z)] = 2(3 + 2z)$
20. $5[2a - (3 - a)] = 5(a + 3)$
21. $3\sqrt{2z - 5} - \sqrt{z + 23} = 0$
22. $\sqrt{5a - 1} - 2\sqrt{a + 1} = 0$
23. $\sqrt{x^2 + 8} - x - 4 = 0$
24. $\sqrt{9y^2 + 5} + 3y - 1 = 0$
25. $\sqrt{z - 4} + \sqrt{z - 8} = -2$
26. $\sqrt{a + 5} + \sqrt{a - 16} = -1$
27. $\sqrt{2x + 10} - \sqrt{2x - 5} = 3$
28. $\sqrt{9 - y} - \sqrt{18 - y} = -1$
29. $\frac{z - 2}{z + 1} = \frac{z}{z - 3}$
30. $\frac{a + 1}{a + 2} = \frac{a + 2}{a - 1}$

31. $\frac{2x}{x-3} - \frac{3}{x+4} = 2$ 32. $\frac{2y}{2y-1} - \frac{6}{y+5} = 1$ 33. $\frac{3}{z+5} - \frac{2}{z-2} = \frac{4}{z^2+3z-10}$
34. $\frac{5}{a-3} - \frac{3}{a+3} = \frac{7}{a^2-9}$ 35. $\frac{x}{x+4} = \frac{4}{x-4} + \frac{x^2+16}{x^2-16}$
36. $\frac{2y}{2y+3} = \frac{8y^2+12}{4y^2-9} + \frac{2y}{3-2y}$ 37. $\frac{1}{z^2-z-2} - \frac{3}{z^2-2z-3} = \frac{1}{z^2-5z+6}$
38. $\frac{2}{a^2+a-6} = \frac{2}{a^2-3a+2} - \frac{1}{a^2+2a-3}$ 39. $|x+1| = 3$
40. $|x-1| = -2$ 41. $|y+2| = 0$ 42. $|5-2z| = 13$
43. $|x+3| = |2x-1|$ 44. $|3y+2| = |y|$ 45. $|z| = z+1$
46. $|1-3x| = 2-x$ 47. $|y-1| = y-1$ 48. $|z+1| = z+1$

En los ejercicios 49-54 hay que resolver la ecuación literal para la variable indicada. Supóngase que todas las expresiones están definidas de modo que se eviten la división entre cero y los números negativos bajo los radicales.

49. $3a+2b=5c$ para a 50. $3uvw=p$ para v
51. $\sqrt{\frac{x}{y}}=z$ para y 52. $xy=w-y$ para y
53. $\sqrt{a+b}+\sqrt{b}=\sqrt{c}$ para a 54. $1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ para x

Resolver en los ejercicios 55-62 la fórmula para la variable indicada.

55. $A = \frac{1}{2}(b_1+b_2)h$ para h (fórmula para el área de un trapecio)
56. $S = 2ab + 2ac + 2bc$ para a (fórmula para el área total de un sólido rectangular)
57. $A = P(1+rt)$ para r (fórmula para el interés simple)
58. $C = \frac{5}{9}(F-32)$ para F (fórmula para conversión de temperatura)
59. $\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ para r_2 (fórmula para la resistencia en un circuito eléctrico)
60. $\frac{1}{f} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}$ para f (fórmula para la distancia focal)
61. $h = \frac{1}{2}gt^2 + vt$ para g (fórmula para la altura de un objeto en caída libre)
62. $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$ para h (fórmula para el área de un cilindro)

En los ejercicios 63-66 primero se trata de resolver la ecuación para la incógnita sin hacer cálculo alguno. Luego se emplea una calculadora para simplificar la respuesta y se redondea ésta a tres lugares decimales. Se almacenan todos los resultados en la memoria de la calculadora y no se hace el redondeo sino hasta el paso final.

63. $9.328(y+12.465) = 2.003(4.135-y)$ 64. $z^2 + 6.557 = (z-4.055)^2$
65. $2\sqrt{x^2-4.25} - 2x + 2.8 = 0$ 66. $\frac{a}{1.035} - \frac{a}{0.541} = 1\,000$

En los ejercicios 67-68 hay que encontrar un valor de m de modo que las ecuaciones sean equivalentes.

67. $3x-m=x+8$ y $7(x-1)=23+x$
68. $6x+7=m+1$ y $3(x-5)=5(2x-3)$

En los ejercicios 69-70 hay que encontrar un valor de n de modo que cada una de las ecuaciones tenga sólo la solución -5 .

69. $\frac{10}{x} + \frac{15}{x} = n-3$ 70. $\sqrt{x+9} = n+1$

71. ¿Son equivalentes las ecuaciones $a = 9$ y $\sqrt{a} + 3 = 0$?
72. ¿Son equivalentes las ecuaciones $x = 5$ y $\frac{1}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{5}{x^2 - 5x}$?

Para repasar:

En los ejercicios 73-75 debe simplificarse cada expresión y escribirse sin exponentes negativos.

73. $(b^{-4})^{-3}$

74. $(3y)^{-1}$

75. $3y^{-1}$

Encontrar cada producto en los ejercicios 76-77.

76. $(6u - v)(4u + v)$

77. $(-4uv + 5)(6u^2v^2 + 7uv - 3)$

Realizar las operaciones indicadas en los ejercicios 78-79.

78. $\frac{2x^2 + x - 15}{x^2 - x - 12} \div \frac{2x^2 + 3x - 20}{16x - x^3}$

79. $\frac{5 - x}{x^2 - 12x + 35} + \frac{x}{x^2 - 14x + 49}$

80. Después de simplificar $\sqrt{\frac{125a^5b^{-2}}{4a^{-2}b^{-6}}}$, racionalizar el denominador suponiendo que a y b son positivos.

2.2. APLICACIONES DE LAS ECUACIONES Y DESIGUALDADES

Los problemas de aplicación por lo general se expresan con palabras, no mediante símbolos matemáticos. En la resolución algebraica de tales problemas intervienen dos pasos. Primero, deben traducirse las palabras del problema a símbolos, que luego se usan para escribir una ecuación algebraica que describa el problema. Segundo, se resuelve la ecuación resultante.

El valor de la incógnita puede representarse por una variable. A continuación se muestra una expresión típica y su traducción algebraica:

Su salario	con el aumento de	5%	de su salario	es	\$12,600.
\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow
s	$+$	(0.05)	\cdot	s	$= 12\,600$

Es probable que esta oración provenga de un problema como éste:

María gana actualmente un salario de 12 600 dólares. Si recibió un aumento del 5% el año pasado, ¿cuál era su salario anterior?

Aunque en realidad no hay un método fijo que funcione en todos los problemas de aplicación, su resolución será más fácil si se siguen estos pasos:

- Paso 1. Se lee el problema para determinar qué cantidad (o cantidades) se deben encontrar.
- Paso 2. Se representa el valor (o valores) de la(s) incógnita(s) simbólicamente con una letra, y se escribe "*Sea $x =$ descripción de la incógnita.*"
- Paso 3. Se hace un bosquejo o diagrama cuando sea posible.
- Paso 4. Se determina qué expresiones son iguales y se escribe una ecuación.
- Paso 5. Se resuelve la ecuación, y luego *se enuncia la respuesta del problema.*
- Paso 6. Se comprueba la respuesta, cerciorándose de que se hayan satisfecho las condiciones del problema original y de que la respuesta parezca razonable.

Con el objeto de ilustrar las técnicas de resolución de problemas, se empezará presentando un ejemplo básico que comprende números.

EJEMPLO 1

La suma de tres enteros pares consecutivos es 72. ¿Cuáles son estos enteros?

Conviene recordar que los enteros pares consecutivos son enteros pares que aparecen escritos en forma consecutiva en un orden de conteo regular.

Sea x = el primer entero par,
 $x + 2$ = el segundo entero par consecutivo,
 $x + 4$ = el tercer entero par consecutivo.

$$x + (x + 2) + (x + 4) = 72$$

$$3x + 6 = 72$$

$$3x = 66$$

$$x = 22$$

$$x + 2 = 24$$

$$x + 4 = 26$$

Así, los enteros son 22, 24 y 26, se comprueba al sumar.

EJEMPLO 2**Administración**

¿A cuánto ascendieron las ventas totales en las que Luis recibió una comisión de 692 dólares, si la tasa de comisión era del 8%?

La comisión recibida está dada por

$$\text{comisión} = (\text{tasa de comisión}) \cdot (\text{ventas totales}).$$

Sea x = ventas totales de Luis. Por consiguiente, debe resolverse

$$692 = (0.08)x.$$

$$\frac{692}{0.08} = x$$

$$8\,650 = x$$

Así, las ventas totales de Luis ascendieron a \$8 650.

EJEMPLO 3**Geometría**

El segundo ángulo de un triángulo es seis veces más grande que el primer ángulo. Si el tercer ángulo es 45° más grande que dos veces el primero, ¿cuál es la medida de cada ángulo?

Se hace un bosquejo del triángulo como en la figura 1.

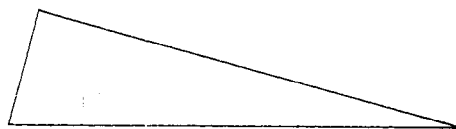


Figura 1

Sea $x =$ la medida del primer ángulo,
 $6x =$ la medida del segundo ángulo,
 $2x + 45 =$ la medida del tercer ángulo.

$$x + 6x + (2x + 45) = 180 \quad \text{suma de los ángulos de un triángulo}$$

$$9x + 45 = 180$$

$$9x = 135$$

$$x = 15$$

$$6x = 90, \quad 2x + 45 = 75$$

Las medidas son 15° , 90° , y 75° .

Considérese ahora el siguiente ejemplo. Jaime es capaz de hacer cierto trabajo en 3 horas y David puede hacer el mismo trabajo en 7 horas. ¿Cuánto tiempo les tomaría realizar el trabajo si lo hicieran juntos?

A este tipo de problema suele llamársele *problema de trabajo*, y deben recordarse tres principios importantes.

1. El tiempo requerido para hacer un trabajo cuando dos individuos trabajan juntos debe ser menor que el tiempo requerido por el trabajador más rápido para completar el trabajo solo. El tiempo requerido trabajando juntos no es el promedio de los dos tiempos.
2. Si un trabajo puede hacerse en t horas, en 1 hora puede completarse $\frac{1}{t}$ del trabajo. Por ejemplo, puesto que Jaime puede hacer el trabajo en 3 horas, en 1 hora él podría hacer $\frac{1}{3}$ del trabajo.
3. El trabajo hecho por Jaime en 1 hora más el trabajo hecho por David en 1 hora es igual al trabajo hecho por ambos en 1 hora. Así, si t es el tiempo requerido para completar el trabajo trabajando juntos,

$$\begin{aligned} &(\text{cantidad que Jaime hace en 1 hora}) + (\text{cantidad que David hace en 1 hora}) \\ &= (\text{cantidad hecha por ambos en 1 hora}), \text{ lo cual se traduce en} \\ &\frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

Al multiplicar en ambos lados por el MCD, se obtiene $21t$,

$$21t \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7} \right) = 21t \left(\frac{1}{t} \right)$$

$$7t + 3t = 21$$

$$10t = 21$$

$$t = \frac{21}{10}$$

Si trabajaran juntos, a Jaime y David les tomaría $21/10$ horas (2 horas y 6 minutos) completar el trabajo.

EJEMPLO 4

Movimiento

Dos automóviles salen del mismo punto y viajan en direcciones opuestas. El segundo auto viaja 15 km/h más rápido que el primero, y después de 3 horas están apartados 465 km uno del otro. ¿A qué velocidad está viajando cada automóvil?

La distancia d que un objeto recorre en un tiempo t , dado a una velocidad constante o uniforme r , está dada por la siguiente fórmula.

$$(\text{distancia}) = (\text{velocidad}) \cdot (\text{tiempo})$$

Sea d_1 = la distancia en km que el primer auto recorre,
 r = la velocidad en km/h del primer auto,
 d_2 = la distancia en km que el segundo auto recorre, y
 $r + 15$ = la velocidad en km/h del segundo auto.

$$\overbrace{\quad \quad \quad}^{\bullet} \\ 465 = d_1 + d_2$$

Figura 2

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 &= 465 \\ 3r + 3(r + 15) &= 465 \\ 3r + 3r + 45 &= 465 \\ 6r &= 420 \\ r &= 70 \\ r + 15 &= 85 \end{aligned}$$

El primer automóvil está viajando a 70 km/h, y el segundo a 85 km/h.

EJEMPLO 5

Movimiento

La velocidad de la corriente de un río es 4 mi/h. Un bote recorre 48 millas aguas arriba en el mismo tiempo en que recorre 72 millas aguas abajo. ¿Cuál es la velocidad del bote en el agua tranquila?

Sea x = la velocidad del bote en el agua tranquila,
 $x + 4$ = la velocidad del bote cuando viaja aguas abajo,
 $x - 4$ = la velocidad del bote cuando viaja aguas arriba,

$$\frac{72}{x + 4} = \text{el tiempo del viaje aguas abajo} \left(t = \frac{d}{r} \right),$$

$$\frac{48}{x - 4} = \text{el tiempo del viaje aguas arriba.}$$

$$\begin{aligned} \frac{72}{x + 4} &= \frac{48}{x - 4} \\ \frac{72}{\cancel{x} + 4} &= \frac{48}{\cancel{x} - 4} \\ 72(x - 4) &= 48(x + 4) \\ 72x - 288 &= 48x + 192 \\ 24x &= 480 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

La velocidad del bote en agua tranquila es de 20 mi/h.

Aplicaciones de proporciones

La **razón** de un número a con respecto a otro número b es la fracción $\frac{a}{b}$. Una **proporción** es una ecuación que establece que dos razones son iguales. En la proporción

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

al primer término, a , y al cuarto término, d , se les llama **extremos** de la proporción. El segundo término, b , y el tercero, c , son los **medios**. Si el segundo término es igual al tercero, como en

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c},$$

b se le llama **medio proporcional** entre a y c . Cuando uno o más términos de una proporción contienen una variable, una forma rápida de resolver la ecuación es transformarla en la ecuación de productos cruzados. Por ejemplo, la ecuación de productos cruzados para

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{es} \quad ad = bc.$$

EJEMPLO 6

Si un hombre cuya estatura es de 6 ft a la luz del sol proyecta una sombra de 14 ft de largo, mientras que un poste proyecta una sombra de 35 ft de largo, ¿cuál es la altura del poste?

Se hace un bosquejo, como en la figura 3.

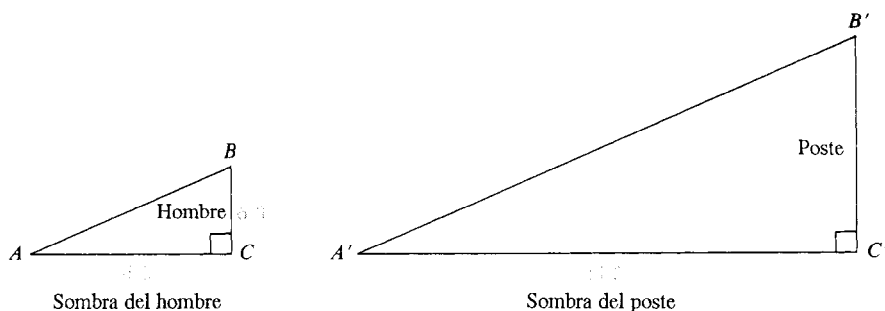


Figura 3. Triángulos semejantes.

Supongamos que $\angle ACB = \angle A'C'B' = 90^\circ$ (un ángulo recto). Ya que ambas mediciones se tomaron al mismo tiempo, los rayos del sol forman el mismo ángulo con respecto al suelo; es decir, $\angle BAC = \angle B'A'C'$. Así, $\triangle ABC$ es semejante al $\triangle A'B'C'$ (los ángulos correspondientes son iguales), lo cual hace que los lados correspondientes sean proporcionales. Así,

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}.$$


$$\frac{14}{35} = \frac{6}{x}$$

$$\text{Multiplicando los dos lados por } 35x$$



$$14x = 35 \cdot 6 \quad \text{Ecuación de productos cruzados}$$

$$x = \frac{35 \cdot 6}{14} = 15$$

El poste tiene una altura de 15 ft. 

RESEÑA. Al resolver problemas de aplicación no es conveniente tomar atajos ni intentar retener en la memoria demasiada información acerca del problema. Redactar con claridad y detalle las descripciones de las variables, como muestran los ejemplos, ahorrará tiempo a largo plazo y proporcionará organización al trabajo.

Esta sección concluye con la resolución del primero de los dos problemas presentados en la introducción al capítulo 2.

EJEMPLO 7

Ecología


Un guardabosques desea estimar el número de truchas que hay en un lago. Captura 200 peces, les marca una aleta y los regresa al lago. Después de un periodo durante el cual los peces marcados se mezclan con la población total, atrapa otra muestra de 200 peces y descubre que tres de ellos tienen las marcas. Utilícese una proporción para estimar el número de truchas que hay en el lago.

La clave para resolver este problema es la proporción:

$$\frac{\text{número total de truchas marcadas}}{\text{número total de truchas en el lago}} = \frac{\text{número de truchas marcadas en la muestra}}{\text{número de truchas en la muestra}}$$

Sea $x =$ el número total de truchas en el lago. Sustituyendo en la proporción de arriba se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{200}{x} &= \frac{3}{200} \\ (200)(200) &= 3x \\ 13\,333.\bar{3} &= x \end{aligned}$$

Así, hay aproximadamente 13 333 truchas en el lago. 

2.2. Ejercicios

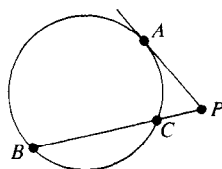
Resolver:

1. Si a cinco veces un número se le quita siete, el resultado es 10 más dos veces el número. ¿Cuál es el número?
2. Si a dos veces la suma de un número y cinco se le agrega dos, el resultado es 26 veces el número. ¿Cuál es el número?
3. La suma de tres enteros impares consecutivos es cuatro veces el primero menos 29. ¿Cuáles son los enteros?
4. La suma de cuatro enteros consecutivos es ocho más tres veces el más grande. ¿Cuáles son los enteros?
5. **Educación.** Si Jorge Ortiz obtuvo 61, 89 y 86 en tres pruebas, ¿cuánto debe obtener en una cuarta prueba para tener un promedio de calificaciones de 80?
6. **Deportes.** Tres de los cuatro delanteros del equipo de futbol del Estado de Arkansas pesan 256 lb, 240 lb y 242 lb. Si el peso promedio de la línea delantera es de 249.5 lb, ¿cuánto pesa el cuarto delantero?
7. **Edad.** Si Samuel tiene el doble de la edad de Humberto y la suma de sus edades más 28 es cinco veces la edad de Humberto, ¿cuál es la edad de cada uno?
8. **Construcción.** Una tabla mide 23 pies de largo. Se va a cortar en tres piezas de modo que la segunda pieza mida el doble que la primera y la tercera mida tres pies más que la segunda. ¿Cuál es la longitud de cada pieza?



9. El numerador de una fracción es cinco unidades menor que el denominador. Si se les suman tres unidades tanto al numerador como al denominador, el resultado es igual a $\frac{2}{3}$. ¿Cuál era la fracción original?
10. El denominador de una fracción es seis unidades menor que el numerador. Si al denominador se le aumenta uno, el resultado es igual a $\frac{1}{2}$. ¿Cuál era la fracción original?
11. **Consumo.** Si la tasa de impuesto en West, Texas, es del 4%, ¿a cuánto asciende el impuesto en una compra de 52.50 dólares?
12. **Deportes.** Un mariscal de campo de fútbol completó 27 pases en 45 intentos. ¿Cuál fue su porcentaje de pases completos?
13. **Administración.** Si María recibió un aumento del 12% y gana ahora 25 760 dólares anuales, ¿cuál era su salario antes del aumento?
14. **Menudeo.** Un minorista compró un aparato estereofónico en 285 dólares y lo puso a la venta con un margen de ganancia bruta del 70%. ¿Cuál fue el precio del aparato?
15. **Economía.** El lunes un inversionista compró 100 acciones de capital comercial. El martes, el valor de las acciones subió 6%, y el miércoles el valor cayó 5%. ¿Cuánto pagó el inversionista por las 100 acciones el lunes, si las vendió el miércoles a 1 460.15 dólares?
16. **Demografía.** La población de un pueblo aumentó 4% durante un año, y luego disminuyó 7% al año siguiente. ¿Cuál era la población original si había 2 418 habitantes en el pueblo al final de esos dos años?
17. **Geometría.** El primer ángulo de un triángulo es 5° mayor que tres veces el segundo, y el tercer ángulo es 10° menor que el segundo. ¿Cuál es la medida de cada ángulo?
18. **Geometría.** Si dos ángulos son **suplementarios** (sus medidas suman 180°), y el segundo es 30° menor que dos veces el primero, ¿cuál es la medida de cada ángulo?
19. **Agricultura.** El perímetro de un campo de trigo rectangular es 1 760 m. El largo mide 40 m más que el ancho. ¿Cuáles son las dimensiones del campo?
20. **Geometría.** Un triángulo isósceles tiene dos lados iguales llamados *catetos* y un tercer lado llamado *base*. Si cada cateto de un triángulo isósceles es 2 m menor que tres veces la base, y el perímetro es 31 m, ¿cuál es la longitud de cada cateto y la longitud de la base?
21. **Construcción.** Jerónimo puede construir un cobertizo en 8 días, y Beltrán puede hacer el mismo trabajo en 9 días. Con una aproximación de décimas de día, ¿cuánto tiempo les tomaría construir el cobertizo si trabajaran juntos?
22. **Manufactura.** Si una máquina construida en 1975 es capaz de producir 100 unidades en 25 horas mientras que una máquina construida este año puede producir 100 unidades en 20 horas, con una aproximación de décimas de día, ¿cuánto tiempo tomaría producir 100 unidades si las máquinas trabajaran juntas?
23. Si Guillermo y Marco trabajan juntos pueden terminar una obra en 18 minutos, y si Guillermo requiere de 42 minutos trabajando solo, ¿cuánto tiempo le tomaría a Marco hacer el trabajo solo?
24. **Deportes.** Si Mike Nesbitt, preparador físico de la NAU, puede asegurar con cinta los tobillos de un equipo en 30 minutos, y con ayuda de un estudiante el trabajo toma 20 minutos, ¿cuánto tiempo le tomaría al estudiante hacer el trabajo solo?
25. **Agricultura.** Una llave de cuatro pulgadas (in) puede llenar una represa de riego en 25 días, una llave de seis pulgadas puede llenarla en 10 días y una llave de nueve pulgadas lo hace en cinco días. ¿Cuánto tiempo tomaría llenar la represa si las tres llaves estuvieran abiertas a la vez? (La respuesta debe darse y se redondea a un décimo de día.)
26. Si Susana es capaz de hacer un trabajo en 12 horas, Lázaro puede hacer el mismo trabajo en 16 horas y Eva requiere de 20 horas para hacerlo, ¿cuánto tiempo les tomaría hacer el trabajo juntos? (La respuesta debe darse y se redondea a un décimo de hora.)
27. **Recreación.** Una pequeña piscina puede llenarse mediante una llave de entrada en dos horas. Y puede vaciarse por medio de una llave de desagüe en 10 horas. Si las dos llaves se abrieran simultáneamente, ¿en cuánto tiempo se llenaría la piscina vacía?

28. **Agricultura.** Un transportador de granos puede llenar un silo en dos días. Si toma tres días vaciar el silo a carros de ferrocarril, ¿cuánto tiempo tomaría llenar un silo vacío si ambas compuertas se abrieran simultáneamente?
29. **Aeronáutica.** Dos aviones despegan al mismo tiempo de un aeropuerto; uno viaja hacia el este y el otro hacia el oeste. Uno vuela 50 mi/h más rápido que el otro. Después de tres horas están alejados 3 030 millas uno del otro. ¿A qué velocidad está viajando cada avión?
30. **Movimiento.** Dos familias acuerdan encontrarse en Boise, Idaho, para una reunión. Ambas familias salen a las 8:00 A.M., una viaja 10 mi/h más rápido que la otra, y se encuentran en Boise exactamente al mediodía. Si la distancia total que recorrieron fue de 480 millas, ¿a qué velocidad viajó cada familia?
31. **Aeronáutica.** Un avión vuela 480 mi con el viento a favor y 330 mi con el viento en contra en el mismo tiempo. Si la velocidad del avión sin viento es de 135 mi/h, ¿cuál es la velocidad del viento?
32. **Aeronáutica.** Un avión vuela 1 160 km con el viento a favor y 840 km con el viento en contra en el mismo tiempo. Si la velocidad del viento es de 40 km/h, ¿cuál es la velocidad de un avión en aire sin viento?
33. **Comunicaciones.** Dos prensas imprimen 31 500 volantes. Si sus tasas de producción difieren en 30 volantes por minuto, ¿cuál es la tasa de cada una si ambas trabajan 210 minutos para completar el trabajo?
34. **Manufactura.** Una máquina construida en 1970 tiene una tasa de producción de 20 unidades por hora menos que una máquina hecha en 1985. Si ambas se conectan al mismo tiempo y producen 1 120 unidades en ocho horas, ¿cuál es la tasa de producción de cada una?
35. **Construcción.** Si un rollo de 150 pies de cable eléctrico pesa 45 libras, ¿cuánto pesará un rollo de 270 pies del mismo cable?
36. **Química.** Un químico desea hacer una solución con ácido clorhídrico concentrado y agua destilada de modo que la razón del ácido con respecto al agua sea de 7:3. Si comienza con 21 litros de ácido, ¿qué volumen de agua debería agregar al ácido?
37. Un muchacho con una estatura de 5 ft proyecta una sombra de 12 ft de largo al mismo tiempo que una torre proyecta una sombra de 252 ft de largo. ¿Cuál es la altura de la torre?
38. **Geometría.** Dados dos triángulos semejantes, los lados de uno miden 6 in, 7 in y 12 in. Si el lado más corto del otro mide 18 in, ¿cuál es la medida de los otros dos lados?
39. ¿Cuáles el medio proporcional entre 25 y 9?
40. ¿Cuál es el medio proporcional entre 36 y 4?
41. Al cuarto término de una proporción se le llama **cuarto proporcional** con respecto al primero, segundo y tercer términos. ¿Cuál es el cuarto proporcional con respecto a 20, -12 y -5?
42. ¿Qué número debe sumarse a cada uno de 20, 8, 32 y 14 para dar cuatro números que sean proporcionales en ese orden?
43. **Educación.** En una clase de 40 alumnos, la razón de niños con respecto a las niñas es de 5:3. Después de la primera prueba, un cierto número de niños desertó de la clase, con lo que la razón de niños con respecto a niñas quedó en 7:5. ¿Cuántos niños desertaron?
44. **Geometría.** Si se traza una tangente PA y una secante PB en un círculo desde un punto externo, la longitud de la tangente es la media proporcional entre la longitud de la secante y su segmento externo PC . ¿Cuál es la longitud de la tangente si la secante mide 49 cm y su segmento externo mide 4 cm?



- 45. Música.** Las notas musicales en una cuerda mayor tienen frecuencias con la razón de 4 a 5 a 6. Si la primera nota de una cuerda tiene una frecuencia de 264 hertz (Hz), ¿cuáles son las frecuencias de las otras dos notas?
- 46. Planimetría.** Un poste está clavado en el fondo de un lago. Las razones de la longitud del poste por encima del agua con respecto a la longitud dentro del agua con respecto a la longitud en la arena del fondo del lago son de 3 a 4 a 2. Si 40 pies del poste están bajo el agua, ¿qué longitud está fuera del agua y qué longitud está en la arena?
- 47. Inversión.** Lucía Arnott invirtió 12 000 dólares en una cuenta que paga 12% de interés simple. ¿Cuánto dinero adicional debe invertirse en una cuenta que paga 15% de interés simple para que el rendimiento promedio de las dos inversiones sea del 13%?
- 48. Recreación.** Con el fin de equilibrar un sube y baja, el peso del primer niño por su distancia desde el fulcro (el punto de apoyo de la tabla) debe ser igual al peso del segundo niño por su distancia desde el fulcro. Si un niño que pesa 85 libras está a 6 ft del fulcro, ¿qué tan lejos del fulcro debe estar el segundo niño para equilibrar el sube y baja, si pesa 51 libras?
- 49. Navegación.** Un bote pequeño que viaja a 20 nudos (un nudo es igual a una milla náutica por hora) está a 15 millas náuticas de una isla cuando una lancha guardacostas inicia su persecución en el mismo curso, viajando a 30 nudos. ¿Cuánto tiempo le tomará al guardacostas dar alcance al bote?
- 50. Geometría.** La altura de un triángulo rectángulo apoyado sobre la hipotenusa es la media proporcional de las longitudes de los dos segmentos en que queda dividida la hipotenusa al trazar la altura. ¿Cuál es la altura del triángulo rectángulo si tales segmentos de la hipotenusa miden 9 pulgadas y 16 pulgadas de longitud?

Para repaso

Resolver:

$$51. \sqrt{4a^2 + 8} - 2a - 4 = 0$$

$$52. \frac{7}{x-6} + \frac{5}{x-8} = \frac{2}{x^2 - 14x + 48}$$

$$53. |6 - 5z| = 1$$

$$54. S = \frac{a_n}{1-r} \quad \text{para } r$$

Factorizar y mostrar que cada expresión en los ejercicios 55-56 es un cuadrado perfecto.

$$55. x^2 - 12x + 36$$

$$56. x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$$

En los ejercicios 57-58, calcular $\sqrt{b^2 - 4ac}$ para los valores dados de a , b y c .

$$57. a = -1, b = 5, \text{ y } c = 4$$

$$58. a = 2, b = -3, \text{ y } c = -1$$

2.3. ECUACIONES CUADRÁTICAS

En el capítulo 1 se expuso una propiedad importante del sistema de los números reales que establece que si $a = 0$ o $b = 0$, entonces $ab = 0$. Lo inverso de esta propiedad, enunciado en el siguiente teorema, también es verdadero.

Regla del producto nulo

Si a y b representan dos números reales y $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Supóngase que $ab = 0$. Entonces o bien $a = 0$ o $a \neq 0$. Si $a = 0$, entonces el teorema está probado. Por otro lado, si se supone que $a \neq 0$, entonces $1/a$ está definido. Se multiplica en ambos lados de $ab = 0$ por $1/a$, de lo que resulta $b = 0$. Por consiguiente, el teorema es verdadero.

Solución por factorización

La regla del producto nulo puede aplicarse para resolver ecuaciones que, aunque no sean lineales, pueden reducirse a dos ecuaciones lineales. Por ejemplo, si

$$(x - 2)(x + 3) = 0$$

entonces es posible igualar cada factor en el producto a cero, para luego proceder a resolver las ecuaciones resultantes.

$$\begin{array}{ccc} x - 2 = 0 & \text{o} & x + 3 = 0 \\ x = 2 & & x = -3 \end{array}$$

Así, las soluciones son 2 y -3 . De haberse comenzado con la ecuación

$$x^2 + x - 6 = 0,$$

podría haberse procedido a factorizar el lado izquierdo, obteniendo

$$(x - 2)(x + 3) = 0,$$

y al continuar con el procedimiento apenas expuesto, se habría resuelto una *ecuación cuadrática*. A una ecuación que puede escribirse en la forma

donde x es la variable y a , b y c son números reales constantes con $a \neq 0$, se le llama **ecuación cuadrática** o **ecuación de segundo grado**. Si $a = 0$, se perdería el término x^2 y se tendría la ecuación lineal $bx + c = 0$. A la expresión $ax^2 + bx + c = 0$ se le denomina la **forma general de la ecuación cuadrática** y, por lo general, conviene escribir toda ecuación cuadrática en esta forma antes de intentar resolverla. Los ejemplos siguientes ilustran la técnica de solución de una ecuación cuadrática por el **método de factorización**.

EJEMPLO 1

Resolver:

a) $3x^2 - 3x = 18$

$$3x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$(x^2 - x - 6) = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 2 = 0$$

$$x = 3$$

$$x = -2$$

Se divide entre 3 y se reorganiza:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$$

Se iguala a 0:

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

Las soluciones son 3 y -2 . Para comprobar se sustituyen estos valores en la ecuación original.

$$\text{b)} \quad x^2 + 6x = 0$$

$$x(x + 6) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{or} \quad x + 6 = 0$$

$$x = -6$$

Las soluciones son 0 y -6 . Compruébese.

Nota: En el ejemplo 1 b), no debe dividirse entre x a ambos lados de la ecuación, o se perderá la solución $x = 0$. Siempre que una ecuación cuadrática carezca del término constante ($c = 0$), una solución es 0.

EJEMPLO 2

Resolver:

$$-4x^2 + 2x = \frac{1}{4}$$

$$-4x^2 + 2x - \frac{1}{4} = 0$$

$$16x^2 - 8x + 1 = 0$$

$$(4x - 1)(4x - 1) = 0$$

$$4x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad 4x - 1 = 0$$

$$4x = 1 \quad 4x = 1$$

$$x = \frac{1}{4} \quad x = \frac{1}{4}$$

Hay una solución solamente, $\frac{1}{4}$. Compruébese.

Cuando las dos ecuaciones lineales obtenidas al usar la regla del producto nulo tienen la misma solución, como en el ejemplo 2, a la solución se le llama **raíz doble** o **raíz de multiplicidad dos**.

Solución por extracción de raíces

Si en una ecuación cuadrática $b = 0$, la ecuación no tiene término lineal y adquiere la forma:

$$ax^2 + c = 0.$$

Si a ambos lados de la ecuación se resta c y luego se divide entre a (recuérdese que $a \neq 0$), se obtiene

$$x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Supóngase que $d = -\frac{c}{a}$. Entonces la ecuación dada se vuelve:

$$x^2 = d.$$

Al sacar raíz cuadrada de ambos lados, considerando que $\sqrt{x^2} = |x|$, se tiene:

$$|x| = \sqrt{d}.$$

Puesto que $|x| = x$ si $x \geq 0$ y $|x| = -x$ si $x < 0$, esta ecuación puede expresarse como dos ecuaciones:

$$x = \sqrt{d} \quad \text{y} \quad x = -\sqrt{d},$$

lo que con frecuencia se escribe de manera más compacta como:

$$x = \pm \sqrt{d}.$$

Por consiguiente, las dos soluciones de la ecuación original son \sqrt{d} y $-\sqrt{d}$. Si $d \geq 0$, entonces las soluciones son números reales. El caso en que $d < 0$ se tratará en la sección 2.6. Debe observarse que $d \geq 0$ siempre que c y a tienen signos opuestos. A este método, que se ilustra en el ejemplo siguiente, se le llama **método de raíz cuadrada**.

EJEMPLO 3

Resolver: $4y^2 - 5 = 0$

$$\begin{aligned} 4y^2 &= 5 \\ y^2 &= \frac{5}{4} \\ y &= \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \\ y &= \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Así, las soluciones son $\sqrt{5}/2$ y $-\sqrt{5}/2$. Nótese que en este caso $4y^2 - 5$ no puede factorizarse de la manera habitual con coeficientes enteros.

Solución por completación de cuadrados

Factorizar y sacar raíces son los métodos más fáciles y mejores para resolver muchas ecuaciones cuadráticas. Sin embargo, como no es posible resolver algunas ecuaciones cuadráticas con estas técnicas, deben encontrarse métodos alternativos.

Considérese la ecuación

$$(x + 2)^2 = 3.$$

Si se extiende el método por extracción de raíces y se saca raíz cuadrada a ambos lados,

$$\begin{aligned} x + 2 &= \pm \sqrt{3} \\ x &= -2 \pm \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Esto origina dos soluciones: $-2 + \sqrt{3}$ y $-2 - \sqrt{3}$. Ahora, si suponemos que el término elevado al cuadrado se escribe en el lado izquierdo de la ecuación original, entonces ponemos el resultado en la forma general de la ecuación cuadrática:

$$x^2 + 4x + 4 = 3$$

$$x^2 + 4x + 1 = 0 \quad \text{No se puede resolver.}$$

Si se hubiera empezado con esta ecuación cuadrática, ¿qué procedimiento podría seguirse para llegar a la ecuación considerada previamente, $(x + 2)^2 = 3$, y luego obtener las dos soluciones? El procedimiento a seguir, llamado **método de completar el cuadrado**, se ilustra a continuación.

$$x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x^2 + 4x = -1$$

Se suma a cada miembro la mitad del cuadrado del coeficiente de x .

$$x^2 + 4x + (2)^2 = -1 + (2)^2$$

$$x^2 + 4x + 4 = 3$$

Se simplifica.

$$(x + 2)^2 = 3$$

El binomio cuadrado se simplifica a raíz cuadrada.

Generalizando lo anterior, considérese la ecuación

$$(x + d)^2 = x^2 + 2dx + d^2.$$

En la expresión $x^2 + 2dx + d^2$, el coeficiente de x es $2d$. Si sólo se tiene $x^2 + 2dx$, puede completarse el cuadrado tomando la mitad del coeficiente de x , $1/2 \cdot (2d) = d$, elevándola al cuadrado y sumándola a $x^2 + 2dx$. Considérense los siguientes ejemplos.

Pasa completar el cuadrado en

Se suma $\left(\frac{1}{2} \text{ del coeficiente de } x\right)^2$

Para obtener el cuadrado perfecto

$x^2 + 6x$	9	$\left[9 = \left(\frac{1}{2} \cdot 6\right)^2\right]$	$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$
$x^2 - 10x$	25	$\left[25 = \left(\frac{1}{2} \cdot (-10)\right)^2\right]$	$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$
$x^2 - x$	$\frac{1}{4}$	$\left[\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2} \cdot (-1)\right)^2\right]$	$x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

EJEMPLO 4

Resolver: $x^2 + 2x - 15 = 0$

Se observa que $x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x + 5)$. Con el método de factorización se tiene $x - 3 = 0$ o $x + 5 = 0$, dando $x = 3$ y $x = -5$ como soluciones. Compárese este resultado con el presentado a continuación.

$$x^2 + 2x = 15 \quad \text{Se suma a cada miembro el término faltante.}$$

$$x^2 + 2x + 1 = 15 + 1 \quad \text{Se suma a cada miembro $\left(\frac{1}{2} \text{ del coeficiente de } x\right)^2 = 1$.$$

$$(x + 1)^2 = 16$$

$$x + 1 = \pm\sqrt{16} \quad \text{Se toma raíz cuadrada para ambos miembros.}$$

$$x + 1 = \pm 4$$

$$x = -1 \pm 4$$

$$x = -1 + 4 \quad \text{o} \quad x = -1 - 4$$

$$x = 3 \quad \quad \quad x = -5$$

Las soluciones son 3 y -5 , las mismas que se obtuvieron al utilizar el método por factorización. ■

Si en una ecuación cuadrática el coeficiente de x^2 no es 1, **no es posible** completar el cuadrado tomando simplemente la mitad del coeficiente de x y elevándola al cuadrado. Por ejemplo, $(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$. Sin embargo, si la expresión es $4x^2 - 12x$ y se intenta completar el cuadrado sumándole $(1/2 \cdot 12)^2$, se obtiene 36, no 9. En tales casos, debe dividirse primero toda la ecuación entre el coeficiente de x^2 , como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5

Resolver: $2x^2 + 2x - 3 = 0$ completando el cuadrado.

$$2x^2 + 2x = 3$$

Se despeja la constante.

$$x^2 + x = \frac{3}{2}$$

Se divide entre 2 para hacer el coeficiente de x^2 igual a 1

$$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}$$

$$x + \frac{1}{2} = \pm \sqrt{\frac{7}{4}}$$

$$x + \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}} \quad \text{Se simplifica.}$$

$$x + \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$$

Las soluciones son $\frac{-1 + \sqrt{7}}{2}$ y $\frac{-1 - \sqrt{7}}{2}$. ■

Solución por la fórmula cuadrática

En vez de continuar resolviendo ecuaciones cuadráticas particulares por el método de completar el cuadrado, se puede usar esta otra técnica para resolver una ecuación cuadrática general y, en el proceso, deducir la fórmula cuadrática. Recuerdese la forma general de una ecuación cuadrática.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$a \neq 0$

$$ax^2 + bx = -c$$

Se despeja la constante

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

Se divide entre a para hacer el coeficiente de x^2 igual a 1

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Se suma $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} \quad \text{Se simplifica (MCD)}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A esta fórmula se le llama **fórmula cuadrática** y debe memorizarse. Para resolver una ecuación cuadrática, se identifican las constantes a , b y c , se les sustituye en la fórmula cuadrática y se simplifica la expresión numérica.

EJEMPLO 6

Resolución de ecuaciones utilizando la fórmula cuadrática.

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$

La ecuación está en la forma general más simple y, por consiguiente $a = 1$, $b = -6$ (no 6) y $c = 8$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(8)}}{2(1)} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \\ x &= \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{o} \quad x = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$

Las soluciones son 4 y 2.

b) $x^2 - 2x = -\frac{1}{2}$

Se escribe la ecuación en la forma general y se elimina la fracción.

$$x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$$

$$2x^2 - 4x + 1 = 0$$

Así, $a = 2$, $b = -4$ y $c = 1$.



$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} \\
 &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{4} \\
 &= \frac{4 \pm \sqrt{8}}{4} \\
 &= \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{(2 \pm \sqrt{2})}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

Las soluciones son $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ y $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$.

Algunos estudiantes suelen cometer el error de cancelar los cuatros en $\frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4}$ obteniendo una respuesta incorrecta, $1 \pm 2\sqrt{2}$. Además, debe recordarse que ambos términos en el numerador deben colocarse sobre el denominador. Por tanto no escriba $2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ para la respuesta $\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$.

Los métodos por factorización y por extracción de la raíz cuadrada son los más fáciles para resolver ecuaciones cuadráticas. Si estas técnicas no son apropiadas se prefiere, por lo general, ir directamente a la fórmula cuadrática en lugar de completar el cuadrado.

Aproximación de soluciones

Para aproximar las soluciones para las ecuaciones cuadráticas utilizando una calculadora, se calcula $\sqrt{b^2 - 4ac}$ y se almacena este valor en la memoria. Entonces se suma este valor a $-b$ y se divide entre $2a$ para obtener la primera solución. Luego, se resta este valor a $-b$ y se divide entre $2a$ para obtener la segunda solución.

EJEMPLO 7

Resolver: $3.5x^2 - 81.6x + 2.8 = 0$

Las soluciones son

$$x = \frac{81.6 \pm \sqrt{(81.6)^2 - 4(3.5)(2.8)}}{2(3.5)}.$$

1. Secuencia de pasos para calcular $\sqrt{b^2 - 4ac}$:

ALG: 4 \times 3.5 \times 2.8 $=$ \div 81.6 x^2 $=$ $\sqrt{}$ STO
 RPN: 81.6 x^2 ENTER 4 ENTER 3.5 \times 2.8 \times $-$ $\sqrt{}$ STO

En este punto la pantalla mostrará 81.359449, y este valor también tiene que almacenarse en la memoria. No debe borrarse la pantalla pues el número se utiliza en el siguiente paso.

2. Secuencia de pasos para calcular la primera solución:



ALG: $\boxed{+} \ 81.6 \ \boxed{-} \ \boxed{\div} \ 2 \ \boxed{\div} \ 3.5 \ \boxed{=}$
 RPN: $81.6 \ \boxed{+} \ 2 \ \boxed{\div} \ 3.5 \ \boxed{\div}$

La pantalla muestra ahora la primera solución, 23.279921.

3. Secuencia de pasos para calcular la segunda solución:

ALG: $81.6 \ \boxed{-} \ \boxed{RCL} \ \boxed{=} \ \boxed{\div} \ 2 \ \boxed{\div} \ 3.5 \ \boxed{=}$
 RPN: $81.6 \ \boxed{ENTER} \ \boxed{RCL} \ \boxed{-} \ 2 \ \boxed{\div} \ 3.5 \ \boxed{\div}$

La pantalla muestra ahora la segunda solución, 0.0343644.

2.3. Ejercicios

En los ejercicios 1-10 resuélvase cada ecuación por el método por factorización.

- | | |
|-----------------------------|--|
| 1. $x^2 - 3x - 10 = 0$ | 2. $y^2 + 3y - 18 = 0$ |
| 3. $2z^2 - 10z - 12 = 0$ | 4. $3x^2 + 19x - 14 = 0$ |
| 5. $y^2 + y = -\frac{1}{4}$ | 6. $z^2 = \frac{11}{3}z + \frac{4}{3}$ |
| 7. $2x^2 + 3x = 0$ | 8. $4y^2 - 7y = 0$ |
| 9. $5z(z + 2) = 7z$ | 10. $5z(z + 2) = 5(z + 1)^2$ |

En los ejercicios 11-16 resuélvase cada ecuación por el método por extracción de la raíz cuadrada.

- | | | |
|---------------------|---------------------|----------------------|
| 11. $x^2 - 36 = 0$ | 12. $y^2 - 100 = 0$ | 13. $3z^2 - 75 = 0$ |
| 14. $5x^2 - 80 = 0$ | 15. $(y + 1)^2 = 9$ | 16. $(z - 3)^2 = 25$ |

¿Qué cantidad debe sumarse para completar el cuadrado en cada expresión en los ejercicios 17-20?

- | | | | |
|----------------|-----------------|---------------|--------------------------|
| 17. $x^2 - 8x$ | 18. $y^2 + 10y$ | 19. $z^2 - z$ | 20. $z^2 - \frac{1}{4}z$ |
|----------------|-----------------|---------------|--------------------------|

En los ejercicios 21-24 resuélvase cada ecuación por el método de completar el cuadrado.

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 21. $x^2 - 5x - 24 = 0$ | 22. $x^2 + 3x + 1 = 0$ |
| 23. $3y^2 - 5y + 1 = 0$ | 24. $2z^2 + 2z - 1 = 0$ |

En los ejercicios 25-30 resuélvase cada ecuación utilizando la fórmula cuadrática.

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------|
| 25. $x^2 + 5x - 24 = 0$ | 26. $y^2 + 4y - 21 = 0$ |
| 27. $3z^2 - 5z + 1 = 0$ | 28. $2x^2 - 3x - 4 = 0$ |
| 29. $(y + 1)(y - 1) + 2y = 0$ | 30. $(2z - 1)(z - 2) = 5 - 3z$ |

Resolver cada ecuación en los ejercicios 31-42. (Primero factorizando o sacando raíces, y si estos métodos fallan entonces con la fórmula cuadrática.)

- | | | |
|-------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 31. $2x^2 + 9x = 5$ | 32. $5y^2 - 14y = 3$ | 33. $\frac{1}{2}z^2 - 8 = 0$ |
| 34. $\frac{1}{3}x^2 - 12 = 0$ | 35. $y^2 = 3y$ | 36. $2z^2 = -z$ |
| 37. $3(x^2 + x) = -10x - 4$ | 38. $4(y^2 + 2y) = 3(1 - y)$ | 39. $z^2 = 3(z + 1)$ |
| 40. $x^2 = 2(x + 3)$ | 41. $y^2 = 4y - 1$ | 42. $3z^2 = z + 1$ |

Determinar los valores de x , y o z en los ejercicios 43-48. Supóngase que a y b son constantes positivas.

$$43. x^2 - 36a^2 = 0$$

$$44. y^2 - 100b^2 = 0$$

$$45. z^2 - (a + b)^2 = 0$$

$$46. x^2 - (2a + b)^2 = 0$$

$$47. y^2 - ay - 2a^2 = 0$$

$$48. z^2 + 2bz - 3b^2 = 0$$

En los ejercicios 49-52, para encontrar las soluciones aproximadas de las siguientes ecuaciones cuadráticas, empleese una calculadora. Las respuestas han de darse con una exactitud de centésimas de unidad.

$$49. x^2 - 2.1x - 4.3 = 0$$

$$50. y^2 - 5.3y - 1.6 = 0$$

$$51. 2.15x^2 + 3.28x - 4.65 = 0$$

$$52. 3.25y^2 - 2.17y - 5.07 = 0$$

Resolver:

53. **Educación.** Si el promedio de Enrique en cuatro exámenes es de 76, y tres de sus calificaciones son 82, 63 y 92, ¿cuánto obtuvo en el otro examen?

54. **Economía.** ¿Qué cantidad de dinero invertido al 4% de interés simple aumentará a 1 248 dólares después de un año?

55. **Movimiento.** María maneja 12 mi/h más rápido que su madre. Si María recorre 310 mi en el mismo tiempo que su madre recorre 250 mi, ¿cuál es la velocidad de cada una?

56. Si $\frac{3}{4}$ de pulgada en un mapa representan 20 millas, ¿a cuántas millas corresponde una distancia de 12 pulgadas?

57. **Recreación.** Si la rapidez de una corriente es de 8 km/h, y un bote puede viajar 105 km río abajo en el mismo tiempo que recorre 49 km río arriba, ¿cuál es la velocidad del bote en aguas tranquilas?

58. ¿Qué número es necesario restar a 12, 22, 3 y 4 para que los números resultantes sean proporcionales, en ese orden?

$$59. 6(x + 5) - 2(4x - 1) = 0$$

$$60. \sqrt{y - 5} - \sqrt{y + 3} = -2$$

En los ejercicios 61-64, determine si la ecuación dada es cuadrática en la variable x . Si es cuadrática, escriba la ecuación en forma estándar.

Ecuaciones cuadráticas en forma

Con frecuencia, una ecuación no es cuadrática en una variable particular, sino más bien cuadrática en una expresión que contiene a la variable. A ecuaciones como ésta se les denomina **cuadráticas en forma**. Por ejemplo,

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

no es una ecuación cuadrática. Sin embargo, si se sustituye a x^2 por u , $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ se transforma en

$$u^2 - 5u + 4 = 0 \text{ es decir } (u - 4)(u - 1) = 0$$

la cual es cuadrática en la variable u . La ecuación original es cuadrática en forma, esto es, cuadrática en la expresión x^2 . De manera similar,

$$(z - 4)^2 - 5(z - 4) + 6 = 0$$

es cuadrática en $u = z - 4$, ya que se vuelve

$$u^2 - 5u + 6 = 0.$$

EJEMPLO 1

Resolver: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$$u^2 - 5u + 4 = 0$$

$$(u - 4)(u - 1) = 0$$

$$u - 4 = 0 \quad \text{o} \quad u - 1 = 0$$

$$u = 4 \quad \quad \quad u = 1$$

Ya que $u = x^2$,

$$x^2 = 4 \quad \quad \quad x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{4} \quad \quad \quad x = \pm\sqrt{1}$$

$$x = \pm 2 \quad \quad \quad x = \pm 1$$

Comprobación: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$$(\pm 2)^4 - 5(\pm 2)^2 + 4 \stackrel{?}{=} 0 \quad \quad (\pm 1)^4 - 5(\pm 1)^2 + 4 \stackrel{?}{=} 0$$

$$16 - 20 + 4 \stackrel{?}{=} 0 \quad \quad \quad 1 - 5 + 4 \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0 \quad \quad \quad 0 = 0$$

Se comprueba con 2 (y por supuesto -2). Se comprueban con 1 (y con -1 , también)
 Las soluciones son 2, -2 , 1 y -1 .

PRECAUCIÓN. No debe darse 4 y 1 como soluciones de la ecuación original porque, si se recuerda, 4 y 1 son soluciones de la ecuación en la variable u pero no con respecto a la variable x . En otras palabras no debe olvidarse sustituir y encontrar soluciones de la ecuación original al utilizar el método de sustitución por u .

EJEMPLO 2

Resolver: $(z - 4)^2 - 5(z - 4) + 6 = 0$

$$u^2 - 5u + 6 = 0$$

$$(u - 2)(u - 3) = 0$$

$$u - 2 = 0 \quad \text{o} \quad u - 3 = 0$$

$$u = 2 \quad \quad \quad u = 3$$

Puesto que $u = z - 4$,

$$z - 4 = 2 \quad \quad \quad z - 4 = 3$$

$$z = 6 \quad \quad \quad z = 7$$

Comprobación: $(z - 4)^2 - 5(z - 4) + 6 = 0$ $(z - 4)^2 - 5(z - 4) + 6 = 0$

$$(\pm 6 - 4)^2 - 5(\pm 6 - 4) + 6 \stackrel{?}{=} 0 \quad \quad (\pm 7 - 4)^2 - 5(\pm 7 - 4) + 6 \stackrel{?}{=} 0$$

$$2^2 - 5(2) + 6 \stackrel{?}{=} 0 \quad \quad \quad 3^2 - 5(3) + 6 \stackrel{?}{=} 0$$

$$4 - 10 + 6 \stackrel{?}{=} 0 \quad \quad \quad 9 - 15 + 6 \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0 \quad \quad \quad 0 = 0$$

Se comprueba con 6. Se comprueba con 7.

Las soluciones son 6 y 7.

EJEMPLO 3

Resolver: $u^{2/3} + 2u^{1/3} = 15$

$$\begin{aligned} u^{2/3} + 2u^{1/3} - 15 &= 0 \\ + 2 &- 15 = 0 \\ (w + 5)(w - 3) &= 0 \\ w + 5 = 0 &\quad \text{o} \quad w - 3 = 0 \\ w = -5 &\quad w = 3 \end{aligned}$$

Puesto que $w = u^{1/3}$,

$$\begin{aligned} &= -5 & &= 3 \\ (u^{1/3})^3 &= (-5)^3 & (u^{1/3})^3 &= 3^3 \\ u &= -125 & u &= 27 \end{aligned}$$

Las soluciones son 27 y -125. Compruébelas.

Ecuaciones con fracciones

En la sección 2.1 se resolvieron ecuaciones con fracciones que se convirtieron en ecuaciones lineales al transformar las fracciones. Recuérdese que el proceso de transformación de fracciones incluye multiplicar por el MCD de todas las fracciones en ambos lados de la ecuación. La transformación de algunas ecuaciones con fracciones da por resultado ecuaciones cuadráticas, como se muestra en los dos ejemplos siguientes. Hay que tener en mente que las soluciones potenciales para una ecuación con fracciones *siempre deben comprobarse* en la ecuación original a fin de asegurarse que no hacen que alguno de los denominadores sea igual a cero.

EJEMPLO 4

Resolver: $\frac{y}{y+2} = \frac{2}{y-1}$

El MCD = $(y+2)(y-1)$. Se multiplica entonces, en ambos lados de la ecuación, por $(y+2)(y-1)$.

$$\begin{aligned} \frac{y}{\cancel{(y+2)}} &= \frac{2}{\cancel{(y-1)}} \\ (y-1)y &= 2(y+2) \\ y^2 - y &= 2y + 4 \\ y^2 - 3y - 4 &= 0 \\ (y+1)(y-4) &= 0 \\ y+1 = 0 &\quad \text{o} \quad y-4 = 0 \\ y = -1 &\quad y = 4 \end{aligned}$$

Las soluciones son -1 y 4. Se comprueban éstas para verificar que ninguna de ellas hace que alguno de los denominadores originales sea igual a cero.

EJEMPLO 5

Resolver: $\frac{x}{x-2} + 1 = \frac{x^2+4}{x^2-4}$

El MCD = $(x-2)(x+2)$.

$$\left[\frac{x}{x-2} + 1 \right] = \left[\frac{x^2 + 4}{(x-2)(x+2)} \right]$$

$$(x+2)x + (x-2)(x+2) = x^2 + 4$$

$$x^2 + 2x + x^2 - 4 = x^2 + 4$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x+4)(x-2) = 0$$

$$x+4=0 \quad \text{o} \quad x-2=0$$

$$x=-4$$

$$x=2$$

$$\text{Comprobación: } \frac{x}{x-2} + 1 \stackrel{?}{=} \frac{(x)^2 + 4}{(x)^2 - 4}$$

$$\frac{4}{6} + 1 \stackrel{?}{=} \frac{20}{12}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{2}{0} + 1 \stackrel{?}{=} \frac{8}{0}$$

$$\frac{2}{0} \text{ y } \frac{8}{0} \text{ no están definidos.}$$

La única solución es -4 .

El ejemplo 5 ilustra la razón principal de comprobar todas las soluciones posibles. La multiplicación por el MCD en ambos lados de la ecuación puede introducir raíces extrañas que no son soluciones del problema original.

Ecuaciones con radicales

Algunas ecuaciones con radicales se vuelven ecuaciones cuadráticas al eliminar los radicales elevando a una potencia en ambos lados de la ecuación. Es necesario comprobar siempre los resultados ya que el uso del teorema sobre potencias puede introducir raíces extrañas.

EJEMPLO 6 Resolver la ecuación con radicales

$$\text{Resolver: } \sqrt{2y+11} - y - 4 = 0$$

$$\sqrt{2y+11} = y+4$$

$$(\sqrt{2y+11})^2 = (y+4)^2$$

$$2y+11 = y^2+8y+16$$

$$y^2+6y+5=0$$

$$(y+1)(y+5)=0$$

$$y+1=0 \quad \text{o} \quad y+5=0$$

$$y=-1$$

$$y=-5$$

$$\text{Comprobación: } \sqrt{2(-1)+11} - (-1) - 4 \stackrel{?}{=} 0 \quad \sqrt{2(-5)+11} - (-5) - 4 \stackrel{?}{=} 0$$

$$\sqrt{-2+11} + 1 - 4 \stackrel{?}{=} 0$$

$$\sqrt{-10+11} + 5 - 4 \stackrel{?}{=} 0$$

$$\sqrt{9} + 1 - 4 \stackrel{?}{=} 0$$

$$\sqrt{1} + 5 - 4 \stackrel{?}{=} 0$$

$$3 + 1 - 4 \stackrel{?}{=} 0$$

$$1 + 5 - 4 \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0$$

$$2 \neq 0$$

La única solución es -1 .

EJEMPLO 7

Resolver: $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+9} = 2$

$$\sqrt{3x+1} = 2 + \sqrt{x+9}$$

$$(\sqrt{3x+1})^2 = (2 + \sqrt{x+9})^2$$

$$3x + 1 = 4 + 4\sqrt{x+9} + x + 9$$

$$2x - 12 = 4\sqrt{x+9}$$

$$x - 6 = 2\sqrt{x+9}$$

$$(x - 6)^2 = (2\sqrt{x+9})^2$$

$$x^2 - 12x + 36 = 4(x + 9)$$

$$x^2 - 12x + 36 = 4x + 36$$

$$x^2 - 16x = 0$$

$$x(x - 16) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x - 16 = 0$$

$$x = 16$$

Se despeja un radical en el lado izquierdo

Se eleva al cuadrado a ambos lados

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

y $4\sqrt{x+9}$ es el $2ab$

Se despeja el radical

Se simplifica

Se eleva al cuadrado a ambos lados

No olvidarse elevar al cuadrado al 2


Comprobación: $\sqrt{3(0)+1} - \sqrt{0+9} \stackrel{?}{=} 2$ $\sqrt{3(16)+1} - \sqrt{16+9} \stackrel{?}{=} 2$

$$\sqrt{1} - \sqrt{9} \stackrel{?}{=} 2$$

$$1 - 3 \neq 2$$

$$\sqrt{49} - \sqrt{25} \stackrel{?}{=} 2$$

$$7 - 5 = 2$$

La única solución es 16. **2.4. Ejercicios**

Resolver cada ecuación en los ejercicios 1-42.

1. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
2. $y^4 - 29y^2 + 100 = 0$
3. $(x+4)^2 - 5(x+4) + 6 = 0$
4. $(y+2)^2 - 13(y+2) + 42 = 0$
5. $x^{2/3} - 2x^{1/3} - 35 = 0$
6. $y^{2/3} - 5y^{1/3} + 6 = 0$
7. $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3 = 0$
8. $(y^2 + 4y)^2 - (y^2 + 4y) - 20 = 0$
9. $x^{-2} + 2x^{-1} - 15 = 0$
10. $y^{-2} + y^{-1} - 2 = 0$
11. $2\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2 + 7\left(\frac{2x-1}{x}\right) - 4 = 0$
12. $3\left(\frac{y+2}{y}\right)^2 + \left(\frac{y+2}{y}\right) - 2 = 0$
13. $3x^{1/2} + 12x^{-1/2} = 13$
14. $y^{1/2} + 6y^{-1/2} = 5$
15. $\sqrt[6]{x} + \sqrt[3]{x} - 6 = 0$
16. $4\sqrt[4]{y} + \sqrt{y} - 5 = 0$
17. $1 - \frac{2}{x} = \frac{3}{x^2}$
18. $\frac{5}{y^2 - 14} = \frac{1}{y}$
19. $3y - \frac{2}{y+1} = \frac{4}{y+1}$
20. $y - \frac{3}{y+2} = \frac{-2}{y+2}$
21. $\frac{3x}{2x+1} = \frac{2}{4x^2-1} + \frac{x}{2x-1}$
22. $\frac{y+2}{y-1} = 1 - \frac{y^2-7}{y^2-1}$
23. $\frac{x}{x^2-x-2} - \frac{2}{x^2-5x+6} = \frac{-3}{x^2-2x-3}$
24. $\frac{1}{y^2+2y-3} = \frac{2}{y^2-3y+2} - \frac{y}{y^2+y-6}$
25. $\sqrt{x+4} + 8 = x$
26. $6 + \sqrt{3y+1} = 2y$

27. $\sqrt{x^2 + 6x} + \sqrt{2x + 21} = 0$

29. $\sqrt{x^2 - 7x + 15} - \sqrt{4x - 13} = 0$

31. $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-4} = 3$

33. $\sqrt[3]{x^2 - 1} = 2$

35. $(2x + 11)^{1/2} - x - 4 = 0$

37. $(3x + 3)^{1/2} + (x - 1)^{1/2} = 4$

39. $\sqrt{x + \sqrt{x-2}} = 2$

41. $\sqrt{x+8} - \sqrt{3x+1} = \sqrt{2x-1}$

28. $2\sqrt{3y-2} + \sqrt{3y^2+2y} = 0$

30. $\sqrt{10y-3} - \sqrt{3y^2-7y+7} = 0$

32. $\sqrt{2y+5} + \sqrt{y+2} = 5$

34. $\sqrt[4]{y^2-9} = 2$

36. $(y+4)^{1/2} - y + 8 = 0$

38. $(2y+5)^{1/2} - (y+2)^{1/2} = 1$

40. $\sqrt{y + \sqrt{y+1}} = 1$

42. $\sqrt{x+9} + \sqrt{x+4} = \sqrt{x+25}$

En los ejercicios 43-46 se empleará una calculadora para aproximar las soluciones de las ecuaciones siguientes. Las respuestas se darán con una exactitud de centésimas de unidad.

43. $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$

44. $y + \sqrt{y} - 2.45 = 0$

45. $\frac{x}{1.5} + \frac{1}{x} = 3.2$

46. $\sqrt{2y+5.5} + \sqrt{y} = 4.58$

Para practicar

Resolver:

47. $x^2 + 5x = 21\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right)$

48. $\frac{1}{5}x^2 - 20 = 0$

49. $(y+2)(y-2) + 3y = -4$

50. $y(5y-1) = 1$

2.5. APLICACIÓN DE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS

Muchos problemas de aplicación se convierten en ecuaciones cuadráticas. En este punto conviene revisar los pasos para resolver este tipo de problemas descritos en la sección 2.2; recordar que las descripciones de las variables deben escribirse en forma completa y detallada, y cerciorarse siempre de que las respuestas sean razonables.

EJEMPLO 1

La cuarta parte del producto de dos enteros pares positivos consecutivos es 56. ¿Cuáles son estos enteros?

Sea $x =$ el primer entero par positivo,
 $x + 2 =$ el segundo entero par positivo,

$$\frac{1}{4}x(x+2) = \frac{x(x+2)}{4} = \text{un cuarto de su producto.}$$

Debe resolverse la siguiente ecuación.

$$\frac{x(x+2)}{4} = 56$$

$$x(x+2) = 224$$

$$x^2 + 2x = 224$$

$$x^2 + 2x - 224 = 0$$

$$(x-14)(x+16) = 0$$

$$x-14=0 \quad \text{o} \quad x+16=0$$

$$x=14$$

$$x=-16$$

Puesto que x debe ser positivo, se descarta -16 . Por consiguiente, 14 es el primer entero y $14 + 2 = 16$ es el segundo. Compruébese.

Al trabajar con el ejemplo presentado a continuación es preciso recordar el teorema de Pitágoras, el cual afirma que la suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa.

EJEMPLO 2

Geometría

Una escalera de 13 ft de largo está recargada contra un muro. Si la base de la escalera se encuentra a 5 ft de éste, ¿qué distancia tendría que retirarse del muro el extremo inferior de la escalera para que el extremo superior descendiera la misma distancia?

La figura 4 muestra la escalera en su posición inicial. Se utiliza el teorema de Pitágoras para encontrar y , la distancia del suelo a la parte más alta de la escalera.

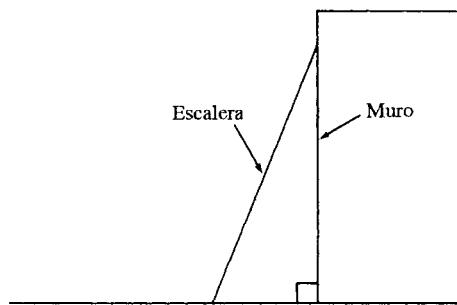


Figura 4

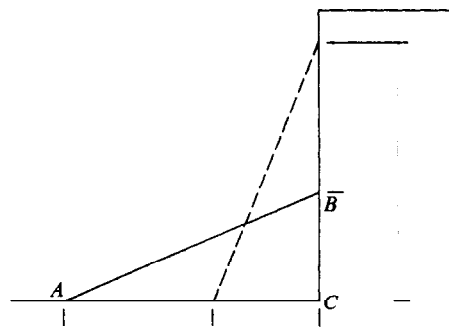


Figura 5

$$5^2 + y^2 = 13^2$$

$$25 + y^2 = 169$$

$$y^2 = 144$$

$$y = \pm 12$$

Por consiguiente, $y = 12$.

Sea x = la distancia que debe retirarse del muro el extremo inferior de la escalera; entonces x es también la distancia que descende el extremo superior de la escalera. La figura 5 muestra la nueva posición de la escalera; la línea punteada muestra la posición inicial. En el triángulo ABC , $AB = 13$ (la hipotenusa), $AC = x + 5$, y $BC = 12 - x$. Empleando el teorema de Pitágoras otra vez:

$$(x + 5)^2 + (12 - x)^2 = 13^2$$

$$x^2 + 10x + 25 + 144 - 24x + x^2 = 169$$

$$2x^2 - 14x + 169 = 169$$

$$2x^2 - 14x = 0$$

$$2x(x - 7) = 0$$

$$x = \cancel{0} \quad \text{o} \quad x - 7 = 0$$

$$x = 7$$

Si la base de la escalera se retira 7 ft, el extremo superior descende la misma distancia.

EJEMPLO 3**Inversión**

La cantidad de dinero A que resultará de invertir un principal P a un interés porcentual r , compuesto anualmente por dos años, está dada por $A = P(1 + r)^2$. Utilizando esta fórmula, ¿cuál es la tasa de interés si 5 000 dólares crece a 6 272 dólares en dos años?

Sea r = la tasa de interés. La sustitución de A por 6 272 y P por 5 000 en la fórmula del interés da la ecuación:

$$\begin{aligned} 6\,272 &= 5\,000(1 + r)^2 \\ 1.2544 &= (1 + r)^2 \quad \text{Si divide entre 5 000 a ambos lados} \\ \pm\sqrt{1.2544} &= 1 + r \\ \pm 1.12 &= 1 + r \\ -1 \pm 1.12 &= r \\ -2.12, 0.12 &= r \end{aligned}$$

Pero como r no puede ser negativa, se descarta -2.12 . Por lo tanto, $r = 0.12 = 12\%$.

EJEMPLO 4**Consumo**

Los miembros de un grupo iban a cooperar equitativamente para pagar 210 dólares, el costo de pintar un edificio. A última hora, dos de ellos decidieron no tomar parte, lo cual elevó 28 dólares la cuota de cada uno de los miembros restantes. ¿Cuántos miembros integraban al grupo al principio?

En un problema de costos como éste, la identidad fundamental está dada por:

$$\text{costo total} = (\text{costo por miembro}) \cdot (\text{número de miembros}).$$

Sea n = el número de miembros al principio,
 c = el costo por miembro al principio.

Entonces, $210 = nc$,
 $n - 2$ = el número de miembros después de que se retiraron dos,
 $c + 28$ = el costo por miembro después de que se retiraron dos.

Así,
$$210 = (n - 2)(c + 28).$$

Puesto que se desea conocer el número de miembros, es necesaria una ecuación en n . Se procede a resolver cada una de las ecuaciones de arriba para c y a igualar los resultados.

$$\begin{aligned} c &= \frac{210}{n} & c + 28 &= \frac{210}{n - 2} \\ c &= \frac{210}{n - 2} - 28 \end{aligned}$$

Así, debe resolverse

$$\frac{210}{n} = \frac{210}{n - 2} - 28.$$



Se multiplica a ambos lados por el MCD = $n(n - 2)$.

$$\begin{aligned}\frac{210}{n} &= \left[\frac{210}{n-2} - 28 \right] \\ 210(n-2) &= 210n - 28n(n-2) \\ 210n - 420 &= 210n - 28n^2 + 56n \\ 28n^2 - 56n - 420 &= 0 \\ n^2 - 2n - 15 &= 0 \\ (n+3)(n-5) &= 0 \\ n+3=0 &\quad \text{o} \quad n-5=0 \\ n=-3 &\quad \quad \quad n=5\end{aligned}$$

Al principio el grupo estaba integrado por cinco miembros.

Conviene recordar, de la sección 2.2, que en un problema de trabajo, cuando A y B trabajan juntos para completar una tarea, la ecuación que se utiliza para resolver el problema es:

$$\begin{aligned} &(\text{cantidad hecha por A en 1 unidad de tiempo}) + \\ &(\text{cantidad hecha por B en 1 unidad de tiempo}) = \\ &(\text{cantidad hecha por ambos en 1 unidad de tiempo}) \end{aligned}$$

EJEMPLO 5

Cuando cada uno trabaja solo, Samuel puede hacer un trabajo en tres horas menos que Anastasio. Cuando ambos trabajan juntos, les toma dos horas completar la tarea. ¿Cuánto tiempo le toma a cada uno hacer el trabajo solo?

Sea

- t = el número de horas requerido por Anastasio para hacer el trabajo,
- $t - 3$ = el número de horas requerido por Samuel para hacer el trabajo,
- 2 = el número de horas requerido por ambos para hacer el trabajo juntos,
- $\frac{1}{t}$ = la cantidad hecha por Anastasio en 1 hora,
- $\frac{1}{t-3}$ = la cantidad hecha por Samuel en 1 hora,
- $\frac{1}{2}$ = la cantidad hecha en 1 hora cuanto trabajan juntos

Debe resolverse la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{1}{t} + \frac{1}{t-3} &= \frac{1}{2} \\ \left[\frac{1}{t} + \frac{1}{t-3} \right] &= \frac{1}{2} \\ 2t(t-3) \frac{1}{t} + 2t(t-3) \frac{1}{(t-3)} &= 2t(t-3) \frac{1}{2} \\ 2t - 6 + 2t &= t^2 - 3t \\ 0 &= t^2 - 7t + 6 \\ 0 &= (t-6)(t-1) \\ t-6=0 &\quad \text{o} \quad t-1=0 \\ t=6 &\quad \quad \quad t=\cancel{1}\end{aligned}$$



Pero puesto que $t - 3$ sería negativo si $t = 1$, se descarta 1 como solución posible. Por lo tanto, Anastasio puede hacer el trabajo en 6 horas y Samuel puede hacerlo en 3 horas.

EJEMPLO 6

Movimiento

Dos excursionistas salen del mismo campamento a la misma hora, uno camina hacia el norte y el otro hacia el este. Si uno avanza 1 mi/h más rápido que el otro, y si después de 3 horas hay una distancia de 15 millas entre ambos, ¿a qué velocidad va caminando cada uno?

Sea x = velocidad a la que camina uno,
 $x + 1$ = velocidad a la que camina el otro.

Puesto que ambos caminan durante 3 horas,

$3x$ = distancia viajada por uno,
 $3(x + 1)$ = distancia viajada por el otro.

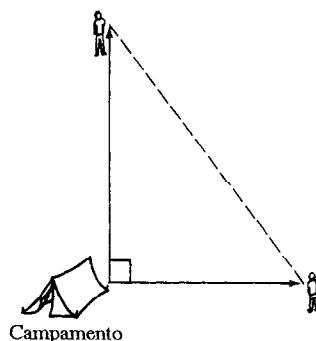


Figura 6

Se hace un bosquejo que describa el problema, como en la figura 6. Puesto que se trata de un triángulo rectángulo, puede emplearse el teorema de Pitágoras para escribir la ecuación que contiene a x .

$$\begin{aligned}(3x)^2 + [3(x + 1)]^2 &= 15^2 \\ 9x^2 + 9x^2 + 18x + 9 &= 225 \\ 18x^2 + 18x - 216 &= 0 \\ x^2 + x - 12 &= 0 \\ (x - 3)(x + 4) &= 0 \\ x - 3 = 0 &\quad \text{o} \quad x + 4 = 0 \\ x = 3 &\quad \quad \quad x = -4\end{aligned}$$

Puede descartarse -4 como solución ya que la velocidad no puede ser negativa; por lo tanto, 3 mi/h y 4 mi/h son las velocidades buscadas.

Otros problemas de movimiento se refieren a la determinación de la altura a la cual se halla un objeto sobre el nivel del suelo, en un tiempo determinado, después de haberlo dejado caer, lanzado hacia arriba o hacia abajo. Sea h la altura, medida en ft, de un objeto sobre el nivel del suelo. Sea t el tiempo en

segundos medido a partir de un tiempo inicial $t = 0$. Sea v_0 la **velocidad inicial** del objeto, medida en ft por segundo, donde v_0 es positiva si el objeto sigue una trayectoria ascendente y negativa si sigue una trayectoria descendente en el tiempo $t = 0$. Y sea h_0 la **altura inicial** del objeto con respecto al suelo en el tiempo $t = 0$. Entonces la ecuación:

$$h = -16t^2 + v_0t + h_0$$

da la altura en términos del tiempo $t \geq 0$. Nótese que si se conocen las constantes v_0 y h_0 , y si está dada una altura particular h , se tiene una ecuación cuadrática en la variable t .

EJEMPLO 7

Movimiento

Una roca se deja caer desde un despeñadero a una altura de 420 ft sobre la superficie de un río que se encuentra en la base de dicho despeñadero (véase la figura 7). ¿Cuánto tiempo le tomará a la roca llegar al agua? La respuesta debe darse con una aproximación de décimas de segundo.

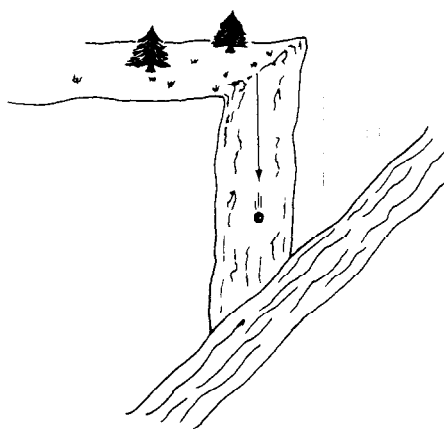


Figura 7

Puesto que la altura inicial es $h_0 = 420$, la velocidad inicial es $v_0 = 0$ (ya que sólo se deja caer la roca y no recibe impulso) y $h = 0$ cuando la roca alcanza el agua. Por consiguiente debe resolverse:

$$\begin{aligned} 0 &= -16t^2 + 420. \\ 16t^2 &= 420 \\ t^2 &= 26.25 \\ t &= \pm\sqrt{26.25} \approx \pm 5.1 \end{aligned}$$

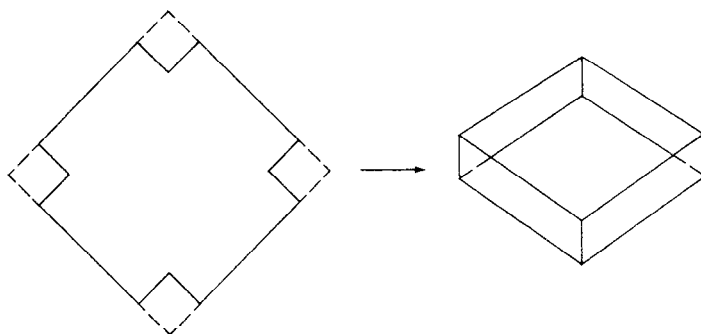
Puesto que t debe ser positivo, se descarta -5.1 . Por lo tanto, la roca llegará al agua en aproximadamente 5.1 segundos.

Con frecuencia la ecuación matemática utilizada como modelo para un problema físico tendrá más soluciones de las que en realidad son aplicables. Por ejemplo, aunque $t = -5.1$ es una solución matemática de la ecuación en el ejemplo 7, no es una solución para el problema de aplicación en virtud de que el tiempo negativo no tiene sentido en este caso. Siempre hay que comprobar el trabajo y cerciorarse de que las respuestas tengan sentido.

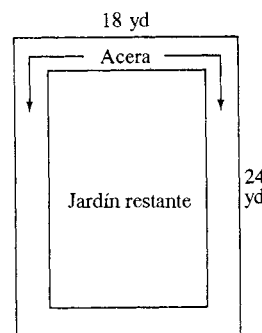
2.5. Ejercicios

Resolver:

1. Un tercio del producto de dos enteros impares positivos consecutivos es 65. ¿Cuáles son estos enteros?
2. El cuadrado de un número más 2 es lo mismo que 10 veces ese número menos 4. ¿Cuáles son todos los números que satisfacen esta condición?
3. La raíz cuadrada principal de un número más 4 es lo mismo que el número menos 8. ¿Cuál es este número?
4. Si a un número se le resta 2 es igual a la raíz cuadrada principal de 4 más el número. Encontrar el número
5. La suma de un número y su recíproco es $5/2$. ¿Qué número es éste?
6. ¿Qué números tienen la propiedad de que su suma es 15 y su producto 50?
7. **Geometría.** Si el largo de un rectángulo es 11 pulgadas mayor que el ancho y el área es de 80 pulgadas cuadradas, ¿cuáles son sus dimensiones?
8. **Geometría.** Una ventana tiene forma de triángulo equilátero, y su altura es de 12 ft. ¿Cuánto miden los lados del triángulo? La respuesta debe darse en décimas de ft.
9. Una escalera de 20 ft de largo está apoyada contra un muro. Si la base de la escalera se encuentra a 12 ft de éste, ¿qué distancia tiene que retirarse del muro el extremo inferior de la escalera para que el extremo superior descienda la misma distancia?
10. **Geometría.** Si los lados de un cuadrado se alargan 5 yd, el área del cuadrado será de 256 yd cuadradas. Encontrar el largo de cada lado.
11. **Manufactura.** A partir de una hoja cuadrada de cartón se va a fabricar una caja con base cuadrada sin tapa; el procedimiento consiste en recortar un cuadrado de cuatro pulgadas por lado en cada esquina de la hoja y, luego, doblar los lados. Si la caja debe contener 400 in^3 , ¿cuánto debe medir cada lado de la hoja de cartón original? Véase la figura.

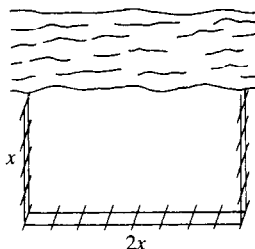


Ejercicio 11



Ejercicio 12

12. **Agricultura.** Se planea que un jardín rectangular, con dimensiones de 18 por 24 yd, tenga una vereda de anchura uniforme que rodee y delimite por completo al jardín rectangular restante, de modo que el área del jardín restante sea de 216 yd^2 . ¿Cuánto mide el ancho de la vereda?
13. Una pieza de alambre de 100 in de largo se corta en dos piezas. Si cada pieza se dobla en forma de cuadrado y el área combinada de los dos cuadrados es de 337 in^2 , ¿cuánto mide de largo cada pieza de alambre?
14. **Agricultura.** Un granjero desea cercar una zona de pastoreo rectangular que limita con un río, y decide que tenga una longitud paralela al río igual al doble del ancho; por supuesto, no es necesario cercar el lado delimitado por el río. El área encerrada debe tener $39\,200 \text{ yd}^2$. ¿Cuántas yardas de cerca son necesarias?



15. **Economía.** Empleando la fórmula $A = P(1 + r)^2$ encontrar la tasa de interés necesaria para que 10 000 dólares aumenten a 12 321 dólares en dos años, si la composición de intereses se realiza anualmente.
16. **Economía.** Empleéase la misma fórmula del ejercicio 15 para calcular la tasa de interés si 8 000 dólares aumentan a 10 305.80 dólares en dos años.
17. Un grupo de mujeres planca dividirse por igual el gasto de los 180 dólares necesarios para organizar una fiesta. A último minuto, tres mujeres deben ausentarse del poblado, lo que eleva 10 dólares la cooperación de cada una de las mujeres restantes. ¿Cuántas mujeres integraban al grupo al principio?
18. **Menudeo.** El propietario de un almacén gana 2 000.00 dólares cada semana por concepto de ventas de un tipo particular de juguete de novedad. El bajarle 2.00 dólares al precio por juguete puede estimular sus ventas y vender 50 juguetes más por semana, pero sus ganancias permanecen inalteradas en 2 000.00 dólares. ¿A qué precio vendía cada juguete originalmente?
19. **Manufactura.** Un industrial ha descubierto que el costo mensual total c , por operar su planta, está dado por $c = 10x^2 - 100x - 2\,000$, donde x es el número de productos fabricados por mes. ¿Cuántos productos se manufacturaron durante un mes en que los costos totales ascendieron a 10 000 dólares?
20. **Manufactura.** El costo semanal c de producir x bienes está dado por la ecuación $c = 2x^2 + 50x - 30$. ¿Qué cantidad de bienes se produjo en una semana en la que el costo de producción fue de 270 dólares?
21. **Economía.** El costo indirecto de vender un producto es de 165 dólares por día. A fin de vender x mercancías en un día, el precio por mercancía debe ajustarse a $26 - x$ dólares. Para no ganar ni perder en un día determinado, el propietario del almacén debe vender mercancías suficientes para pagar sus costos indirectos. ¿Cuáles son los puntos de equilibrio en esta situación –cuando no gana ni pierde?
22. **Administración.** Un mayorista vende suéteres a un club distribuidor a una tasa de 25 dólares por suéter para todas las órdenes de 250 o menos. Si la orden es mayor de 250 (hasta 300), el precio por suéter se reduce a una tasa de 5 centavos de dólar por el número total ordenado. Si se le expide al club una factura de 3 080 dólares por una orden, ¿cuántos suéteres se compraron?
23. A Juan le toma nueve horas más que a su padre hacer un trabajo. Si ambos trabajan juntos, la tarea puede hacerse en 20 horas. ¿Cuánto tiempo le tomaría a cada uno hacer dicha tarea si trabajara solo?
24. **Recreación.** Cuando de dos válvulas se abre una por separado, la mayor puede llenar una piscina en tres horas menos que la pequeña. Si se abren simultáneamente, sólo toma dos horas llenarla. ¿Cuánto tiempo tarda cada válvula en llenar la piscina cuando la otra está cerrada?
25. **Comunicaciones.** Dos prensas pueden imprimir rótulos de sobres para un grupo de ex alumnos en 10 horas. Si la prensa más nueva puede hacerlo en cinco horas menos que la más antigua, ¿cuántas horas tardaría la prensa más antigua en imprimir los rótulos si tuviera que mandarse a reparar la más nueva? (La respuesta debe redondearse a décimas.)
26. **Construcción.** A Juan le toma ocho días más que a su padre construir una plataforma de madera de secoya. Si juntos pueden construirla en 14 días, ¿cuánto tiempo le tomaría al padre de Juan construirla solo? (La respuesta debe redondearse a décimas).

- 27. Movimiento.** Dos automóviles salen de la misma ciudad al mismo tiempo viajando en ángulo recto uno con respecto al otro. Si el primero maneja 10 mi/h más rápido que el segundo, y si después de dos horas la distancia que los separa es de 100 millas, ¿cuál es la velocidad de cada automóvil?
- 28. Navegación.** Dos botes parten de una isla al mediodía, uno viaja hacia el sur y el otro hacia el oeste. Si ambos navegan a 30 nudos haga una aproximación hasta décimas y diga cuántas millas náuticas los separarán después de dos horas.
- 29. Movimiento.** Gaspar Ramos manejó 400 millas a determinada velocidad en cierto tiempo. De haber conducido 10 mi/h más rápido, el tiempo del viaje habría sido dos horas más breve. ¿A qué velocidad viajó?
- 30. Movimiento.** Margarita manejó de Cleveland a Boston, una distancia de 660 millas. Condujo a una velocidad de 6 mi/h más rápido en el viaje de regreso, reduciendo una hora el trayecto. ¿A qué velocidad manejó de Boston a Cleveland?
- 31. Movimiento.** Un niño deja caer una moneda desde la parte más alta de un rascacielos de Nueva York a una altura de 1 472 ft. Si se hace una aproximación hasta décimas de segundo, ¿cuánto tiempo le tomará a la moneda llegar al suelo?
- 32. Movimiento.** Un cohete es lanzado hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 352 ft/s. ¿Cuántos segundos pasarán antes de que regrese al suelo?
- 33. Movimiento.** Un niño parado en un puente a 200 ft sobre el nivel de un río arroja una piedra hacia abajo con una velocidad inicial de 20 ft/s. ¿Cuánto tiempo tardará la piedra en llegar al agua? (La respuesta debe redondearse a centésimas de segundo.)
- 34. Movimiento.** Con una aproximación de centésimas de segundo, ¿cuánto tiempo le tomaría a la piedra llegar al agua si el niño en el puente del ejercicio 33 arrojara la piedra hacia arriba con una velocidad inicial de 20 ft/s? (¿Parecen razonables las respuestas de los ejercicios 33 y 34?)
- 35. Movimiento.** Un hombre dispara una pistola desde el suelo a un helicóptero que se encuentra a 3 000 ft directamente por encima de él. Si la bala sale con una velocidad inicial de 2 400 ft/s, diga con una aproximación de centésimas de segundo, ¿cuánto tiempo tardará la bala en alcanzar al helicóptero?
- 36. Movimiento.** Un hombre deja caer un objeto de un globo desde una altura de 256 ft. Si el globo va en ascenso vertical a una velocidad de 16 ft/s, ¿cuánto tiempo le tomará al objeto llegar al suelo? (La respuesta debe redondearse a centésimas de segundo.)
- 37. Física.** Se puede calcular la presión P del viento, que sopla a V millas por hora, en libras por pie cuadrado, mediante la ecuación $P = \frac{3V^2}{1\,000}$. Si la presión del viento contra el costado de un edificio es de 11.25 lb/ft², ¿cuál es la velocidad aproximada del viento?
- 38. Aeronáutica.** Es posible calcular la distancia d en millas entre un objeto que está a h millas sobre la superficie de la tierra y el horizonte mediante la ecuación $d = \sqrt{h(h + 8\,000)}$. Si un avión vuela a una altura tal que su distancia al horizonte es de aproximadamente 220 millas, ¿a qué altura aproximada está el avión?
- 39. Ingeniería.** Cuando un conductor pisa el freno de un automóvil a la distancia que recorre el auto antes de detenerse por completo se le llama distancia de frenado. Para calcular la distancia de frenado D , en ft, de un auto que viaja a una velocidad de V mi/h se emplea la ecuación $D = \frac{V(V + 20)}{20}$. Si un niño corre por la calle 100 ft adelante de un automovilista y éste reacciona instantáneamente pisando el freno, ¿cuál es la velocidad máxima a la que puede ir el auto para evitar atropellar al niño?
- 40. Geometría.** Puede demostrarse que un polígono con m lados tiene $\frac{m^2 - 3m}{2}$ diagonales. Si un polígono tiene 27 diagonales, ¿cuántos lados tiene?

41. Demostrar que la suma de las dos soluciones de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ es $-b$.
 42. Demostrar que el producto de las dos soluciones de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ es c .

Resolver:

43. $\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2 + \frac{x-1}{x+2} = 6$

45. $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x+1} = 0$

44. $x - \frac{20}{2x-5} = \frac{5}{2x-5}$

46. $\left(\frac{x^2-4}{x}\right) + 15\left(\frac{x}{x^2-4}\right) - 8 = 0$

Sugerencia: $\left[\text{si } u = \frac{x^2-4}{x}, \text{ ¿a qué es igual } \frac{1}{u} ? \right]$

47. $7y^2 - 14y + 2 = 7y(y-2) + 2$

48. $x^2 - 3x = 8$

Racionalizar el denominador en los ejercicios 49-50. Este tipo de proceso servirá en la sección siguiente para trabajar con números complejos.

49. $\frac{1}{5 + 4\sqrt{2}}$

50. $\frac{2 + 5\sqrt{5}}{1 - 3\sqrt{5}}$

Números imaginarios

En las secciones previas se tuvo el cuidado de asegurar que las ecuaciones cuadráticas consideradas tuvieran números reales como soluciones. Supóngase ahora que se intenta utilizar la fórmula cuadrática para resolver $x^2 - 2x + 2 = 0$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} \end{aligned}$$

¿Cuál es la raíz cuadrada de -4 ? Se sabe que para cualquier número real a , $a^2 \geq 0$, por tanto, no hay un número real igual a $\sqrt{-4}$. En consecuencia, algunas ecuaciones simples (como la de arriba) no tienen solución en el sistema de los números reales. Para proporcionar soluciones a tales ecuaciones y considerar raíces cuadradas de números negativos, se introduce un nuevo tipo de número llamado **número imaginario**.

Si se está de acuerdo en seguir reglas para radicales semejantes a las utilizadas para números reales, sólo es necesario un nuevo número. Sea i el correspondiente numérico para $\sqrt{-1}$; es decir,

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{y} \quad i^2 = -1$$

Cualquier otro número imaginario puede expresarse como el producto de un número real por i . Por ejemplo, $\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i$. En consecuencia, las soluciones a la ecuación:

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

son

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \frac{2(1 \pm i)}{2} = 1 \pm i.$$

Definición de número complejo

A un número de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales e $i^2 = -1$, se le llama **número complejo**. Al número a se le denomina *parte real* y a b *parte imaginaria*. Si $b = 0$, el número complejo es simplemente el número real a , mientras que si $a = 0$, es el *número imaginario* bi .

En vista de esta definición, puede observarse que los números complejos incluyen tanto a los números reales como a los números imaginarios. Por ejemplo, el número real 7 podría representarse como $7 + 0i$, y el número imaginario $-2i$ podría escribirse como $0 - 2i$.

EJEMPLO 1

Simplificar:

$$\text{a) } \sqrt{-25} = \sqrt{25(-1)} = \sqrt{25}\sqrt{-1} = 5i$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{-3}\sqrt{-7} &= \sqrt{3(-1)}\sqrt{7(-1)} \\ &= \sqrt{3}\sqrt{-1}\sqrt{7}\sqrt{-1} \\ &= \sqrt{3} \cdot i \cdot \sqrt{7} \cdot i \\ &= \sqrt{3}\sqrt{7}i^2 \\ &= \sqrt{21}(-1) \quad i^2 = -1 \\ &= -\sqrt{21} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \frac{\sqrt{-30}}{\sqrt{-5}} = \frac{\sqrt{30(-1)}}{\sqrt{5(-1)}} = \frac{\sqrt{30}\sqrt{-1}}{\sqrt{5}\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{30}\cancel{\sqrt{-1}}}{\sqrt{5}\cancel{\sqrt{-1}}} = \sqrt{\frac{30}{5}} = \sqrt{6}$$

$$\text{d) } \sqrt{-36} + \sqrt{-100} = \sqrt{36}i + \sqrt{100}i = 6i + 10i = 16i$$

NOTA. El ejemplo 1b) ilustra un principio importante. De haberse escrito $\sqrt{-3}\sqrt{-7} = \sqrt{(-3)(-7)} = \sqrt{21}$, no se hubiera obtenido el mismo resultado. Es importante expresar la raíz cuadrada de un número negativo en la forma $i\sqrt{b}$ antes de efectuar simplificaciones. Recuerdese que la regla $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ fue dada sólo para $a \geq 0$ y $b \geq 0$ de modo que $\sqrt{(-3)(-7)} = \sqrt{-3}\sqrt{-7}$ es incorrecto. Sin embargo, en el caso especial donde $a \geq 0$ y $b = -1$ puede utilizarse una regla similar para expresar a las raíces cuadradas de números negativos en términos del número imaginario i .

Igualdad de números complejos

Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son **iguales**,

$$a + bi = c + di,$$

si y sólo si sus partes reales son iguales ($a = c$) y sus partes imaginarias son iguales ($b = d$).

EJEMPLO 2

- Si $a + bi = 3 + \sqrt{2}i$, entonces $a = 3$ y $b = \sqrt{2}$.
- Si $c + di = 5$, entonces $c = 5$ y $d = 0$ ya que $5 = 5 + 0i$.
- Si $u + vi = -\sqrt{3}i$, entonces $u = 0$ y $v = -\sqrt{3}$ ya que $-\sqrt{3}i = 0 - \sqrt{3}i$.
- Si $2x + yi = 3x - 2 + 7i$, entonces $2x = 3x - 2$ y $y = 7$.

$$\begin{aligned} -x &= -2 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Cuando un radical aparece como coeficiente de i , como en $\sqrt{2}i$ y $-\sqrt{3}i$ en el ejemplo 2, obsérvese que i no está bajo el radical. Puesto que este error es común, por lo regular se escribe $i\sqrt{2}$ y $-i\sqrt{3}$ para evitarlo.

Operaciones con números complejos

Suma y resta de números complejos

Sean $a + bi$ y $c + di$ dos números complejos. Su **suma** es

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

y su resta es

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Obsérvese que para la suma (o resta), el procedimiento consiste en sumar (o restar) las partes reales y luego sumar (o restar) las partes imaginarias.

EJEMPLO 3

Realizar las operaciones indicadas:

- a) $(4 + 6i) + (1 - 5i) = (4 + 1) + (6 - 5)i = 5 + i$
 b) $(2 - i\sqrt{5}) - (-7 + 3i\sqrt{5}) = (2 + 7) + (-\sqrt{5} - 3\sqrt{5})i$
 $= 9 - 4i\sqrt{5}$

Multiplicación de números complejos

Sean $a + bi$ y $c + di$ dos números complejos. Su **producto** es

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Aunque al principio la multiplicación de números complejos puede parecer extraña, en realidad sigue el mismo proceso que la obtención del producto de dos binomios utilizando el método PEIU.

$$\begin{aligned} (a + bi)(c + di) &= \overset{\textcircled{\text{P}}}{ac} + \overset{\textcircled{\text{E}}}{adi} + \overset{\textcircled{\text{I}}}{bci} + \overset{\textcircled{\text{U}}}{bdi^2} \\ &= ac + bd(-1) + adi + bci \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

De hecho, podría ser mejor usar el método PEIU para encontrar productos en casos específicos, por supuesto, teniendo en mente que $i^2 = -1$.

EJEMPLO 4

Encontrar los productos:

$$\begin{aligned} \text{a) } (3 + 6i)(2 - i) &= \overset{\textcircled{\text{P}}}{6} - \overset{\textcircled{\text{E}}}{3i} + \overset{\textcircled{\text{I}}}{12i} - \overset{\textcircled{\text{U}}}{6i^2} \\ &= 6 - 6i^2 - 3i + 12i \\ &= (6 + 6) + (-3 + 12)i \\ &= 12 + 9i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (4 + i\sqrt{3})(4 - i\sqrt{3}) &= 16 - 4i\sqrt{3} + 4i\sqrt{3} - 3i^2 \\ &= 16 - 3i^2 \\ &= 16 + 3 = 19 \end{aligned}$$

El ejemplo 4 b) ilustra un producto especial. A los números $4 + i\sqrt{3}$ y $4 - i\sqrt{3}$ se les llama *conjugados* entre sí. En general, el **conjugado** de $a + bi$ es $a - bi$, y el conjugado de $a - bi$ es $a + bi$. Cuando se multiplican dos conjugados, el producto siempre es un número real. Una aplicación de los conjugados se da en la división.

División de números complejos

Sean $a + bi$ y $c + di$ dos números complejos. El *cociente* de $a + bi$ y $c + di$ puede simplificarse al multiplicar el numerador y denominador por el conjugado del denominador. Es decir,

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

EJEMPLO 5

Dividir $2 + 5i$ entre $1 - 3i$.

$$\begin{aligned} \frac{2 + 5i}{1 - 3i} &= \frac{(2 + 5i)(\quad)}{(1 - 3i)(\quad)} \\ &= \frac{2 + 6i + 5i + 15i^2}{1 + 3i - 3i - 9i^2} \\ &= \frac{2 + 11i - 15}{1 + 9} \\ &= \frac{-13 + 11i}{10} = -\frac{13}{10} + \frac{11}{10}i \end{aligned}$$

EJEMPLO 6

Encontrar el recíproco de $5 + 4i$ y expresarlo en la forma $a + bi$.

El recíproco de $5 + 4i$ es $\frac{1}{5 + 4i}$. Así, debe dividirse el número complejo $1 = 1 + 0i$ entre el número complejo $5 + 4i$. En efecto, ya que $i = \sqrt{-1}$, se está racionalizando el denominador.

$$\begin{aligned} \frac{1}{5 + 4i} &= \frac{1(\quad)}{(5 + 4i)(\quad)} \\ &= \frac{5 - 4i}{25 + 16} \\ &= \frac{5 - 4i}{41} = \frac{5}{41} - \frac{4}{41}i \end{aligned}$$



Soluciones de ecuaciones cuadráticas

Ahora que se ha definido el conjunto de números complejos, es posible resolver cualquier ecuación cuadrática. Para determinar la naturaleza de las soluciones de una ecuación cuadrática particular, ha de considerarse de nuevo la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

El número bajo el radical, $b^2 - 4ac$, llamado **discriminante**, puede utilizarse para determinar los tipos de soluciones de una ecuación cuadrática sin resolverla en realidad.

Tipos de soluciones de una ecuación cuadrática

La ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ tiene

1. dos números reales como soluciones si el discriminante es positivo;
2. exactamente un número real como solución (considerada a veces una solución doble idéntica) si el discriminante es nulo;
3. dos números complejos como soluciones si el discriminante es negativo.

EJEMPLO 7

Determinar, sin resolver, la naturaleza de las soluciones:

a) $2x^2 - 3x - 7 = 0$

$$b^2 - 4ac = ()^2 - 4()() \\ = 9 + 56 = 65 > 0$$

Hay dos soluciones reales.

b) $2x^2 - 3x + 7 = 0$

$$b^2 - 4ac = ()^2 - 4()() \\ = 9 - 56 = -47 < 0$$

Hay dos soluciones complejas.

c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

$$b^2 - 4ac = ()^2 - 4()() \\ = 144 - 144 = 0$$

Hay una solución real.

Algunas ecuaciones, aunque no sean cuadráticas en sí mismas, pueden factorizarse y resolverse aplicando la regla del producto nulo. Un análisis más detallado de estos tipos de ecuaciones se ofrece en el capítulo 4, pero ahora consideremos un caso especial.

EJEMPLO 8

Resolver: $x^3 - 8 = 0$.

Al factorizar haciendo uso de la fórmula de diferencia de cubos se obtiene:

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0.$$



$$\begin{aligned}
 x - 2 = 0 & \quad \text{o} \quad x^2 + 2x + 4 = 0 \\
 x = 2 & \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(4)}}{2(1)} \\
 & = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} \\
 & = \frac{-2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} \\
 & = -1 \pm i\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Los tres números 2 , $-1 + i\sqrt{3}$, y $-1 - i\sqrt{3}$ son raíces cúbicas de 8 . Antes de esta sección, sólo se hubiera pensado en la raíz cúbica real, 2 .

Una propiedad interesante de las soluciones de una ecuación cuadrática es la referente a su suma y producto. Supóngase que:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

son las dos soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$. Entonces:

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 &= \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.
 \end{aligned}$$

Con esto se ha probado la primera parte del teorema siguiente. La prueba de la segunda parte se deja como ejercicio.

Si x_1 y x_2 son soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$, entonces

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{y} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

EJEMPLO 9

Encontrar la suma y el producto de las soluciones de $3x^2 - 7x + 8 = 0$.

Ya que $a = 3$, $b = -7$, y $c = 8$, la suma de las soluciones es $-\frac{b}{a} = -\frac{-7}{3} = \frac{7}{3}$, y su producto es

$$\frac{c}{a} = \frac{8}{3}.$$

El recíproco del teorema precedente también es cierto y puede utilizarse para determinar con rapidez si dos números son soluciones de una ecuación cuadrática específica.

EJEMPLO 10

Determinar si $5 + i$ y $5 - i$ son soluciones de la ecuación $2x^2 - 20x - 52 = 0$.

Puesto que $x_1 + x_2 = (5 + i) + (5 - i) = 10$ y $-\frac{b}{a} = -\frac{-20}{2} = 10$, estos números pasan la primera parte de la prueba. Sin embargo, $x_1x_2 = (5 + i)(5 - i) = 26$, pero $\frac{c}{a} = \frac{-52}{2} = -26$. Así, $x_1x_2 \neq \frac{c}{a}$, de modo que $5 + i$ y $5 - i$ no pueden ser soluciones de la ecuación.

2.6. Ejercicios

En los ejercicios 1-12, simplificar y expresar cada resultado como un número real o en términos de i .

- | | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 1. $\sqrt{-8}$ | 2. $\sqrt{-20}$ | 3. $\sqrt{-7}\sqrt{-5}$ | 4. $-\sqrt{-27}\sqrt{-3}$ |
| 5. $\frac{\sqrt{-35}}{\sqrt{-7}}$ | 6. $\frac{\sqrt{-49}}{\sqrt{-7}}$ | 7. $\frac{-\sqrt{-81}}{9}$ | 8. $\frac{-\sqrt{-121}}{11}$ |
| 9. $\sqrt{-4 - 25}$ | 10. $\sqrt{-9 - 36}$ | 11. $\sqrt{-4} - \sqrt{-25}$ | 12. $\sqrt{-9} - \sqrt{-36}$ |

En los ejercicios 13-16, determinar x y y empleando la definición de igualdad de números complejos.

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 13. $(2x + 1) + 4yi = 3$ | 14. $5x + (3y + 2)i = -i$ |
| 15. $x + yi = \sqrt{4} + \sqrt{-4}$ | 16. $x + yi = \sqrt{9} - \sqrt{-9}$ |

Realizar las operaciones indicadas en los ejercicios 17-25.

- | | | |
|----------------------------|---------------------------|---------------------|
| 17. $(3 + 2i) + (-1 + 5i)$ | 18. $(-1 - i) - (8 - 3i)$ | 19. $(2 - 5i) + 7i$ |
| 20. $(1 + 2i)(3 - 4i)$ | 21. $(2 - i)(-3 + 4i)$ | 22. $3i(2 - 4i)$ |
| 23. $5(2 - 3i)$ | 24. $(-3 - 4i)^2$ | 25. $(-3 - 4i)^3$ |

Determinar el conjugado de cada número complejo en los ejercicios 26-29.

- | | | | |
|--------------|-----------|---------|----------------------|
| 26. $5 - 7i$ | 27. $-8i$ | 28. 7 | 29. $-3 + i\sqrt{5}$ |
|--------------|-----------|---------|----------------------|

Encontrar los cocientes en los ejercicios 30-33.

- | | | | |
|----------------------------|------------------------------|-------------------------------|--------------------------------------|
| 30. $\frac{2 + 3i}{1 - i}$ | 31. $\frac{-3 + 5i}{2 + 3i}$ | 32. $\frac{1 + i}{(1 - i)^2}$ | 33. $\frac{2 - 3i}{(1 + i)(3 - 2i)}$ |
|----------------------------|------------------------------|-------------------------------|--------------------------------------|

Encontrar los recíprocos de los números en los ejercicios 34-37.

- | | | | |
|-------------|-----------|----------|---------------------------|
| 34. $2 + i$ | 35. $-3i$ | 36. -7 | 37. $\frac{2 + i}{3 - i}$ |
|-------------|-----------|----------|---------------------------|

Resolver cada ecuación en los ejercicios 38-49.

- | | | |
|--------------------------|---|--|
| 38. $x^2 - x + 1 = 0$ | 39. $3y^2 + 2y = -1$ | 40. $2z^2 - z + 7 = 0$ |
| 41. $x^4 - x^2 - 12 = 0$ | 42. $(y^2 - 1)^2 + 7(y^2 - 1) + 10 = 0$ | 43. $1 + \frac{3}{z^2 - 3z} = \frac{-1}{z^2 - 3z}$ |
| 44. $x^3 + 8 = 0$ | 45. $y^3 - 1 = 0$ | 46. $z^3 + 1 = 0$ |
| 47. $x^3 + 4x = 0$ | 48. $y^3 - 4y^2 + 5y = 0$ | 49. $z^4 - 1 = 0$ |

En los ejercicios 50-52, determinar la naturaleza de las soluciones de las ecuaciones (dos reales, un real o dos complejos) empleando el discriminante.

- | | | |
|---------------------|--------------------------|--------------------------|
| 50. $3x^2 = 5x - 8$ | 51. $x^2 - 10x + 25 = 0$ | 52. $-5x^2 + 2x + 1 = 0$ |
|---------------------|--------------------------|--------------------------|

Encontrar la suma y el producto, sin resolver, de las soluciones de las ecuaciones en los ejercicios 53-55.

53. $x^2 - 10x = -25$

54. $-5x^2 + 1 = -2x$

55. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3} = x$

Determinar, pero sin resolver, empleando la fórmula de la suma y del producto de soluciones, si x_1 y x_2 son soluciones de las ecuaciones cuadráticas en los ejercicios 56-59.

56. $x^2 - 4x - 12 = 0$; $x_1 = -2$, $x_2 = 6$

57. $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = 1$

58. $3x^2 + 8x - 35 = 0$; $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = -4$

59. $4x^2 + 11x - 3 = 0$; $x_1 = 4$, $x_2 = -\frac{1}{4}$

60. Las potencias del número imaginario i ocurren en ciclos de cuatro. Por ejemplo, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i(-1) = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = (1)i = i$, $i^6 = i^4 \cdot i^2 = (1)(-1) = -1$, y así sucesivamente. Si n es un número entero no negativo, demostrar que $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$.

61. Valiéndose de los resultados del ejercicio 60, encontrar las siguientes potencias de i .

a) i^{10} b) i^{15} c) i^{28} d) i^{73}

62. Demostrar que el producto de un número complejo por su conjugado siempre es un número real positivo.

63. El valor absoluto de un número complejo se define como $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Empleando esta definición, determinar los siguientes valores absolutos.

a) $|3 + 4i|$ b) $|1 - i|$ c) $|-9i|$

Si $x = a + bi$ es un número complejo, con frecuencia se denota al conjugado de x como $\bar{x} = a - bi$. Demostrar que las siguientes igualdades son verdaderas para los números complejos x y y .

64. $\overline{\bar{x} + \bar{y}} = x + y$

65. $\overline{\bar{x} - \bar{y}} = x - y$

66. $|x|^2 = x \cdot \bar{x}$

67. $\overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} = x \cdot y$

68. Sea a un número real. Demostrar que $|a|$, considerando a a como un número real, es el mismo que $|a|$ pensando que a es el número complejo $a + 0i$.

69. Demostrar que una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde a , b y c son enteros, tiene como solución a un número racional si el discriminante es 0.

70. Demostrar que una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde a , b y c son enteros, tiene como soluciones a dos números racionales si el discriminante es un cuadrado perfecto positivo.

71. Puede mostrarse que $ax^2 + bx + c$, con a , b y c enteros, es factorizable (con factores coeficientes enteros) siempre que $ax^2 + bx + c = 0$ tenga como soluciones a dos números racionales. Valiéndose de los resultados de los ejercicios 69 y 70, determinar si las siguientes expresiones pueden factorizarse:

a) $x^2 + x - 56$ b) $7x^2 - 3x + 9$ c) $36x^2 - 60x + 25$

72. Demostrar que si x_1 y x_2 son soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Problemas de aplicación

73. **Geometría.** El área de un triángulo es de 22 cm^2 . Si la altura es 3 cm mayor que dos veces la base, ¿cuáles son la base y la altura?

74. **Consumo.** Un hombre paga 300 dólares por un número de acciones de capital comercial. Si cada acción hubiera costado 3 dólares menos, podría haber comprado cinco acciones más por los mismos 300 dólares. ¿Cuántas acciones compró?

75. Fernando es capaz de pintar una casa en un día menos de lo que le toma a Carlos. Si entre los dos pueden pintarla en tres días, aproximando a décimas de día, ¿cuánto tiempo le tomaría a Fernando hacerlo solo?

76. **Movimiento.** Un niño lanza un cohete de juguete desde el suelo hacia arriba con una velocidad inicial de 128 ft/s.
a) ¿Cuántos segundos tardará el cohete en regresar al suelo?

- b) ¿Después de cuántos segundos el cohete alcanzará una altura de 240 ft? ¿Por qué hay dos respuestas a este problema?
- c) ¿Después de cuántos segundos el cohete alcanzará una altura de 256 ft? ¿Por qué hay sólo una respuesta a este problema?
- d) ¿Después de cuántos segundos el cohete alcanzará una altura de 300 ft? Explicar.

Resolver:

$$77. (a^2 - 2)^2 - 6(a^2 - 2) - 7 = 0$$

$$78. y^4 - 2y^2 - 63 = 0$$

Desigualdades lineales

En el capítulo 1 se explicaron los símbolos de desigualdad $<$, $>$, \leq y \geq . Ahora bien, si a y b son números reales, $a < b$ significa que $b - a$ es un número positivo. A los enunciados como:

$$x + 2 > 7 \quad 4x \leq 9 \quad 2x + 1 \geq 3x - 5 \quad 2(x + 1) < 3(x + 2) + 5,$$

donde x representa un número real, se les llama **desigualdades lineales**. A continuación, se considerarán varias propiedades de las desigualdades que servirán para resolver desigualdades lineales de manera análoga a la resolución de ecuaciones lineales.

Si a x se le reemplaza por un número real que haga verdadera a una desigualdad, a ese número se le denomina **solución** de la desigualdad. Para resolver una desigualdad se deben encontrar todas sus soluciones; como fue el caso al resolver ecuaciones, el procedimiento normal consiste en transformar las desigualdades en **desigualdades equivalentes** que tengan las mismas soluciones, terminando con una desigualdad con la variable despejada en un lado. El teorema siguiente resume cuatro propiedades importantes que se utilizan en el proceso de solución.

Propiedades de las desigualdades

Sean a , b y c números reales

1. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
2. Si $a < b$, entonces $a - c < b - c$.
3. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
4. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

PRUEBA DE 1: Puesto que $a < b$, por definición $b - a$ es positivo. Ya que $(b + c) - (a + c) = b - a$, entonces $(b + c) - (a + c)$ es positivo. Así, $a + c < b + c$.

PRUEBA DE 2: Puesto que $a < b$, utilizando la parte 1, $a + (-c) < b + (-c)$ o, en forma equivalente, $a - c < b - c$.

PRUEBA DE 3: Puesto que $a < b$, $b - a$ es positivo. Con c también positivo, el producto $(b - a)c$ es positivo. Entonces $bc - ac$ es positivo, por lo que $ac < bc$.

PRUEBA DE 4: Puesto que $a < b$, $b - a$ es positivo. Con c negativo, se sabe que $-c$ es positivo. Entonces el producto $(b - a)(-c)$ es positivo. Así, $ac - bc$ es positivo, por lo que $bc < ac$ o, en forma equivalente, $ac > bc$.

Resultados semejantes a los presentados en el teorema anterior también son verdaderos para las desigualdades $>$, \leq y \geq . La única diferencia entre estas propiedades y las correspondientes a las ecuaciones ocurre cuando una desigualdad se multiplica (o divide) en ambos lados por (o entre) un número negativo. En este caso, *debe invertirse siempre el sentido de la desigualdad*.

EJEMPLO 1

$$\begin{aligned}
 \text{Resolver:} \quad & 3x - 1 < 5x - 7 \\
 & 3x - 1 < 5x - 7 \\
 & -2x - 1 < -7 \\
 & -2x - 1 < -7 \\
 & -2x < -6 \\
 & \left(\quad \right)(-2x) \quad \left(\quad \right)(-6) \\
 & x > 3
 \end{aligned}$$

Así, las soluciones son todos los números reales mayores que 3.

No suele enunciarse la solución en una oración como en el ejemplo 1, simplemente se expresa como $x > 3$.

EJEMPLO 2

$$\begin{aligned}
 \text{Resolver:} \quad & y - 3(2 + y) \geq 2(3y - 2) + 2 \\
 & y - 6 - 3y \geq 6y - 4 + 2 \\
 & -2y - 6 \geq 6y - 2 \\
 & -8y - 6 \geq -2 \\
 & -8y \geq 4 \\
 & y \leq -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Como en el caso de las ecuaciones, algunas desigualdades son **identidades** por lo que todos los números reales son soluciones, y otras son **contradicciones** que no tienen ninguna solución.

EJEMPLO 3

$$\begin{aligned}
 \text{Resolver:} \quad & \text{a) } 3(x + 2) < 5 + 3x \\
 & 3x + 6 < 5 + 3x \\
 & 6 < 5
 \end{aligned}$$

Puesto que $6 < 5$ es una desigualdad falsa equivalente a la desigualdad original, esta última también es falsa, independientemente de la elección de la sustitución para la variable x . Cuando esto ocurre, la desigualdad no tiene ninguna solución y es una contradicción.

$$\text{b) } 2(x + 5) + x \geq 3(x + 1)$$

$$2x + 10 + x \geq 3x + 3$$

$$3x + 10 \geq 3x + 3$$

$$10 \geq 3$$

Puesto que $10 \geq 3$ es una desigualdad verdadera equivalente a la desigualdad original, esta última también es verdadera, independientemente de la elección de la situación para la variable x . Cuando esto sucede, cualquier número real es una solución de la desigualdad y ésta es una identidad.

Algunos problemas de aplicación se transforman en desigualdades lineales. Enseguida se resuelve el segundo problema presentado en la introducción de este capítulo.

EJEMPLO 4

Administración

En la manufactura y venta de álbumes de discos, la renta obtenida por la venta de x álbumes es de $2.20x$, dólares y el costo de producir x álbumes es de $\$1.30x + \$4\,500$ dólares. A fin de obtener una utilidad, la renta recibida debe ser mayor que los costos de producción. ¿Para qué valores de x habrá una utilidad?

Puesto que la renta recibida debe ser mayor que el costo de producción, debe resolverse la siguiente desigualdad:

$$2.20x > 1.30x + 4\,500$$

$$0.9x > 4\,500$$

$$x > 5\,000$$

Así, se obtendrá una utilidad cuando se vendan más de 5 000 álbumes.

Graficación de desigualdades

Para graficar una ecuación, se marca en una recta numérica cada punto correspondiente a la solución de la ecuación. Por ejemplo, para graficar $2x - 1 = 3$, primero se resuelve la ecuación, obteniéndose $x = 2$, y luego se grafica la solución como indica la figura 8.

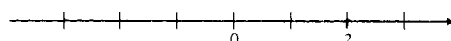


Figura 8

La graficación de desigualdades es un tanto más interesante. Por ejemplo, para graficar $3(x - 2) > 2x - 4$, se resuelve la desigualdad, obteniéndose $x > 2$, y se grafica el resultado como muestra la figura 9. El círculo pequeño en el extremo izquierdo de la flecha coloreada indica que el número 2 no está incluido, a diferencia de todos los demás puntos a la derecha del 2, que sí lo están. La figura 10 es la gráfica de $x < 0$ o $0 > x$. La gráfica de $x \geq -2$ o $-2 \leq x$ está dada en la figura 11. El círculo en -2 está lleno, con lo que se indica que el número -2 está incluido en la gráfica. Por último, la figura 12 presenta la gráfica de $x \leq 0$.

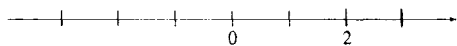


Figura 9

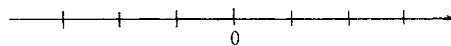


Figura 10

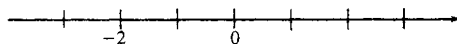


Figura 11

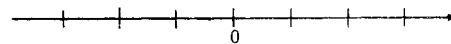


Figura 12

Desigualdades compuestas

A veces dos desigualdades se combinan o juntan mediante las conjunciones *y* u *o* y forman **desigualdades compuestas**. Por ejemplo, la desigualdad compuesta:

$$x > -3 \text{ y } x < 1$$

puede expresarse así:

$$-3 < x \quad \text{y} \quad x < 1$$

o por la cadena simple de desigualdades:

$$-3 < x < 1.$$

Los números que satisfacen a esta cadena de desigualdades están comprendidos entre -3 y 1 . La figura 13 muestra la gráfica correspondiente.

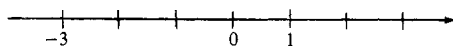


Figura 13

Intervalos

Otra manera de expresar una desigualdad compuesta es escribirla en la *notación de intervalos*.

Si a y b son números reales con $a < b$, el símbolo (a, b) , definido por

$$(a, b) = \{x \text{ tal que } a < x < b\},$$

se denomina **intervalo abierto** con **puntos extremos** a y b .

La figura 13 representa al intervalo abierto $(-3, 1)$. Obsérvese que los puntos extremos -3 y 1 no son parte del intervalo. Cuando se incluyen los puntos extremos de un intervalo, se utilizan paréntesis rectangulares en lugar de paréntesis redondos para formar un **intervalo cerrado**,

$$[a, b] = \{x \text{ tal que } a \leq x \leq b\}.$$

La definición de **intervalos semiabiertos** es análoga.

$$(a, b] = \{x \text{ tal que } a < x \leq b\} \quad \text{y} \\ [a, b) = \{x \text{ tal que } a \leq x < b\}.$$

El intervalo cerrado $[-2, 3]$ se muestra en la figura 14 y el intervalo semiabierto $[-1, 2)$ se muestra en la figura 15. Obsérvese que los paréntesis rectangulares y redondos pueden utilizarse en las gráficas para reemplazar a los círculos llenos o vacíos, respectivamente, en los puntos extremos.

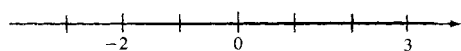


Figura 14. Intervalo cerrado $[-2, 3]$.

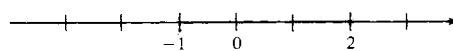


Figura 15. Intervalo semiabierto $[-1, 2)$.

A veces es conveniente considerar otro tipo de intervalo, el **intervalo infinito**, que puede utilizarse para descubrir desigualdades como:

$$x < 2, \quad x > -1, \quad x \leq 3 \quad \text{y} \quad x \geq 4.$$

Definimos

$$(-\infty, a) = \{x \text{ tal que } x < a\},$$

para a , un número real. El símbolo $-\infty$, se lee "menos infinito", y no representa un número real. Se usa simplemente para denotar que todos los números menores que a están incluidos en $(-\infty, a)$. De manera semejante, si a es un número real,

$$\begin{aligned} (-\infty, a] &= \{x \text{ tal que } x \leq a\} \\ (a, \infty) &= \{x \text{ tal que } x > a\} \\ [a, \infty) &= \{x \text{ tal que } x \geq a\}. \end{aligned}$$

Utilizando esta notación, las cuatro desigualdades dadas arriba pueden representarse mediante los intervalos infinitos $(-\infty, 2)$, $(-1, \infty)$, $(-\infty, 3]$ y $[-4, \infty)$, respectivamente. El conjunto entero de números reales podría escribirse como el intervalo $(-\infty, \infty)$.

EJEMPLO 5

Resolver y graficar:

$$-1 < 2x + 1 \leq 3$$

$$-1 < 2x + 1 \leq 3$$

$$-2 < 2x \leq 2$$

$$(-2) < (2x) \leq (2)$$

$$-1 < x \leq 1$$

En la notación de intervalos, la solución es $(-1, 1]$, y su gráfica está dada en la figura 16.

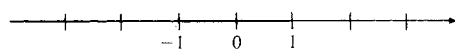


Figura 16

El segundo tipo importante de desigualdad compuesta comprende a la disyunción o, por ejemplo,

$$x < -1 \text{ o } x > 2.$$

No es posible formar una cadena simple al usar la disyunción *o*. Obsérvese que $2 < x < -1$ es una expresión sin sentido (2 no es menor que -1). La gráfica de una combinación *o* suele constar de dos segmentos de una recta numérica. Por ejemplo, la figura 17 muestra la gráfica de $x < -1$ o $x > 2$, la cual en notación de intervalos es $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$.

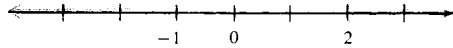


Figura 17

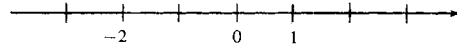


Figura 18

En forma análoga, $x < -2$ o $x \geq 1$, en notación de intervalos $(-\infty, -2) \cup [1, \infty)$, se grafica en la figura 18.

EJEMPLO 6

Resolver y graficar:

$$\begin{array}{rclcl} 3 - 4x < -1 & \text{o} & 3 - 4x \geq 9 \\ -4x < -4 & \text{o} & -4x \geq 6 \\ x > 1 & \text{o} & x \leq -\frac{6}{4} \\ & & x \leq -\frac{3}{2} \end{array}$$

La solución es $x > 1$ o $x \leq -\frac{3}{2}$, la figura 19 muestra su gráfica. En la notación de intervalos, la solución es $(1, \infty) \cup (-\infty, -\frac{3}{2}]$.

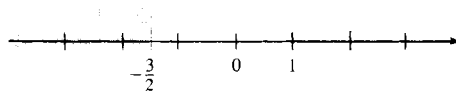


Figura 19

Nota. Debe recordarse que una combinación *y* (como $-4 < x$ y $x \leq 3$) puede expresarse como una cadena simple de desigualdades ($-4 < x \leq 3$) y, por lo general, su gráfica corresponde a un segmento de la recta numérica. Una combinación *o* (como $x < -1$ o $x > 2$) no puede expresarse como una cadena simple de desigualdades (*nunca debe escribirse* $2 < x < -1$) y, por lo general, su gráfica corresponde a dos segmentos de la recta numérica.

Desigualdades con valor absoluto

Es posible resolver una desigualdad que incluya un valor absoluto, llamada **desigualdad con valor absoluto**, mediante su simple transformación en una desigualdad compuesta equivalente. El método de transformación depende del siguiente teorema.

Sea a un número real, $a > 0$.

1. $|x| < a$ es equivalente a $-a < x < a$.
2. $|x| > a$ es equivalente a $x < -a$ o $x > a$.

En forma intuitiva, puesto que $|x|$ puede interpretarse geoméricamente como la distancia de x a 0 en una recta numérica, si $|x| < a$, entonces x debe estar *dentro* del intervalo $(-a, a)$, lo cual significa que $-a < x < a$. Además, si $|x| > a$, entonces x debe estar fuera del intervalo $(-a, a)$ lo cual significa que $x < -a$ o $x > a$. Resultados semejantes son válidos para $|x| \leq a$ y $|x| \geq a$.

EJEMPLO 7

Resolver las siguientes desigualdades con valor absoluto:

a) $|x| < 5$

Transformada a la desigualdad compuesta equivalente, la solución es $-5 < x < 5$, o, en la notación intervalos, $(-5, 5)$.

b) $|x| \geq 5$

Al transformar se obtiene la solución $x \leq -5$ o $x \geq 5$; lo que equivale a $(-\infty, -5]$ o $[5, \infty)$.

c) $|x| < 0$

Puesto que $|x|$ nunca es negativo, esta desigualdad no tiene solución.

d) $|x| \leq 0$

La única solución es $x = 0$ ya que $|x|$ no puede ser negativo.

e) $|x| < -5$

Puesto que $|x| \geq 0$ para cada número real x , no hay ninguna solución.

EJEMPLO 8

Resolver:

a) $|2 - 3x| < 11$

$$-11 < 2 - 3x < 11$$

$$-13 < -3x < 9$$

$$\frac{13}{3} > x > -3$$

Así, la solución es $-3 < x < \frac{13}{3}$ o $\left(-3, \frac{13}{3}\right)$.

b) $|2x - 1| \geq 5$

$$2x - 1 \leq -5 \quad \text{o} \quad 2x - 1 \geq 5$$

$$2x \leq -4 \quad \text{o} \quad 2x \geq 6$$

$$x \leq -2 \quad \text{o} \quad x \geq 3$$

Así, la solución es $x \leq -2$ o $x \geq 3$, o bien $(-\infty, -2] \cup [3, \infty)$. ¡No debe escribirse $3 \leq x \leq -2$ como respuesta!



2.7. Ejercicios

Resolver y graficar cada desigualdad en los ejercicios 1-24. Las respuestas deben expresarse tanto con desigualdades como con intervalos.

1. $4x - 2 \leq 6$

2. $3x - 1 \geq 5$

3. $2y + 5 < 4y - 9$

4. $5(y + 2) - 3 > 3(y - 1)$

5. $(z - 1)^2 < z(z + 2)$

6. $(x + 2)^2 \geq x(x - 2)$

7. $(4y + 1)(y - 3) \geq (2y + 1)(2y - 1)$

8. $(z - 1)(z + 2) > (z + 1)^2$

9. $\frac{3}{2y + 4} > 0$

10. $\frac{3}{2y + 4} < 0$

11. $(z + 4)^{-1} > 0$

Sugerencia: El denominador debe ser positivo.

12. $(x + 4)^{-1} < 0$

13. $\frac{y + 1}{3} \leq \frac{y + 1}{2}$

14. $\frac{2(z + 2)}{5} < \frac{3(z + 2)}{7}$

15. $4 \leq 2x - 6 < 10$

16. $3 \leq 5y - 2 \leq 18$

17. $0 \leq \frac{z + 1}{2} < 1$

18. $0 \leq \frac{3(x + 1)}{6} < 2$

19. $2y - 6 < 4$ o $2y - 6 \geq 10$

20. $5z - 2 \leq 3$ o $5z - 2 > 18$

21. $2z + 1 > z$ o $z + 3 < 0$

22. $3 - x > x + 3$ o $1 - x \leq x - 3$

23. $y < 2y + 1 < 1 - y$

Sugerencia: Escribase como dos desigualdades.

24. $z - 2 < 2z + 1 \leq 2 + z$

Determinar, en los ejercicios 25-27, los valores de x que hacen positiva a la expresión dada.

25. $3(x + 5)$

26. $-3(x + 5)$

27. $(x + 5)^2$

Determinar, en los ejercicios 28-30, los valores de x que hacen negativa a la expresión dada.

28. $3(x + 5)$

29. $-3(x + 5)$

30. $-(x + 5)^2$

Resolver:

31. **Ciencia.** La relación entre temperaturas Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Si la

temperatura Celsius está entre -15°C y 30°C , inclusive, ¿a qué intervalo corresponde en la escala Fahrenheit?

32. **Educación.** Con el fin de recibir una calificación final de C en un curso, un estudiante debe tener un promedio de calificaciones entre 70% y 80%, inclusive. Si Jonás tiene 68%, 83% y 79% en los tres primeros exámenes del semestre, ¿qué intervalo de calificaciones en el cuarto examen le daría una C ?

33. **Educación.** Bernardo está en la misma clase que Jonás (véase el ejercicio 32). Bernardo tiene 45%, 32% y 58% en los tres primeros exámenes. ¿Qué intervalo de calificaciones en el cuarto examen le daría una C ?

34. **Administración.** Para obtener una utilidad en la venta de videograbadoras, la renta total por concepto de ventas, S , debe exceder a los costos totales participantes, C . Si x representa el número de videograbadoras, $S = 200x$, y $C = 150x + 300$, ¿cuál es el número más pequeño de videograbadoras que debe venderse para obtener una utilidad?

35. **Ingeniería.** La potencia medida en unidades watts W , en un circuito eléctrico se relaciona con la fuerza electromotriz en unidades volts, E , y con la corriente en amperes, I , mediante la ecuación $W = EI$. Si las demandas de potencia en un circuito de 110 volts en una cochera varían entre 220 watts y 2 310 watts, ¿cuál es el intervalo de corriente en el circuito?

36. **Ingeniería.** La fuerza en libras F requerida para estirar un resorte x pulgadas más allá de su longitud normal está dada por $F = 5.5x$. ¿Cuáles son los valores correspondientes para x si F está entre 2.75 lb y 6.60 lb, inclusive?

Resolver cada desigualdad en los ejercicios 37-51. Las respuestas deben darse tanto con desigualdades como con intervalos.

37. $|x| < 7$

38. $|y| > 7$

39. $|z| \leq 0$

40. $|x| < 0$

41. $|y| > 0$

42. $|z| \geq 0$

43. $|x + 2| > 3$

44. $|y - 2| \leq 5$

45. $|1 - 5z| < 6$

46. $\left| \frac{x+5}{2} \right| \leq 10$

47. $\left| \frac{y+7}{3} \right| > 3$

48. $|2(z+3) - 1| < 9$

49. $|2x - 7| < -1$

50. $|2y - 7| \geq 1$

51. $|2z - 7| \leq 0$

Encontrar los valores de m , empleando el discriminante, en los ejercicios 52-55, que satisfagan la condición especificada para la ecuación cuadrática.

52. $4x^2 - 4x + m = 0$, dos soluciones reales

53. $4x^2 - 4x + m = 0$, dos soluciones complejas

54. $mx^2 - x + 2 = 0$, dos soluciones complejas

55. $mx^2 - x + 2 = 0$, dos soluciones reales

56. Demostrar la ley transitiva que afirma que si a , b y c son números reales con $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

57. Demostrar que si a y b son números reales que satisfacen $0 < a < b$, entonces $a^2 < b^2$. ¿Sigue siendo verdadero si se suprime la condición $0 < a$?

Realizar en los ejercicios 58-61, las operaciones indicadas y expresar el resultado en la forma $a + bi$.

58. $(-2 - 3i) - (4 - i)$

59. $(4 - 2i)(3 + i)$

60. $\frac{-2 + 7i}{2 + i}$

61. $(3 - 3i)^{-1}$

Resolver las ecuaciones en los ejercicios 62-63.

62. $3x^2 + 1 = x$

63. $2x^3 - 5x^2 + 4x = 0$

64. Encontrar la suma y el producto de las soluciones, pero sin resolver, de la ecuación

$$6x^2 - 12x + 1 = 0.$$

65. Determinar la naturaleza de las soluciones (dos reales, una real o dos complejas), empleando el discriminante de la ecuación $7x^2 - 3x + 1 = 0$.

Desigualdades cuadráticas

A las desigualdades de la forma:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c < 0, & \quad ax^2 + bx + c > 0, \\ ax^2 + bx + c \leq 0, & \quad \text{o} \quad ax^2 + bx + c \geq 0, \end{aligned}$$

donde a , b y c son números reales, $a \neq 0$, se les llama **desigualdades cuadráticas**. Supóngase que x_1 y x_2 son dos soluciones reales de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ tales que $x_1 < x_2$. Entonces x_1 y x_2 separan a la recta numérica en tres intervalos distintos:

$$(-\infty, x_1), \quad (x_1, x_2) \quad \text{y} \quad (x_2, \infty).$$

Puede mostrarse que el signo algebraico de $ax^2 + bx + c$ no cambia dentro de cada uno de estos intervalos. Este hecho sirve para resolver una desigualdad cuadrática como se expone en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1

Resolver: $2x^2 + x - 6 < 0$

Primero se resuelve la ecuación cuadrática asociada.

$$\begin{aligned} 2x^2 + x - 6 &= 0 \\ (2x - 3)(x + 2) &= 0 \\ 2x - 3 &= 0 \quad \text{o} \quad x + 2 = 0 \\ 2x &= 3 \quad \quad \quad x &= -2 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Estas soluciones separan a la recta numérica en tres intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 3/2)$ y $(3/2, \infty)$ como se muestra en la figura 20.

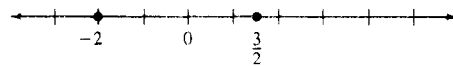


Figura 20

Ya se sabe que el signo algebraico de $2x^2 + x - 6$ será el mismo en cada punto en $(-\infty, -2)$. Para determinar ese signo, sólo es necesario seleccionar un número en el intervalo y calcular $2x^2 + x - 6$ con ese valor. Supóngase que se elige -3 :

$$2x^2 + x - 6 = 2(-3)^2 + (-3) - 6 = 9 > 0$$

Así, $2x^2 + x - 6 > 0$ para todos los números reales x en $(-\infty, -2)$. En forma análoga, si se elige un número arbitrario en $(-2, \frac{3}{2})$, por ejemplo 0, se tiene

$$2x^2 + x - 6 = 2(0)^2 + (0) - 6 = -6 < 0.$$

Así, $2x^2 + x - 6 < 0$ para todos los números reales x en $(-2, \frac{3}{2})$. Por último, si se elige 2 en $(\frac{3}{2}, \infty)$.

$$2x^2 + x - 6 = 2(2)^2 + (2) - 6 = 4 > 0$$

Así, $2x^2 + x - 6 > 0$ para todos los números reales x en $(\frac{3}{2}, \infty)$. Estos resultados se resumen en la figura 21.

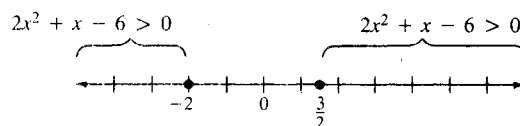


Figura 21

De acuerdo con lo anterior, las soluciones de $2x^2 + x - 6 < 0$ se encuentran en el intervalo $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$,

La solución puede escribirse como $-2 < x < \frac{3}{2}$.

Con la finalidad de ayudar a organizar el trabajo de resolver una desigualdad cuadrática, a las soluciones de la ecuación cuadrática asociada se les llama **puntos críticos**, y a los puntos arbitrarios seleccionados de cada intervalo, **puntos de prueba**. Una tabla como la que sigue, que resume el trabajo presentado en el ejemplo 1, puede servir de apoyo.

Intervalos determinados por los puntos críticos	Puntos de prueba	Valor de prueba de $2x^2 + x - 6$	Signo de $2x^2 + x - 6$
$(-\infty, -2)$	-3	$2(-3)^2 + (-3) - 6 = 9$	+
$\left(-2, \frac{3}{2}\right)$	0	$2(0)^2 + (0) - 6 = -6$	-
$\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$	2	$2(2)^2 + (2) - 6 = 4$	+

Obsérvese que en la desigualdad:

$$2x^2 + x - 6 > 0$$

serviría exactamente la misma tabla, pudiéndose identificar la solución como:

$$x < -2 \quad \text{o} \quad x > \frac{3}{2},$$

la cual corresponde a la expresión $2x^2 + x - 6$ donde el signo es positivo. En forma análoga, la solución de:

$$2x^2 + x - 6 \leq 0$$

es $-2 \leq x \leq \frac{3}{2}$. Puesto que la desigualdad es \leq y la igualdad es válida en los puntos extremos de cada intervalo (puntos críticos), estos valores están incluidos en la solución esta vez. Por último, si se resuelve:

$$2x^2 + x - 6 \geq 0,$$

se obtendría $x \leq -2 \quad \text{o} \quad x \geq \frac{3}{2}$.

EJEMPLO 2

Resolver: $x^2 + 2x - 15 \geq 0$

Al resolver la ecuación cuadrática asociada, $x^2 + 2x - 15 = 0$, se obtienen los puntos críticos $x = -5$ y $x = 3$.

Intervalos determinados por los puntos críticos	Puntos de prueba	Valores de prueba de $x^2 + 2x - 15$	Signo de $x^2 + 2x - 15$
$(-\infty, -5)$	-6	$(-6)^2 + 2(-6) - 15 = 9$	+
$(-5, 3)$	0	$0^2 + 2(0) - 15 = -15$	-
$(3, \infty)$	4	$(4)^2 + 2(4) - 15 = 9$	+

Puesto que $x^2 + 2x - 15$ es positivo en $(-\infty, -5)$ y en $(3, \infty)$, y es nula en los puntos extremos de estos intervalos, la solución es:

$$x \leq -5 \quad \text{o} \quad x \geq 3, \text{ que también se expresa como } (-\infty, -5] \quad \text{o} \quad [3, \infty).$$

EJEMPLO 3

Resolver: $(x + 3)(x - 1) \leq -2$

Se simplifica y escribe la desigualdad en la forma general

$$x^2 + 2x - 1 \leq 0$$

Para resolver la ecuación cuadrática asociada $x^2 + 2x - 1 = 0$, debe utilizarse la fórmula cuadrática. Al hacerlo, se obtiene $x = -1 \pm \sqrt{2}$ como los puntos críticos. Al usar 1.4 como aproximación para $\sqrt{2}$, se obtienen las aproximaciones 0.4 y -2.4 para los puntos críticos. Se emplean estos valores para elegir los puntos de prueba apropiados.

Intervalos	Puntos de prueba	Valores de prueba	Signo
$(-\infty, -2.4)$	-3	$(-3)^2 + 2(-3) - 1 = 2$	+
$(-2.4, 0.4)$	0	$(0)^2 + 2(0) - 1 = -1$	-
$(0.4, \infty)$	1	$(1)^2 + 2(1) - 1 = 2$	+

Puesto que el signo es negativo en $(-2.4, 0.4)$ o $(-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$ y puesto que los puntos extremos están excluidos en la solución (la desigualdad es \leq), la solución es:

$$-1 - \sqrt{2} < x < -1 + \sqrt{2} \quad \text{o} \quad [-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}].$$

En los ejemplos considerados hasta ahora, había dos puntos críticos que determinaban tres intervalos en la recta numérica. Si se recuerda que los puntos críticos son las soluciones de una ecuación cuadrática y que las ecuaciones cuadráticas pueden tener también una o ninguna solución real, debería estarse ya preparado para estos casos especiales.

Supóngase que se resuelve $x^2 > 3(2x - 3)$. Hay un solo punto crítico, 3, el cual produce los dos intervalos $(-\infty, 3)$ y $(3, \infty)$. Los puntos de prueba de estos intervalos muestran que la solución es $x < 3$ o $x > 3$. Asimismo, si se resuelve $x(x + 1) \geq -2$, no hay soluciones reales para la ecuación cuadrática asociada. En el momento en que no haya puntos críticos reales, o cada número real es una solución o no hay solución real.

en absoluto. En el primer caso, un solo punto de prueba (0 es el más fácil de usar) muestra que cada número real es una solución. En otras palabras, la solución es el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Desigualdades racionales

A las desigualdades como:

$$\frac{x+2}{x+3} \geq 0, \quad \frac{2x+1}{x-1} > 3 \quad \text{y} \quad \frac{x^2+3x-18}{x+2} < 0$$

se les llama **desigualdades racionales**. Si se modifica la definición de puntos críticos para incluir los valores que anulan al denominador, además de los valores que anulan a la expresión racional (el numerador igual a cero), es posible resolver estas desigualdades mediante una técnica semejante a la expuesta para desigualdades cuadráticas.

EJEMPLO 4

Resolver: $\frac{x-2}{x+3} \geq 0$

Para encontrar los puntos críticos: escriba $x - 2 = 0$, con lo que se obtiene 2 al resolver; y escriba $x + 3 = 0$, con lo que obtiene -3 . Por supuesto, puede hacerse uso de una tabla como antes.

Intervalos	Puntos de prueba	Valores de prueba	Signo
$(-\infty, -3)$	-4	$\frac{-4-2}{-4+3} = 6$	+
$(-3, 2)$	0	$\frac{0-2}{0+3} = -\frac{2}{3}$	-
$(2, \infty)$	3	$\frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}$	+

Así, $\frac{x-2}{x+3} > 0$ en los intervalos $(-\infty, -3)$ y $(2, \infty)$, donde los valores de prueba son positivos. Ahora, como el símbolo de la desigualdad original es \geq , también se incluye el punto extremo 2, donde $\frac{x-2}{x+3} = 0$. Así, la solución es:

$$x < -3 \text{ o } x \geq 2,$$

o, utilizando intervalos,

$$(-\infty, -3) \text{ o } [2, \infty).$$

Obsérvese que el punto extremo -3 no es parte de la solución ya que la expresión está indefinida cuando $x = -3$.

EJEMPLO 5

Resolver: $\frac{2x+1}{x-1} > 3$

Se reescribe la desigualdad de modo que 0 esté en el lado derecho y se simplifica el resultado.

$$\frac{2x+1}{x-1} - 3 > 0 \quad \text{Multiplicamos por } (x-1)$$

$$\frac{2x+1}{x-1} - \frac{3(x-1)}{x-1} > 0 \quad \text{Combinamos los términos}.$$

$$\frac{2x+1-3x+3}{x-1} > 0 \quad \text{Simplificamos los términos semejantes}.$$

$$\frac{-x+4}{x-1} > 0$$

Utilizando los puntos críticos 4 y 1 puede construirse la tabla.

Intervalos	Puntos de prueba	Valores de prueba	Signo
$(-\infty, 1)$	0	$\frac{-0+4}{0-1} = -4$	-
$(1, 4)$	2	$\frac{-2+4}{2-1} = 2$	+
$(4, \infty)$	5	$\frac{-5+4}{5-1} = -\frac{1}{4}$	-

Así, la solución es:

$$1 < x < 4 \quad \text{o} \quad (1, 4).$$

Hay que observar que ninguno de los puntos extremos está incluido en la solución porque el símbolo de la desigualdad original es $>$.

EJEMPLO 6

Resolver: $\frac{x^2 + 3x - 18}{x + 2} < 0$

Si se factoriza $x^2 + 3x - 18$, es fácil identificar los puntos críticos.

$$\frac{(x-3)(x+6)}{x+2} < 0$$

Así, los puntos críticos son 3, -6, y -2.

Intervalos	Puntos de prueba	Valores de prueba	Signo
$(-\infty, -6)$	-7	$\frac{(-7-3)(-7+6)}{-7+2} = -2$	-
$(-6, -2)$	-3	$\frac{(-3-3)(-3+6)}{-3+2} = 18$	+
$(-2, 3)$	0	$\frac{(0-3)(0+6)}{0+2} = -9$	-
$(3, \infty)$	4	$\frac{(4-3)(4+6)}{4+2} = \frac{5}{3}$	+

Puesto que $\frac{x^2 + 3x - 18}{x + 2}$ es negativo en $(-\infty, -6)$ y en $(-2, 3)$, la solución es:

$$x < -6 \quad \text{o} \quad -2 < x < 3.$$

Algunos problemas de población se convierten en desigualdades cuadráticas.

EJEMPLO 7

Movimiento

Un cohete es lanzado hacia arriba desde una plataforma, la cual se encuentra a 10 ft por encima del suelo, con una velocidad inicial de 128 ft/s. ¿Durante qué intervalo de tiempo la altura del cohete excederá los 250 ft?

Conviene recordar que la fórmula para la altura h de un objeto impulsado hacia arriba desde una altura inicial h_0 con velocidad inicial v_0 es:

$$h = -16t^2 + v_0t + h_0.$$

En este ejemplo, $v_0 = 128$ y $h_0 = 10$.

Así, se está buscando el intervalo de tiempo para el que:

$$\begin{aligned} 16t^2 + 128t + 10 &> 250. \\ -16t^2 + 128t - 240 &> 0 \\ -16(t^2 - 8t + 15) &> 0 \\ t^2 - 8t + 15 &< 0 \\ (t - 3)(t - 5) &< 0 \end{aligned}$$

Los valores críticos son 3 y 5.

Intervalos	Puntos de prueba	Valores de prueba	Signo
$(-\infty, 3)$	0	$(0 - 3)(0 - 5) = 15$	+
$(3, 5)$	4	$(4 - 3)(4 - 5) = -1$	-
$(5, \infty)$	6	$(6 - 3)(6 - 5) = 3$	+

Así, la solución de la desigualdad es:

$$3 < t < 5,$$

lo cual significa que durante el periodo de 3 a 5 segundos el cohete estará a una altura superior a los 250 ft sobre el nivel del suelo.

2.8. Ejercicios

Resolver cada desigualdad en los ejercicios 1-27. Las respuestas han de darse tanto con desigualdades como con intervalos.

1. $x^2 + 2x - 15 > 0$
2. $x^2 + 2x - 15 \leq 0$
3. $2x^2 + 3x \geq 20$
4. $2x^2 + 3x < 20$
5. $x^2 - 2x - 2 > 0$
6. $x^2 - 2x - 2 \leq 0$
7. $3x^2 - x + 2 > 0$
8. $3x^2 - x + 2 \leq 0$
9. $4x^2 - 20x + 25 \leq 0$
10. $4x^2 - 20x + 25 < 0$
11. $5x^2 - 2x \leq 1$
12. $\frac{x-3}{x+1} < 0$
13. $\frac{x-3}{x+1} \geq 0$
14. $\frac{2x-1}{x+3} \geq 1$
15. $\frac{2x-1}{x+3} < 1$
16. $\frac{3x+2}{x-3} < 2$
17. $\frac{3x+2}{x-3} \geq 2$
18. $(x-2)(x+2)(x-5) < 0$
19. $(x-2)(x+2)(x-5) \geq 0$
20. $(x-2)(x+2) < 3x$
21. $(x-2)(x+2) \geq 3x$
22. $\frac{(x-3)(x+6)}{x-1} \geq 0$
23. $\frac{(x-3)(x+6)}{x-1} < 0$
24. $(x^2 - 2x)(x^2 + 8x + 15) < 0$
25. $(x^2 - 2x)(x^2 + 8x + 15) \geq 0$
26. $x^3 < x$
27. $x^3 \geq x$

Determinar, en los ejercicios 28-31, el intervalo (o intervalos) en el cual la expresión radical defina un número real.

28. $\sqrt{x^2 - 1}$
29. $\sqrt{x(x+5)}$
30. $\sqrt{2x^2 - 9x - 5}$
31. $\sqrt{\frac{3-x}{x+8}}$

Determinar, en los ejercicios 32-33, el intervalo (o intervalos) que contengan(n) a m , en el cual la ecuación cuadrática tiene las soluciones indicadas.

32. $x^2 + mx + 4 = 0$; dos soluciones reales
33. $x^2 + mx + 4 = 0$; dos soluciones complejas

Resolver:

34. **Administración.** La utilidad que se obtiene al vender t unidades, $t > 0$, está dada por $P = t^2 - 31t + 220$. Determinar el número de unidades que ha de venderse para que:
 - a) $P = 0$ (no ganar ni perder),
 - b) $P > 0$ (obtener una utilidad) y
 - c) $P < 0$ (conseguir una pérdida).
35. **Administración.** El costo de producir t unidades es $C = t^2 + 6t$, y la renta generada por concepto de ventas es $R = 2t^2 + t$. ¿Cuál es el número de unidades que ha de venderse para obtener una utilidad?
36. **Geometría.** Un cercado rectangular debe tener un área de al menos 900 yd². Si se van a utilizar 200 yd de cerca y el ancho no puede exceder al largo, ¿dentro de qué límites debe estar el ancho del cercado?
37. **Movimiento.** Una moneda es lanzada al aire hacia arriba desde un balcón a 200 ft de altura con una velocidad inicial de 48 ft/s. ¿Durante qué intervalo de tiempo la moneda estará a una altura de al menos 40 ft?
38. **Administración.** Un minorista ha determinado que es posible vender n juegos durante el mes siempre que el precio de cada juego sea de $20 - 0.2n$ dólares. Si él compra cada juego a un mayorista a 10 dólares, y si desea obtener una utilidad de al menos 120 dólares por mes por concepto de ventas de este juego, ¿cuántos juegos debe vender cada mes?
39. **Movimiento.** Si un cohete es lanzado hacia arriba desde el suelo, su altura en metros después de t segundos está dada por $h = -9.8t^2 + 147t$. ¿Durante qué intervalo de tiempo el cohete estará a una altura superior a 529.2 m?

40. Se va a construir una caja con una hoja rectangular de cartón, cuyas dimensiones son 16 in de largo por 12 in de ancho; el procedimiento consiste en recortar cuatro piezas cuadradas, una en cada esquina, y doblar los lados. Si el área de la base de la caja debe exceder las 32 in² ¿cuáles son las posibles alturas de la caja?
41. Un observador que se encuentra en el borde de un desfiladero puede ver una luz de bengala encendida en el fondo de dicho desfiladero sólo cuando la luz alcanza el nivel del borde. Si se dispara la luz de bengala con una velocidad inicial de 176 ft/s y el desfiladero tiene una profundidad de 448 ft ¿durante qué intervalo de tiempo puede verse la luz de bengala desde el borde?

Para resolver las desigualdades de los ejercicios 42-43, utilícese una calculadora. Las respuestas deben redondearse hasta centésimas de unidad.

42. $2.5x^2 - 3.9x - 4.7 > 0$

43. $\frac{x - 6.25}{x^2 - 1.5x - 7.3} \leq 0$

Resolver cada desigualdad de los ejercicios 44-47. Las respuestas deben expresarse como desigualdades e intervalos.

44. $(y + 5)^2 \leq y(y - 15)$

45. $\frac{2}{3z + 9} < 0$

46. $|1 - 4x| > 5$

47. $|3(z + 1) + 1| \leq 10$

48. **Menudeo.** El propietario de una tienda de mascotas desea obtener una utilidad de al menos 100 dólares por concepto de ventas de ratones durante el mes. Si cada ratón se vende a 1.50 dólares y le cuesta al negociante 0.85 dólares, y si el costo indirecto fijo estimado relacionado con el aprovisionamiento de los ratones asciende a 13.75 dólares por mes, ¿cuál es la cantidad mínima que debe vender?
49. Trabajando juntas, Brenda y Perla pueden pintar una cochera en seis días. Trabajando sola, Brenda puede hacerlo en 10 días. ¿Cuántos días se requerirían para que Perla pintara la cochera sola?
50. Resolver con calculadora:

$$\frac{6.2}{x - 5.8} + \frac{2.3}{x + 7.9} = 47.3.$$

La respuesta debe redondearse hasta centésimas de unidad.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 2

Resolver cada ecuación o desigualdad de los ejercicios 1-24:

1. $(3y - 2) - (y + 1) = 0$

2. $4(x - 2) + 3(3 - x) = 3x - 5$

3. $5\sqrt{x - 1} - 3\sqrt{2x + 5} = 0$

4. $\sqrt{z^2 + 7} - z - 1 = 0$

5. $\frac{x - 3}{x - 1} - \frac{5}{x} = 1$

6. $\frac{z}{z + 2} - \frac{2}{z - 2} = \frac{z^2 + 4}{z^2 - 4}$

7. $y(y + 1) = 6(3 - y)$

8. $3x^2 - x - 1 = 0$

9. $5x^2 + 2x + 1 = 0$

10. $x^{2/3} + 2x^{1/3} + 1 = 0$

11. $\left(\frac{y - 3}{y + 1}\right)^2 - 6\left(\frac{y - 3}{y + 1}\right) + 8 = 0$

12. $2x + \frac{x}{x + 7} = \frac{8}{x + 7}$

13. $\frac{3y}{y + 1} = \frac{2}{y^2 - 1} + \frac{y}{y - 1}$

14. $\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{3x + 6} = 0$

15. $\sqrt{3y + 1} - \sqrt{y + 4} = 1$

16. $|2x + 3| = 3$

17. $|3 - 4x| = 0$

18. $|x + 5| = |5 - x|$

19. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ para y

20. $3(x - 1) + x < 4(x + 1)$

21. $(x - 3)(x^2 - 2x - 35) < 0$

22. $3x^2 + x \leq 10$

23. $x^2 - 3x + 1 \geq 0$

24. $3x^2 - 2x + 1 < 0$



Resolver y graficar cada desigualdad de los ejercicios 25-28.

25. $5(x + 2) - 3x \leq x + 7$

26. $\frac{x-5}{2x-3} \geq 1$

27. $|2 - x| < 1$

28. $3x^2 + x - 10 > 0$

Las respuesta deben expresarse como desigualdades e intervalos.

Realizar las operaciones indicadas en los ejercicios 29-30.

29. $(8 - 6i) - (-3 + i)$

30. $\frac{3 - 5i}{-2 + i}$

31. Tomando en cuenta el discriminante, determinar la naturaleza de las soluciones de

32. Encontrar, sin resolver, la suma y el producto de las soluciones de la ecuación
 $5x^2 - 10x + 25 = 0$.

Resolver:

33. La suma de tres enteros pares, consecutivos y positivos es 40 más dos veces el más grande. Encontrar los enteros.

34. El peso promedio de Juana, Pepe, Enrique y Silvia es de 78 kg. Si Silvia pesa 65 kg, Pepe pesa 84 kg y Enrique pesa 88 kg, ¿cuánto pesa Juana?

35. **Economía.** Si Gloria gana 30 240 dólares después de recibir un aumento del 8% ¿cuál era su salario anterior?

36. **Geometría.** El perímetro de un rectángulo es 70 m. Si el largo mide 1 m menos que dos veces el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

37. **Geometría.** El primer ángulo de un triángulo es 5° mayor que dos veces el tercero, y el segundo es 5° menor que seis veces el primero. Encontrar la medida de cada uno.

38. Juan puede hacer una tarea en 24 minutos y Simón puede hacer el mismo trabajo en 18 minutos. ¿Cuánto tiempo tardarían en hacerlo juntos? (la respuesta correcta debe darse aproximando hasta décimas de minuto.)

39. **Movimiento.** Maru y Astrid viven a una distancia entre sí de 159 mi. Si Maru maneja en dirección a Astrid a una velocidad promedio de 50 mi/h y ella maneja en dirección a él a una velocidad promedio de 56 mi/h, habiendo salido ambos a las 8:00 A.M., ¿a qué hora se encontrarán?

40. **Aeronáutica.** Un avión vuela a 700 km con el viento a favor y 500 km con el viento en contra en el mismo lapso. Si la velocidad del viento es de 20 km/h, ¿cuál es la velocidad del avión en aire sin viento?

41. Un alambre de 64 ft de largo se corta en dos piezas, las cuales tienen la razón de 11:5. ¿Cuánto mide cada una?

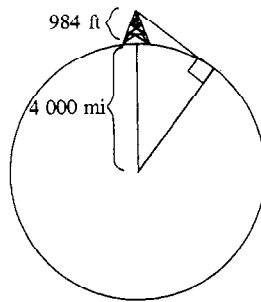
42. Un árbol proyecta una sombra de 32 ft de largo al mismo tiempo que una torre de 100 ft de alto proyecta una sombra de 64 ft de largo. ¿Cuál es la altura del árbol?

43. **Movimiento.** Dos automóviles salen de la misma ciudad al mismo tiempo viajando en ángulo recto uno con respecto al otro. Si el primero viaja a 15 mi/h más rápido que el segundo y si después de dos horas la distancia entre ellos es de 150 mi, ¿cuál es la velocidad de cada automóvil?

44. **Recreación.** Los miembros de un grupo planean compartir equitativamente el costo de 132 dólares de un viaje de pesca. A última hora, dos miembros deciden no ir y esto eleva 11 dólares la cooperación de cada miembro restante. ¿Cuántos miembros planeaban ir al principio?

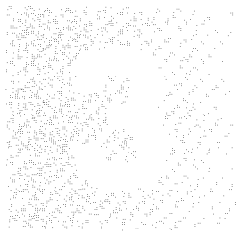
45. Antonio puede hacer un trabajo en 12 minutos menos que su madre, y juntos pueden hacerlo en ocho minutos. ¿Cuánto tiempo le tomaría a cada uno hacer el trabajo solo?

46. **Geometría.** La Torre Eiffel de París mide 984 ft de altura. Si una observadora situada en la parte más alta de la torre mira hacia el horizonte en un día claro, ¿qué tan lejos alcanza a ver? Considérese el radio de la Tierra como de 4 000 mi y la figura.



47. **Movimiento.** Fernando lanza una pelota de béisbol hacia arriba con una velocidad inicial de 64 ft/s. Si la pelota se libera desde una altura de 6 ft, ¿durante qué periodo la pelota estará a una altura superior a 54 ft?
48. **Ecología.** Un funcionario estatal de caza desea calcular el número de antílopes en una reserva ecológica. Atrapa 100 antílopes, les marca una oreja y los regresa a la reserva. Después de un tiempo, su muestra se mezcla por completo con el resto de la manada; captura otra muestra de 50 antílopes, y descubre que cinco de ellos están marcados. Calcular el número de antílopes en el vedado de caza.
49. **Manufactura.** En la fabricación y venta de estufas quemadoras de madera, la renta obtenida por concepto de ventas de x estufas es $450x$ dólares, y el costo de producir x estufas es $200x + 750$ dólares por semana. ¿Para qué valores de x habrá una utilidad?
50. Utilizando una calculadora resolver $7.3x^2 - 3.2x - 8.4 = 0$. La respuesta debe redondearse hasta centésimas de unidad.

Capítulo



Funciones y gráficas

El concepto de función es básico en matemáticas y en las aplicaciones de matemáticas. Tanto en administración, como en ciencias e ingeniería la idea de que una variable depende de otra es de uso bastante amplia. Los siguientes son algunos ejemplos de las numerosas aplicaciones que se consideran en este capítulo.

Administración

Una agencia de alquiler de automóviles tiene un promedio de 20 clientes por día para un modelo que se alquila por 32 dólares diarios. Un estudio muestra que la agencia podría conseguir dos clientes nuevos por cada dólar de reducción en la tasa de alquiler por día. ¿Qué tasa diaria le proporcionaría a la compañía la renta máxima?

Ingeniería

La resistencia R de un alambre a temperatura constante varía directamente con la longitud e inversamente con el cuadrado del diámetro d . Una sección de alambre con un diámetro de 0.01 in y una longitud de 1 ft tiene una resistencia de 8.2 ohms. Encuéntrese la resistencia de un alambre de 1 mi de largo y 0.05 in de diámetro.

La primera de estas aplicaciones se resuelve al encontrar el máximo de una función cuadrática (véase el ejemplo 4 en la sección 3.6). La segunda se resuelve utilizando variación (véase el ejemplo 4 en la sección 3.7).

En este capítulo se procede a estudiar no sólo las funciones y sus características sino también cómo describirlas gráficamente. Se da un tratamiento extensivo a las funciones lineales y cuadráticas y el tema de variación concluye el capítulo.

En el capítulo 2 se expuso la graficación de ecuaciones y desigualdades en una variable sobre la recta numérica. Cuando una recta numérica horizontal y una vertical se sobreponen de modo que los dos orígenes coinciden y las rectas son perpendiculares, el resultado es un **sistema de coordenadas rectangulares** o **plano coordenado**. Esta configuración también se denomina **sistema de coordenadas cartesianas** en honor de René Descartes, el matemático francés que la introdujo.

La figura 1 muestra las características importantes de un sistema de coordenadas rectangulares. A la recta numérica horizontal se le denomina **eje de las x** y a la recta numérica vertical **eje de las y** . Al punto de intersección de los ejes se le llama **origen**, y al sistema a veces se le conoce como **sistema de coordenadas x, y** .

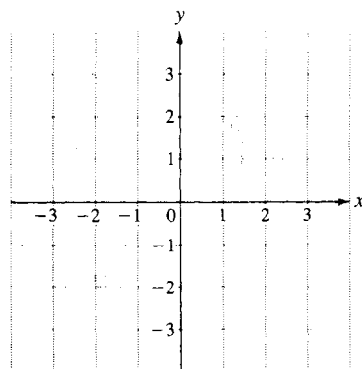


Figura 1. Sistema coordenado rectangular o cartesiano (plano coordenado).

Trazado de puntos

Recuérdese que hay uno y sólo un punto en una recta numérica asociado con cada número real. En consecuencia, hay un par de números único asociado con cada punto en el plano de coordenadas. El par se escribe (x, y) donde x representa unidades en el eje de las x y y corresponde a unidades en el eje de las y ; (x, y) recibe el nombre de **par ordenado** puesto que el orden, x primero y y segundo, debe preservarse para identificar correctamente los puntos. El par ordenado (a, b) se traza en la figura 2 en la intersección de una línea vertical a través de a y una línea horizontal a través de b . El número a se denomina **coordenada x o abscisa** del punto (a, b) , y b se denomina **coordenada y u ordenada** del punto.

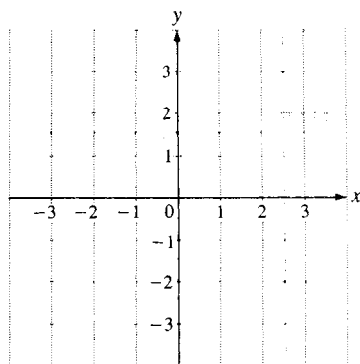


Figura 2. Trazado de puntos.

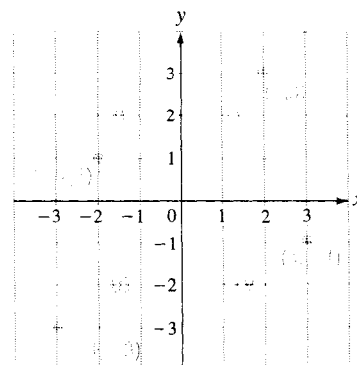


Figura 3. Cuadrantes y gráficas.

En la figura 3 se han trazado los puntos $(2, 3)$, $(-2, 1)$, $(-3, -3)$ y $(3, -1)$. Obsérvese también que en esta figura están incluidos los números romanos I, II, III y IV; cada uno designa a una de las cuatro secciones en un sistema de coordenadas rectangulares llamadas **cuadrantes**. El punto $(2, 3)$ está en el primer cuadrante, $(-2, 1)$ en el segundo, $(-3, -3)$ en el tercero y $(3, -1)$ en el cuarto. Los signos correspondientes a la coordenada x y a la coordenada y en cada uno de los cuadrantes son los siguientes:

$$\text{I: } (+, +), \quad \text{II: } (-, +), \quad \text{III: } (-, -), \quad \text{IV: } (+, -).$$

Gráficas

A los puntos trazados en la figura 3 se les denomina **gráfica** del conjunto $\{(2, 3), (-2, 1), (-3, -3), (3, -1)\}$. Muchas gráficas necesitan infinidad de puntos. Por ejemplo, para graficar el conjunto de soluciones de $y = -2x + 3$ debe mostrarse cada uno de los pares ordenados para los cuales la ecuación es cierta. En la figura 4 sólo se señalan algunas posibles soluciones, $(-1, 5)$, $(0, 3)$, $(1, 1)$, $(2, -1)$, $(3, -3)$ y $(4, -5)$. Puede observarse que todos los puntos se hallan en una línea recta, de hecho, el conjunto de soluciones construye la línea. En este caso, la gráfica está constituida por la infinidad de puntos de la recta.

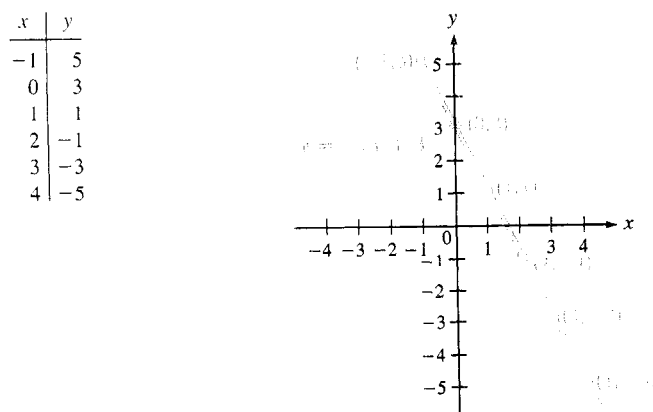


Figura 4

En la figura 4 obsérvese que junto a la gráfica se presenta una tabla que contiene cada uno de los puntos trazados. Un procedimiento para graficar una ecuación consiste en seleccionar valores de una de las variables (usualmente x), calcular los valores de la otra variable y colocar los resultados en una tabla. Por lo regular, es conveniente trazar un buen número de puntos para determinar la forma de la curva.

EJEMPLO 1

Graficar: $y = x^2 - 3$.

Después de seleccionar valores de x para calcular valores de y , los pares ordenados obtenidos son puntos que pueden trazarse en un sistema de coordenadas de tamaño razonable. Por ejemplo, para

$$\begin{aligned} x = -3 & \quad y = (-3)^2 - 3 = 6, \\ x = -2 & \quad y = (-2)^2 - 3 = 1. \end{aligned}$$

La tabla presenta otros puntos calculados, cada uno de ellos está indicado en la gráfica de la figura 5. Se incluyen suficientes puntos para reconocer la forma de la curva; la gráfica de $y = x^2 - 3$ corresponde a todos los puntos en la curva trazada.

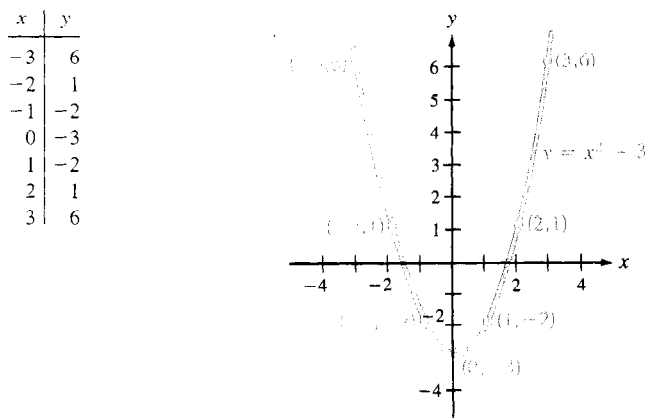


Figura 5

Fórmula de la distancia

Dos fórmulas que se utilizan a lo largo de este capítulo contemplan encontrar tanto la distancia entre dos puntos, como el punto medio del segmento que une a los dos puntos.

La distancia entre dos puntos con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por la **fórmula de la distancia**

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Para derivar esta fórmula, considere la figura 6, y aplique el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo con vértices P , Q y R (la suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa).

$$\begin{aligned} d^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ d &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \end{aligned}$$

Obsérvese que ya que tanto $(x_1 - x_2)$ como $(y_1 - y_2)$ están elevados al cuadrado, si P es (x_2, y_2) y Q es (x_1, y_1) , la fórmula produce el mismo resultado para la distancia. Además, la fórmula se aplica aun cuando los puntos se encuentren en cuadrantes diferentes.

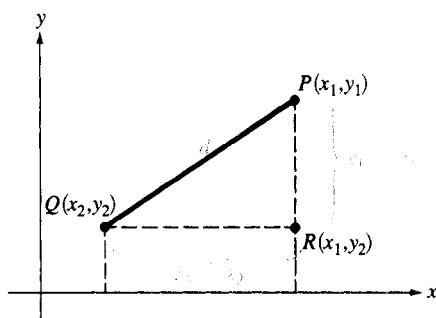


Figura 6. Fórmula de la distancia

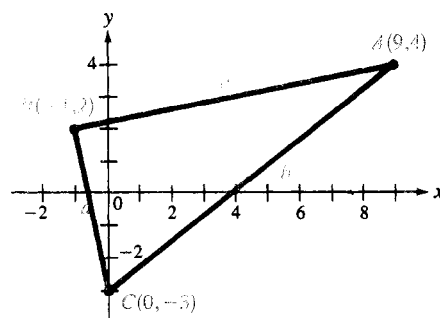


Figura 7. Triángulo rectángulo.

EJEMPLO 2

Encontrar las longitudes de los lados del triángulo ABC con vértices $A(9, 4)$, $B(-1, 2)$ y $C(0, -3)$.

¿Es ABC un triángulo rectángulo?

Primero, trácese el triángulo ABC como indica la figura 7.

$$a = \sqrt{(0 - (-1))^2 + (-3 - 2)^2} = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}$$

$$b = \sqrt{(9 - 0)^2 + (4 - (-3))^2} = \sqrt{9^2 + 7^2} = \sqrt{130}$$

$$c = \sqrt{(-1 - 9)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{(-10)^2 + (-2)^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}.$$

Si ABC es un triángulo rectángulo, $\sqrt{130}$ debe ser la longitud de la hipotenusa (el lado más largo), la cual, junto con los catetos, deben satisfacer las condiciones del teorema de Pitágoras.

$$a^2 + c^2 = (\sqrt{26})^2 + (2\sqrt{26})^2 = 26 + 104 = 130 = (\sqrt{130})^2 = b^2$$

Así, el triángulo es un triángulo rectángulo.

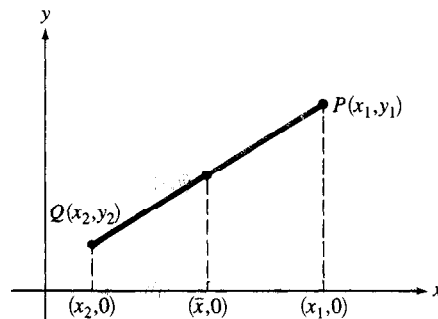


Figura 8. Fórmula del punto medio.

Fórmula del punto medio

La fórmula del punto medio puede obtenerse al considerar la figura 8. Sea (\bar{x}, \bar{y}) (léase equis barra, ye barra) el punto medio del segmento que une a $P(x_1, y_1)$ con $Q(x_2, y_2)$. Con base en la geometría, se sabe que el punto $(\bar{x}, 0)$ es el punto medio entre $(x_2, 0)$ y $(x_1, 0)$. Así, la distancia d_1 en el eje de las x entre $(x_2, 0)$ y $(\bar{x}, 0)$ es la misma que la distancia d_2 entre $(\bar{x}, 0)$ y $(x_1, 0)$.

$$\begin{aligned} d_1 &= d_2 \\ |\bar{x} - x_2| &= |x_1 - \bar{x}| \\ \bar{x} - x_2 &= x_1 - \bar{x} \\ 2\bar{x} &= x_1 + x_2 \\ \bar{x} &= \frac{x_1 + x_2}{2} \end{aligned}$$

De manera análoga, al considerar la distancia en el eje de las y , puede demostrarse que $\bar{y} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$. Esto origina el siguiente teorema.

Las coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) del punto medio del segmento que une a (x_1, y_1) y (x_2, y_2) están dadas por la fórmula del punto medio

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Obsérvese que el punto medio se determina al encontrar el promedio de las coordenadas x y el promedio de las coordenadas y .

EJEMPLO 3

Encontrar el punto medio entre los puntos $(-5, 2)$ y $(7, 3)$.

$$\begin{aligned} (\bar{x}, \bar{y}) &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \\ &= \left(\frac{-5 + 7}{2}, \frac{2 + 3}{2} \right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{5}{2} \right) = \left(1, \frac{5}{2} \right) \end{aligned}$$

3.1. Ejercicios

Graficar el conjunto de pares ordenados en los ejercicios 1-2.

1. $\{(2, 5), (-1, 3)\}$

2. $\{(-3, 4), (-3, 2), (-3, 0), (-3, -2), (-3, -3)\}$

En los ejercicios 3-6 indicar el cuadrante en el que se localiza el punto.

3. $(-2, 1)$

4. $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

5. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

6. $(88, 90)$

Graficar las soluciones de cada ecuación (graficar la ecuación) en los ejercicios 7-14.

7. $y - x = 0$

8. $y = -\frac{1}{2}x + 4$

9. $2x = -5$

10. $2y = 7$

11. $y + x^2 = 0$

12. $y^2 = x + 2$

13. $y = \sqrt{x + 2}$

14. $y = x^3$

En los ejercicios 15-20 encontrar la distancia entre los puntos y el punto medio del segmento que los une.

15. $(4, 3)$ y $(1, 7)$

16. $(5, 10)$ y $(-3, -2)$

17. $(7, -1)$ y $(5, 8)$

18. $(-3, 6)$ y $(2, 7)$

19. $(-6, 2)$ y $(-6, -5)$

20. $(4, -8)$ y $(6, -8)$

21. Si $(3, 2)$ es el punto medio del segmento que une a $(a, 8)$ con $(7, b)$, determinar a y b .

22. Si $\left(\frac{7}{2}, -7\right)$ es el punto medio del segmento que une a (a, b) con $(3, -5)$, determinar a y b .

23. Encontrar todos los números a tales que la distancia de $(a, -2)$ a $(8, 1)$ es igual a 5.

24. Encontrar todos los puntos $(1, b)$ que estén a una distancia de 10 unidades de $(7, 6)$.

25. Utilizar la fórmula de la distancia y el teorema de Pitágoras para determinar si el triángulo ABC con vértices $A(5, 6)$, $B(-2, -1)$ y $C(2, -3)$ es un triángulo rectángulo.

26. Determinar si $(6, -1)$, $(1, -6)$, $(-7, 2)$ y $(-2, 7)$ son vértices de un rectángulo. [Sugerencia: ¿Qué puede decirse acerca de las longitudes de las diagonales de un rectángulo?]

27. **Agricultura.** Un rancho grande está marcado con dispositivos electrónicos en la intersección de cada línea de coordenadas, separadas una milla una de la otra, para localizar manadas de ganado. Si una manada está en el punto $(4, 7)$ y otra en el punto $(9, 3)$, encontrar la distancia entre las dos manadas, aproximando hasta décimas de milla.

28. **Agricultura.** Las manadas de ganado del ejercicio 27 van a combinarse en un punto a medio camino entre ellas. ¿A qué punto debería volar en su helicóptero el capataz del rancho para ayudar a combinar las manadas?
29. **Ecología.** Si la precipitación pluvial fue de 2.5 in en enero, 3.7 in en febrero y 6.3 in en marzo, usar E, F y M para denotar los meses con el propósito de hacer una lista con los pares ordenados que representan estos datos.
30. **Ecología.** En 1970 el número de venados en un área de administración forestal fue de 2 800. Hacia 1975 el número se había reducido a 2 100, pero se elevó a 2 600 en 1980 y a 3 100 en 1985. Presentar estos datos como un conjunto de pares ordenados.

Para repaso

Resolver cada desigualdad en los ejercicios 31-34. Dar las respuestas utilizando tanto desigualdades como intervalos.

31. $x^2 + 5x + 6 > 0$ 32. $4x^2 - 20x + 25 \geq 0$ 33. $\frac{x-5}{2x+3} \leq 0$ 34. $|4x - 3| \geq 1$
35. Considerar la ecuación $x + 2y - 6 = 0$. a) Suponer que $x = 0$ y resolver para y . b) Suponer que $y = 0$ y resolver para x . c) Resolver la ecuación para y en términos de x .

3.2. ECUACIONES LINEALES

Forma general

Una **ecuación lineal** es una ecuación con dos variables x y y que tiene como gráfica a una recta. Tales ecuaciones pueden escribirse en la **forma general**

$$ax + by + c = 0$$

donde a , b y c son números reales constantes, a y b diferentes de cero. Ya que las variables están elevadas sólo a la primera potencia, a las ecuaciones lineales también se les llama **ecuaciones de primer grado**. Como ejemplos,

$$3x + 2y = 5, \quad -4x + 7y = 0, \quad 5y = 6, \quad x - 2 = 0$$

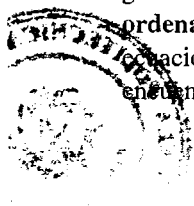
son ecuaciones lineales, mientras que

$$x^2 + y^2 = 6, \quad 3xy = 5, \quad \frac{1}{x} + y = 5, \quad y = x^3$$

no son ecuaciones lineales. Sus gráficas son curvas que no son rectas.

Coordenadas al origen

En la sección 3.1 se graficó una ecuación lineal al trazar varios puntos; ahora bien, sabiendo que la gráfica de una ecuación lineal es una recta, sólo es necesario trazar dos puntos. En la mayoría de las ecuaciones, el procedimiento práctico es usar las **coordenadas al origen**, las cuales son los puntos donde la gráfica cruza los ejes. La intersección con el eje x se denomina **abscisa al origen** y con el eje y se llama **ordenada al origen**. Cualquier abscisa al origen tendrá la forma $(a, 0)$ y puede encontrarse para una ecuación evaluando con $y = 0$ y resolviendo para x . De la misma manera, la ordenada al origen $(0, b)$, se encuentra evaluando con $x = 0$ y resolviendo para y .



Por ejemplo, para graficar $x - 2y - 4 = 0$, hagamos $x = 0$, con lo que se encuentra la ordenada al origen $(0, -2)$, y hagamos $y = 0$, con lo que se obtiene la abscisa al origen $(4, 0)$. La figura 9 muestra la gráfica correspondiente.

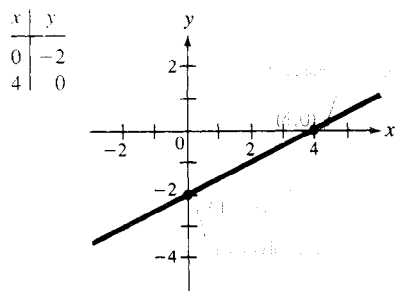


Figura 9. Uso de las Intersecciones.

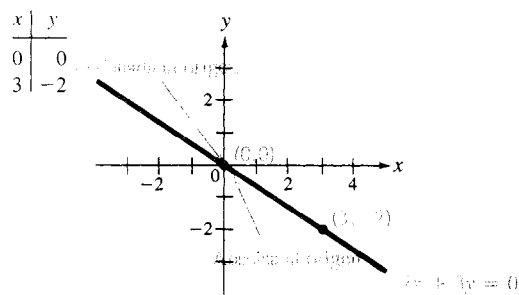


Figura 10. Recta a través del origen.

Para la ecuación $2x + 3y = 0$, un punto $(0, 0)$, es tanto la abscisa al origen como la ordenada al origen. La recta pasa a través del origen y es necesario encontrar otro punto para graficar la ecuación. Si $x = 3$, entonces $y = -2$. La figura 10 muestra la gráfica. Así, una ecuación de la forma $ax + by = 0$ tiene como su gráfica una recta a través del origen.

$$ax + by = 0 \quad \text{Recta a través del origen}$$

Es necesario considerar otros dos casos especiales. Puede mostrarse que una ecuación de la forma $x = a$ tiene como su gráfica una recta vertical.

$$x = a \quad \text{Recta vertical}$$

Asimismo, $y = b$ tiene una recta horizontal como su gráfica.

$$y = b \quad \text{Recta horizontal}$$

Por ejemplo, $2x - 4 = 0$ puede escribirse como $x = 2$ y corresponde a la gráfica mostrada en la figura 11. La gráfica de $y = \frac{5}{2}$ se muestra en la figura 12.

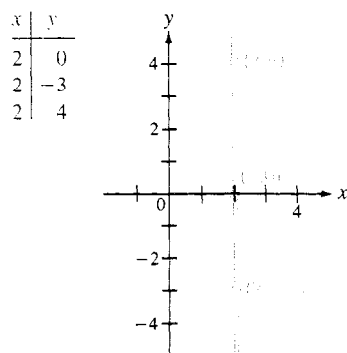


Figura 11. Recta vertical.

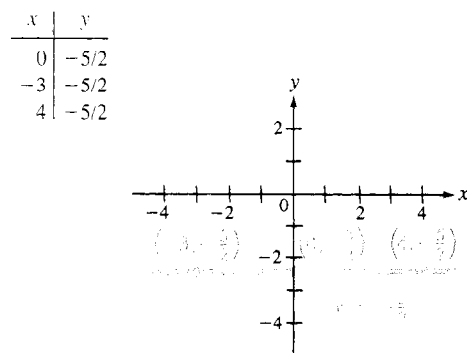


Figura 12. Recta horizontal.



Pendiente

En la gráfica de la figura 9 obsérvese que la recta se inclina hacia arriba al aumentar el valor de x , mientras que en la figura 10 la recta se inclina hacia abajo al aumentar el valor de x . La figura 11 muestra una recta vertical y la figura 12 una recta horizontal. Es posible describir mejor estas diferencias definiendo la *pendiente* de una recta; considérese la figura 13 para entender la definición.

Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos diferentes en una recta no vertical. La **pendiente** m de la recta está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

La pendiente de una recta vertical no está definida.

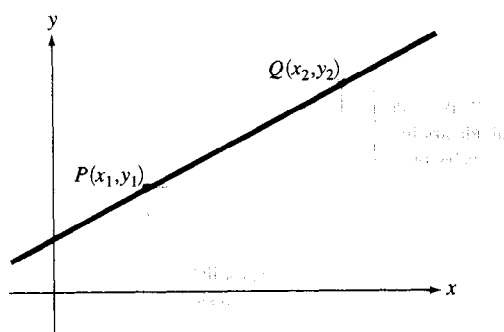


Figura 13. Pendiente de una recta.

NOTA. Ya que $y_2 - y_1$ es el cambio en y , y $x_2 - x_1$ es el cambio en x , la pendiente es una medida de la inclinación de una recta. Además, ya que

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

la pendiente no depende de cuál punto se denomina $P(x_1, y_1)$ y cuál se denomina $Q(x_2, y_2)$.

EJEMPLO 1

Encontrar la pendiente de la recta que pasa a través de los puntos dados.

a) $(6, 3)$ y $(-2, 1)$

Identifíquese $P(x_1, y_1)$ con $(6, 3)$ y $Q(x_2, y_2)$ con $(-2, 1)$.

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{1 - 3}{-2 - 6} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

b) $(-2, 3)$ y $(1, -4)$

Identifíquese $P(x_1, y_1)$ con $(-2, 3)$ $Q(x_2, y_2)$ con $(1, -4)$.

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{-4 - 3}{1 - (-2)} = \frac{-7}{1 + 2} = -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

c) $(4, 3)$ y $(-2, 3)$

Sea $(x_1, y_1) = (4, 3)$ y $(x_2, y_2) = (-2, 3)$.

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{3 - 3}{-2 - 4} = \frac{0}{-6} = 0 \end{aligned}$$

d) $(-2, 0)$ y $(-2, -3)$

Sea $(x_1, y_1) = (-2, 0)$ y $(x_2, y_2) = (-2, -3)$.

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{-3 - 0}{-2 - (-2)} = \frac{-3}{0} \end{aligned}$$

Puesto que $\frac{-3}{0}$ no está definido, la pendiente está indefinida y la recta es vertical.

La figura 14 muestra las rectas a través de los puntos dados en el ejemplo 1. Cada gráfica presenta uno de los cuatro tipos de resultados posibles al determinar la pendiente.

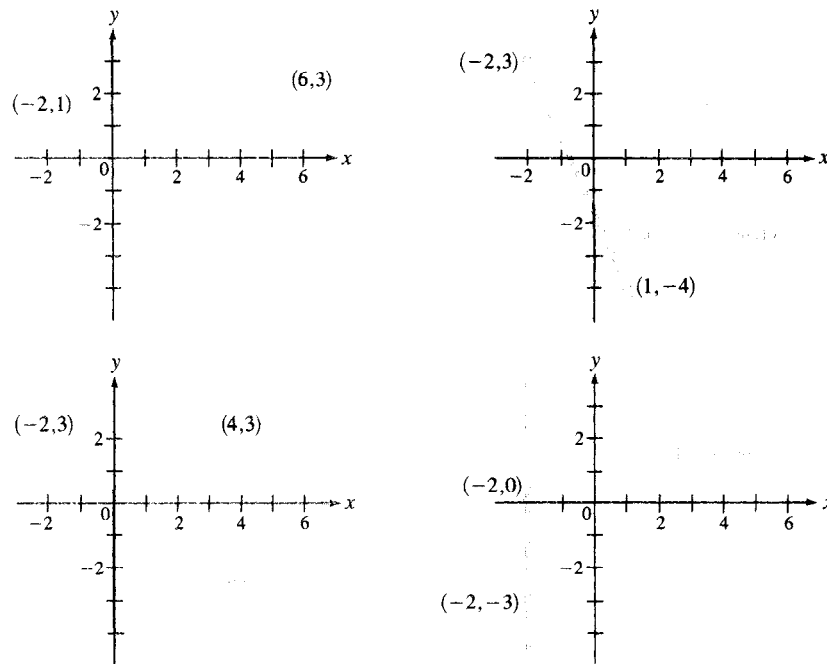


Figura 14. Tipos de pendiente.

Formas de la ecuación de una recta

Al utilizar la noción de pendiente, es posible desarrollar otras formas de la ecuación de una recta. Sea $P(x_1, y_1)$ un punto fijo en la recta con pendiente m . Si (x, y) es cualquier otro punto en la recta con $x \neq x_1$, entonces

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Forma punto-pendiente

Una ecuación para la recta con pendiente m que pasa a través del punto (x_1, y_1) es

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

EJEMPLO 2

Encontrar la forma general de la ecuación de una recta que pasa a través de los puntos $(3, -4)$ y $(6, 1)$. Primero, se determina la pendiente de la recta.

$$m = \frac{1 - (-4)}{6 - 3} = \frac{5}{3} \quad (3, -4) = (x_1, y_1) \text{ y } (6, 1) = (x_2, y_2)$$

Ahora, se usa la forma punto-pendiente y se cambia a la forma general.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) && \text{Ecuación punto-pendiente} \\ y - (-4) &= \frac{5}{3}(x - 3) && (x_1, y_1) = (3, -4) \text{ y } m = \frac{5}{3} \\ y + 4 &= \frac{5}{3}(x - 3) && \\ 3(y + 4) &= 5(x - 3) && \text{Se multiplica por 3} \\ 3y + 12 &= 5x - 15 && \\ -5x + 3y + 27 &= 0 && \\ 5x - 3y - 27 &= 0 && \text{Se multiplica por } -1 \end{aligned}$$

Al sustituir a (x_1, y_1) en la forma punto-pendiente por la ordenada al origen $(0, b)$ se obtiene

$$y - b = m(x - 0)$$

$$y = mx + b.$$

Forma pendiente-ordenada al origen

Una ecuación para la recta con pendiente m y ordenada al origen $(0, b)$ es

$$y = mx + b.$$

Así, conociendo m y $(0, b)$, es posible encontrar una ecuación para la recta. Por ejemplo, si $m = \frac{2}{3}$ y la ordenada al origen es $(0, -5)$, entonces

$$y = mx + b$$

$$y = \frac{2}{3}x - 5.$$

Para poner la ecuación en la forma general,

$$3y = 2x - 15 \quad \text{multiplicamos por 3}$$

$$-2x + 3y + 15 = 0$$

$$2x - 3y - 15 = 0. \quad \text{multiplicamos por } -1$$

Esto muestra que puede obtenerse la forma general a partir de la forma pendiente-ordenada al origen.

Recíprocamente, dada la forma general, $ax + by + c = 0$, es posible determinar la pendiente y la ordenada al origen al escribir la ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen.

EJEMPLO 3

Encontrar la pendiente y la ordenada al origen de la recta $3x + 7y - 14 = 0$.

Ya que la ecuación está en la forma general, primero se convierte a la forma pendiente-ordenada al origen y luego se lee m y b directamente.

$$3x + 7y - 14 = 0$$

$$7y = -3x + 14$$

$$y = -\frac{3}{7}x + \frac{14}{7}$$

$$y = \quad x + \quad$$

Así, $m = -\frac{3}{7}$ (no $-\frac{3}{7}x$) y $(0, b) = (0, 2)$.

Rectas paralelas y perpendiculares

Al escribir cada una de dos rectas diferentes en la forma pendiente-ordenada al origen, es posible determinar si son *paralelas* (nunca se intersecan) o *perpendiculares* (se intersecan en ángulos rectos). Para ello, el teorema siguiente es necesario.

Dadas dos rectas diferentes con pendientes m_1 y m_2 :

1. Las rectas son **paralelas** sí y sólo sí $m_1 = m_2$ (las pendientes son iguales).
2. Las rectas son **perpendiculares** si y sólo si $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ o $m_1 m_2 = -1$ (las pendientes son recíprocas negativas entre sí).

EJEMPLO 4

- a) Determinar si las rectas $3x - 2y + 5 = 0$ y $10x + 15y = 7$ son paralelas o perpendiculares.

$$\begin{array}{rcl} 3x - 2y + 5 = 0 & & 10x + 15y = 7 \\ -2y = -3x - 5 & & 15y = -10x + 7 \\ y = x + \frac{5}{2} & & y = -\frac{10}{15}x + \frac{7}{15} \\ \text{pendiente} = \frac{3}{2} & & y = x + \frac{7}{15} \\ & & \text{pendiente} = -\frac{2}{3} \end{array}$$

Ya que las pendientes son $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$ (recíprocas negativas), las rectas son perpendiculares.

- b) Determinar si las rectas $6x + 3y + 2 = 0$ y $6y = -12x - 4$ son paralelas o perpendiculares.

$$\begin{array}{rcl} 6x + 3y + 2 = 0 & & 6y = -12x - 4 \\ 3y = -6x - 2 & & y = -\frac{12}{6}x - \frac{4}{6} \\ y = -\frac{6}{3}x - \frac{2}{3} & & y = -2x - \frac{2}{3} \\ y = -2x - \frac{2}{3} & & \end{array}$$

Ya que las pendientes son iguales (ambas son -2), podría llegarse a la conclusión de que las rectas son paralelas. Sin embargo, se observa que las ordenadas al origen también son iguales, ambas son

$(0, -\frac{2}{3})$). Por consiguiente, ambas ecuaciones determinan la misma recta.

EJEMPLO 5

Encontrar la forma general de la ecuación de una recta con ordenada al origen $(0, -2)$ perpendicular a una recta con pendiente $-\frac{4}{5}$

$$\begin{array}{rcl} y & = & mx + b \\ y & = & x \\ 4y & = & 5x - 8 \\ -5x + 4y + 8 & = & 0 \\ 5x - 4y - 8 & = & 0 \end{array}$$

EJEMPLO 6**Ingeniería**

En el diseño de una parte para una máquina un ingeniero necesita encontrar la ecuación del bisector perpendicular del segmento que une a los puntos $(-3, 2)$ y $(3, -6)$.

El bisector perpendicular es la recta perpendicular al segmento y que pasa a través de su punto medio. Calcular primero la pendiente del segmento.

$$m = \frac{-6 - 2}{3 - (-3)} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$$

La pendiente de la recta deseada es el recíproco negativo de $-\frac{4}{3}$.

$$-\frac{1}{m} = -\frac{1}{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

Ahora se determina el punto medio.

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \left(\frac{-3 + 3}{2}, \frac{2 + (-6)}{2} \right) = (0, -2)$$

Utilizar la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta con $(0, -2)$ como punto y $\frac{3}{4}$ como pendiente para encontrar la ecuación necesaria para el diseño.

$$y - (-2) = \frac{3}{4}(x - 0)$$

$$y + 2 = \frac{3}{4}x$$

$$4(y + 2) = 3x$$

$$4y + 8 = 3x$$

$$-3x + 4y + 8 = 0$$

$$3x - 4y - 8 = 0$$

3.2. Ejercicios

En los ejercicios 1-10 encontrar las coordenadas al origen y graficar la ecuación.

1. $3x - 2y - 6 = 0$

2. $2x + 3y = 6$

3. $4x + 3y = 12$

4. $2x - 5y = 10$

5. $2x - 3 = 0$

6. $3x + 9 = 0$

7. $y = 3$

8. $3y = -12$

9. $3x - 2y = 0$

10. $5x = -10y$

Encontrar la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados en los ejercicios 11-16.

11. $(6, -2)$ y $(4, 1)$

12. $(5, 3)$ y $(-2, -6)$

13. $(-3, 2)$ y $(-3, -4)$

14. $(7, -2)$ y $(-3, -2)$

15. $(-4, 5)$ y $(1, 5)$

16. $(4, -5)$ y $(4, 8)$

En los ejercicios 17-30 encontrar la forma general de la ecuación de la recta que satisface las condiciones dadas.

17. Con pendiente -2 que pasa a través de $(-3, 5)$.

18. Con pendiente $\frac{1}{3}$ que pasa a través de $(2, -1)$.

19. Con pendiente $\frac{4}{3}$ y abscisa al origen $(3, 0)$.

20. Con pendiente $\frac{1}{7}$ y ordenada al origen $(0, 5)$.

21. Recta horizontal a través de $(6, -5)$.

22. Recta vertical a través de $(6, -5)$.

23. Que pasa a través de $(-3, 4)$ y $(2, 6)$.

24. Que pasa a través de $(3, 0)$ y $(0, -5)$.
 25. Que pasa a través de $(-3, 7)$ y perpendicular a $5x - 10y + 3 = 0$.
 26. Que pasa a través de $(2, 1)$ y paralela a $4x + 8y - 5 = 0$.
 27. Que pasa a través de $(2, 3)$ y paralela a $2y - 3 = 0$.
 28. Que pasa a través de $(2, 3)$ y perpendicular a $2y - 3 = 0$.
 29. Con intersección x $(-5, 0)$ y paralela a $7x + 4 = 0$.
 30. Con intersección y $(0, -5)$ y perpendicular a $7x + 4 = 0$.

Encontrar la pendiente y la ordenada al origen de cada recta en los ejercicios 31-36.

31. $2x - 7y + 5 = 0$ 32. $5x - 2y + 8 = 0$ 33. $8x = -3y + 7$
 34. $-3x - 2y = 6$ 35. $-3y + 6 = 0$ 36. $4x + 11 = 0$

Determinar si el par de rectas en los ejercicios 37-42 son paralelas o perpendiculares.

37. $6x - 2y + 7 = 0$ y $x + 3y - 8 = 0$ 38. $2x - 5 = 0$ y $3x + 1 = 0$
 39. $4x - 2y = -6$ y $10x = 5y + 8$ 40. $3x - 8y + 7 = 0$ y $4x + 6y - 15 = 0$
 41. $3y - 8 = 0$ y $4x + 2 = 0$ 42. $7x - 21y + 8 = 0$ y $12x + 4y - 7 = 0$

43. Utilizar la pendiente para determinar si los puntos $P(4, 3)$, $Q(2, 0)$, y $R(-2, -6)$ son colineales, es decir, si están en la misma recta.
 44. Utilizar la pendiente para determinar si el triángulo con vértices $A(-2, 7)$, $B(-3, 3)$ y $C(-6, 8)$ es un triángulo rectángulo.
 45. A partir de la fórmula punto-pendiente, derivar la forma dos-puntos de la ecuación de una recta.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Utilizar la forma dos-puntos para encontrar la ecuación general de una recta que pasa a través de $(-3, 6)$ y $(2, -4)$.

46. Demostrar que la forma de coordenadas al origen de la ecuación de una recta,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

donde $(a, 0)$ es la abscisa al origen y $(0, b)$ es la ordenada al origen, puede escribirse en la forma general. Utilizar la forma coordenadas al origen para encontrar la forma general de la ecuación de la recta que pasa a través de $(-2, 0)$ y $(0, 5)$.

47. Encontrar la ecuación del bisector perpendicular del segmento que une a $(1, 7)$ con $(-3, -5)$.
 48. Encontrar la forma general de la ecuación del bisector perpendicular de la porción de la recta $x + y = 6$ que se halla en el primer cuadrante.
 49. **Consumo.** Una casa nueva se compró en 85 000 dólares. Después de cinco años, el valor de la casa era de 105 000 dólares. Supóngase que la apreciación en valor está dada por una ecuación lineal. Encontrar la ecuación y el valor de la casa siete años después de la compra original.
 50. **Economía.** Un automóvil nuevo se compró en 14 500 dólares, tres años después su valor era de 9 100 dólares. Supóngase que la depreciación en valor está dada por una ecuación lineal. Encontrar la ecuación y el valor del automóvil cuando tenga una antigüedad de seis años.
 51. Si la casa mencionada en el ejercicio 49 vale ahora 125 000 dólares, ¿hace cuántos años fue comprada?
 52. ¿Cuántos años de antigüedad tendrá el automóvil mencionado en el ejercicio 50 cuando su valor sea de sólo 100 dólares?

53. **Economía.** Si se otorga un préstamo de 1 200 dólares con un interés simple del 9%, la suma que ha de pagarse al final de n años está dada por la ecuación lineal

$$S = 1\,200(1 + 0.09n).$$

- a) Encontrar S cuando $n = 3$.
 b) Encontrar n cuando $S = \$1\,740$ dólares.
54. **Economía.** Si se otorga un préstamo de 1 200 dólares con un interés porcentual simple x (en forma decimal), la suma que ha de pagarse al final de dos años es

$$S = 1\,200(1 + 2x).$$

- a) Encontrar S cuando $x = 0.12$ (12% de interés).
 b) Encontrar la tasa de interés cuando $S = \$1\,428$ dólares.
55. **Química.** En un experimento de laboratorio se produjeron 3 gramos de azufre en 16 minutos y 8 gramos en 36 minutos.
- a) Utilizar el número de gramos (g) para y y el tiempo (t) para x con el propósito de encontrar una ecuación lineal que se ajuste a estos datos.
 b) Utilizar la ecuación para encontrar el número de gramos producidos en 20 minutos.
 c) ¿Por qué puede concluirse que esta ecuación no es exacta cuando $t = 0$? Esto ilustra el hecho de que las ecuaciones empíricas con frecuencia son válidas sólo para valores restringidos de la variable.
56. **Ecología.** Un científico ambiental encontró 30 venados en un área de 800 acres y 50 venados en otra área de 1 200 acres.
- a) Utilizar el número de venados (v) para y y el número de acres (a) para x con el objeto de encontrar una ecuación lineal que relacione el número de venados con el número de acres.
 b) Encontrar el número esperado de venados en 960 acres.
 c) Utilizar 20 acres para explicar por qué esta ecuación no es exacta para un número pequeño de acres.

En los ejercicios 57-58 encontrar la distancia entre los dos puntos y el punto medio del segmento que los une.

57. $(-1, 2)$ y $(4, 6)$

58. $(4, -5)$ y $(-4, 2)$

En los ejercicios 59-60 determinar los valores de x para los cuales la expresión dada no es un número real.

59. $\frac{2}{(x+1)(x-5)}$

60. $\frac{1}{\sqrt{x+3}}$

Las relaciones o correspondencias están alrededor de cualquier individuo. Por ejemplo,

1. A cada persona le corresponde una estatura.
2. A cada compañía le corresponde un número de empleados.

3. A cada cantidad de dinero otorgada en préstamo le corresponde un monto que debe reembolsarse después de un año.
4. A cada número en $\{1, 2, 3, 4\}$ le corresponde uno o más números en el conjunto cuyos elementos son mayores o iguales que el número.

Definición de relación

A la correspondencia entre un primer conjunto de objetos, el **dominio**, y un segundo conjunto de objetos, la **imagen**, se le denomina **relación** si a cada elemento del dominio le corresponde *uno o más* elementos de la imagen.

Los cuatro ejemplos antes mencionados son relaciones. Nótese que en las primeras tres relaciones sólo un elemento de la imagen se relaciona con un elemento del dominio. Éstos son ejemplos de *funciones*.

Definición de función

Una **función** es una relación con la propiedad de que a cada elemento del dominio le corresponde *uno y sólo un* (exactamente uno) elemento de la imagen.

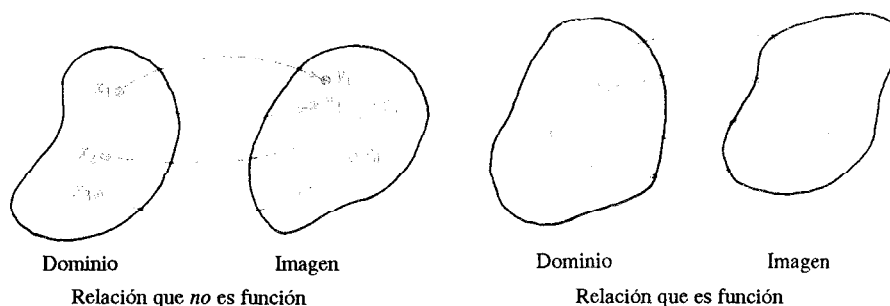


Figura 15. Relaciones y funciones.

La figura 15 ilustra la diferencia entre una relación que no es función y una relación que sí es función.

A cada persona le corresponde una y sólo una estatura; en consecuencia, esa relación es una función. Sin embargo, obsérvese que la relación \leq (menor que o igual que) en el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ no es una función ya que, por ejemplo,

$$2 \leq 2, \quad 2 \leq 3, \quad 2 \leq 4.$$

Es decir, 2 se relaciona con tres números, 2, 3 y 4.

Todas las ecuaciones lineales presentadas en la sección 3.2, excepto aquellas que representan rectas verticales, son ejemplos de funciones. Si la ecuación puede escribirse en la forma pendiente-ordenada al origen, $y = mx + b$, entonces a cada x le corresponde una y sólo una y . Por lo regular, las letras f y g se utilizan para referirse a las funciones. Por ejemplo, para $y = 2x - 3$, se escribe

$$f(x) = 2x - 3$$

donde $f(x)$ se lee "f de x" o "el valor de f en x". La instrucción de encontrar y o $f(x)$ cuando $x = -4$ se escribe "encontrar $f(-4)$ ". Así,



$$f(-4) = 2(-4) - 3 = -8 - 3 = -11.$$

Esto significa que el número correspondiente $x = -4$ es $y = -11$ o $f(-4) = -11$. Por supuesto, esto también puede simbolizarse usando el par ordenado $(-4, -11)$. Ya que $f(x)$ o y depende de x , se denomina a x la **variable independiente** y a y la **variable dependiente**.

Tipos de funciones

A la clase general de funciones que tienen como gráfica una línea recta y que pueden escribirse como

$$f(x) = mx + b$$

se les denomina **funciones lineales**. En estas funciones están incluidas las **funciones constantes**

$$f(x) = c \quad \text{donde } c \text{ es una constante}$$

y la **función identidad**

$$f(x) = x \quad \text{donde } x \text{ es cualquier número real}$$

Otra función, estudiada con detalle en la sección 3.6, es la **función cuadrática**.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

EJEMPLO 1

Encontrar $f(0)$, $f(-3)$, $f(a)$ y $f(x + h)$ para cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = -5x + 3$

$$f(0) = -5(0) + 3 = 3$$

$$f(a) = -5(a) + 3 = -5a + 3$$

$$f(-3) = -5(-3) + 3 = 18$$

$$f(x + h) = -5(x + h) + 3 = -5x - 5h + 3$$

b) $f(x) = 6$

$$f(0) = 6$$

$$f(a) = 6$$

$$f(-3) = 6$$

$$f(x + h) = 6$$

c) $f(x) = x$

$$f(0) = 0$$

$$f(a) = a$$

$$f(-3) = -3$$

$$f(x + h) = x + h$$

d) $f(x) = -2x^2 + 5x - 4$

$$f(0) = -2(0)^2 + 5(0) - 4 = -4$$

$$f(-3) = -2(-3)^2 + 5(-3) - 4 = -18 - 15 - 4 = -37$$

$$f(a) = -2(a)^2 + 5(a) - 4 = -2a^2 + 5a - 4$$

$$f(x + h) = -2(x + h)^2 + 5(x + h) - 4 = -2(x^2 + 2xh + h^2) + 5x + 5h - 4$$

$$= -2x^2 - 4xh - 2h^2 + 5x + 5h - 4$$

$$= -2x^2 + (5 - 4h)x - 2h^2 + 5h - 4$$



Dominio

Para definir por completo una función es necesario no sólo establecer la correspondencia, sino también especificar el dominio. Cuando el dominio no se enuncia, se supondrá que consta de todos los números reales para los cuales la función está definida. Las funciones lineales y las funciones cuadráticas están definidas para todos los números reales. Sin embargo, si

$$g(x) = \sqrt{x+2}, \quad \text{entonces } g \text{ no está definida para } x < -2,$$

entonces el dominio de g son todos los números reales x tales que $x+2 \geq 0$ o $x \geq -2$. Obsérvese que la imagen de g es el conjunto de los números reales $g(x) \geq 0$.

EJEMPLO 2

Encontrar el conjunto de todos los números reales para los cuales la función está definida.

a) $h(x) = \frac{1}{x+2}$

Esta función está definida para todos los números reales, excepto cuando $x+2=0$. Así, el dominio es el conjunto de todos los números reales, excepto $x=-2$.

b) $k(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2+1}}$

Esta función está definida para todos los números reales ya que $x^2+1 > 0$ para todas las x . Así, el dominio es el conjunto de todos los números reales.

c) $f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{(x-1)(x+2)}$

Hay tres condiciones:

$$\begin{aligned} 3-x &\geq 0 & \text{o} & & 3 &\geq x \\ x-1 &\neq 0 & \text{o} & & x &\neq 1 \\ x+2 &\neq 0 & \text{o} & & x &\neq -2 \end{aligned}$$

Así, el dominio es el conjunto de todos los números reales x tales que $x \leq 3$, $x \neq 1$ y $x \neq -2$.

PRECAUCIÓN. Como ilustra el ejemplo 2, debe excluirse de un dominio a los números que anulan al denominador o dan un valor negativo bajo un radical con índice par.

EJEMPLO 3

Menudeo

Un minorista recibió una remesa de camisas, las cuales adquirió a 32 dólares cada una. Con el propósito de encontrar el precio total que sus clientes tendrán que pagar para que él obtenga un margen determinado de ganancia bruta, quiere formular una relación entre el precio total T y el margen porcentual de ganancia bruta x . a) Encontrar la función del precio total T si el margen de ganancia bruta es x por ciento y hay un impuesto

sobre las ventas de 5% en el precio marcado. b) Encontrar el precio total cuando el margen de ganancia bruta es de 25%.

- a) Sea x = margen porcentual de ganancia bruta en notación decimal.
El precio de venta de cada camisa es el costo más el margen de ganancia bruta.

$$32 + 32x = 32(1 + x)$$

El precio total es $32(1 + x)$ más el 5% de $32(1 + x)$.

$$\begin{aligned} T(x) &= 32(1 + x) + 0.05(32)(1 + x) \\ &= 32(1 + x)[1 + 0.05] \\ &= 32(1.05)(1 + x) \\ &= 33.6(1 + x) \end{aligned}$$

- b) $T(x) = 33.6(1 + x)$

$$\begin{aligned} T(0.25) &= 33.6(1 + 0.25) \\ &= \$42.00 \end{aligned}$$

Así, si al precio de cada camisa se le aumenta 25%, el precio total es 42 dólares.

EJEMPLO 4

Ingeniería

Se van a pintar varios tanques cilíndricos de almacenamiento en toda su superficie exterior, cada tanque mide 10 m de largo y tiene un radio de r metros. a) Si el trabajo de pintura cuesta 0.22 de dólar por metro cuadrado, expresar el costo C de pintar un tanque como función del radio r . b) Encontrar el costo de pintar un tanque con un radio de 2.6 m.

- a) Sea r = radio del tanque cilíndrico.
Entonces $2\pi r^2$ = área de ambos extremos del tanque,
 $2\pi r(10)$ = área exterior del cilindro abierto del tanque,
 $2\pi r^2 + 20\pi r$ = área exterior total del tanque.
El costo total C es el costo por metro cuadrado por el área total.

$$\begin{aligned} C(r) &= 0.22[2\pi r^2 + 20\pi r] \\ &= 0.22(2\pi)r(r + 10) \\ &\approx 1.38r(r + 10) \end{aligned}$$

- b) Ahora, encontrar $C(2.6)$.

3.3. Ejercicios

Determinar cuál de las relaciones dadas en los ejercicios 1-6 es una función si x es la variable independiente y y la variable dependiente.

1. $x = 2y + 5$

2. $y = 5x^2$

3. $y = \sqrt{x-1}$

4. $x = 5y^2$

5. $y = \frac{3x^2 - 2}{x + 1}$

6. $x^2 = \frac{y-1}{y+1}$

En los ejercicios 7-12 la función se describe por completo al establecer la relación y el dominio. Determinar la imagen.

7. $f(x) = 5x - 3$; $\{1, 2, 3\}$

8. $f(x) = x^2 - 1$; $\{-1, 0, 1, 2\}$

9. $g(x) = \sqrt{x+2}$; $x \geq -2$

10. $g(x) = \frac{1}{x}$; $x > 0$

11. $h(x) = \frac{1}{x-3}$; todos los números reales excepto 3

12. $h(x) = \frac{-1}{x^2}$; todos los números reales excepto 0

Determinar todos los números reales para los cuales cada función en los ejercicios 13-18 está definida.

13. $f(x) = 7x - 8$

14. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

15. $g(x) = \sqrt{2-x}$

16. $h(x) = \frac{(x+5)(x-5)}{x^2-25}$

17. $k(x) = \frac{\sqrt{x+8}}{(x+2)(x-3)}$

18. $k(x) = \frac{\sqrt{8-x}}{x(x+5)}$

Utilizar la palabra más adecuada, *identidad*, *constante*, *lineal* o *cuadrática*, para describir la función en los ejercicios 19-24.

19. $f(x) = x$

20. $g(x) = x^2 + 2$

21. $h(x) = 1 - x$

22. $h(x) = -x$

23. $k(x) = 14$

24. $k(x) = (x+1)(x-1)$

En los ejercicios 25-30 determinar $f(0)$, $f(1)$, $f(-3)$, $f(a)$, y $f(a-1)$.

25. $f(x) = 5x - 3$

26. $f(x) = x^2 - 10$

27. $f(x) = 7$

28. $f(x) = -8$

29. $f(x) = |x-5|$

30. $f(x) = |x| - 5$

En los ejercicios 31-34 determinar $h(a^2)$, $[h(a)]^2$, $h\left(\frac{1}{a}\right)$, y $\frac{1}{h(a)}$.

31. $h(x) = 3x - 7$

32. $h(x) = 2x^2 - 5$

33. $h(x) = \frac{1}{x} + 6$

34. $h(x) = \frac{-1}{x+6}$

En los ejercicios 35-38 determinar $f(1+h)$, $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$, $f(x+h)$, y $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

35. $f(x) = x + 5$

36. $f(x) = -3x - 4$

37. $f(x) = x^2 + 2$

38. $f(x) = 3x^2 - 5x - 7$

- 39. Menudeo.** Un minorista desea subir el precio de los vestidos en un 28.5%. a) Si c es el costo de cada vestido, determinar la función S que representa el precio de venta. b) ¿Cuál es el precio de venta de un vestido que cuesta 56 dólares?
- 40. Menudeo.** La Tienda de Lori ha rebajado el precio de los suéteres en un 12.5%. a) Si s es el precio de venta de un suéter, encontrar una función P que represente el precio rebajado. b) ¿Cuál sería el precio de venta de un suéter cuya etiqueta original indicaba 44 dólares?
- 41. Menudeo.** La Tienda Pant por regla general tiene un margen de ganancia bruta del 25% en pantalones. Los pantalones que no se venden se rectifican con un descuento porcentual con base en el precio de venta. a) Si x representa este porcentaje en notación decimal, determinar una función S para el precio de descuento de pantalones cuyo costo sea de 40 dólares por par. b) ¿Cuál sería una función T que representara el precio total si se agregara un

- impuesto sobre las ventas de 5%? c) Encontrar el descuento porcentual que hace que el precio de descuento (excluyendo al impuesto sobre las ventas) sea el mismo que el costo original.
42. **Menudeo.** Un negociante de aparatos electrodomésticos sube un x por ciento (x en notación decimal) el precio de todos los productos. Una venta con 50% de descuento se inicia al mes siguiente. a) Encontrar una función S que represente el precio de venta de un tostador que originalmente costaba 30 dólares. b) ¿Cuál sería una función T que representara el precio total si se agregara un impuesto sobre las ventas de 6%? c) ¿Cuál tendría que ser el alza si el precio de venta (excluyendo al impuesto sobre las ventas) tuviera que estar 3 dólares por debajo del costo original? original?
43. **Ingeniería.** Se van a aislar tanques esféricos de radio r a un costo de 1.25 dólares por pie cuadrado. a) Encontrar el costo total T para el trabajo de aislamiento como función de r . b) Encontrar el costo total cuando $r = 9.6$ ft.
44. **Agricultura.** Si llenar un tanque esférico, cuyo radio es de r metros, con fertilizante líquido cuesta 0.03¢ (0.0003 dólares) por litro. a) Encontrar el costo C (en dólares) como función de r . b) Encontrar C para un tanque con un radio de 5.2 m. [Indicación: $1 \text{ m}^3 = 1000$ litros]
45. **Minería.** Los datos empíricos han mostrado que el costo en dólares por extraer x por ciento de un metal de una tonelada de mineral está dado por la función $C(x) = 265.9x^2 - 36.8$, donde $0.75 \leq x \leq 0.95$. a) Encontrar la imagen de esta función sobre el dominio $0.75 \leq x \leq 0.95$. b) Utilizar el número $x = 0.30$ fuera del dominio para mostrar por qué la función se restringe a su dominio.
46. **Ecología.** Se ha encontrado que el costo de limpiar a fondo un pequeño derrame de petróleo está dado por la función $C(x) = \frac{582.6}{1-x} - 726.4$, $0.5 \leq x \leq 0.9$, donde x es el porcentaje del derrame removido. a) Determinar la imagen de la función para el dominio $0.5 \leq x \leq 0.9$. b) Utilizar una limpieza del 15% para mostrar por qué la función se restringe a su dominio.
47. Encontrar la ecuación de la recta que pasa a través de $(-1, 3)$ y $(2, 4)$.
48. Encontrar la ecuación de la recta con ordenada al origen $(0, -3)$ que es perpendicular a $4x + 2y - 7 = 0$.
49. Encontrar la ecuación de la recta que pasa a través de $(8, 5)$ y que es perpendicular al eje x .
50. Encontrar la ecuación del bisector perpendicular del segmento que une a las coordenadas al origen de $5x - 2y = 10$.
51. Encontrar las coordenadas al origen y graficar la ecuación $2x - 5 = 0$.
52. Encontrar la pendiente de la recta que pasa a través de los puntos $(-2, 4)$ y $(-8, -3)$.

FIGURA 16

Criterio de la recta vertical

Vamos a investigar ahora la naturaleza de la gráfica de una función. Por definición, una función tiene la propiedad de que para cada x en el dominio hay una y sólo una y en la imagen. Así, si se dibuja una recta vertical a través de algún punto en el eje x cruzará la gráfica de una función en no más de un punto. Utilizando este **criterio de la recta vertical** en las gráficas de la figura 16, se observa que **a** y **b** son gráficas de funciones pero **c** y **d** no.

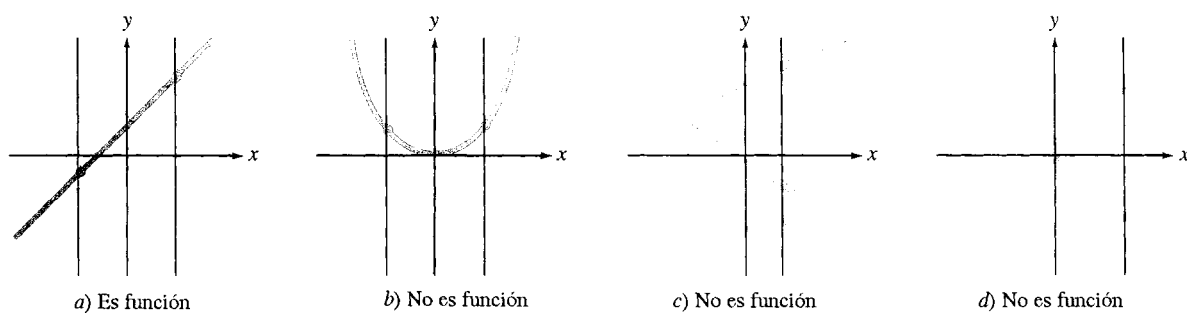


Figura 16. Prueba de la recta vertical.

Funciones crecientes, decrecientes y constantes

La gráfica de una función puede clasificarse usando las palabras *creciente*, *decreciente* y *constante*. La gráfica de una función lineal será creciente si la pendiente es positiva, decreciente si la pendiente es negativa y constante si la pendiente es nula. Las gráficas de $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$, $g(x) = -2x + 4$, y $h(x) = 3$ se utilizan para ilustrar estos tres casos en la figura 17.

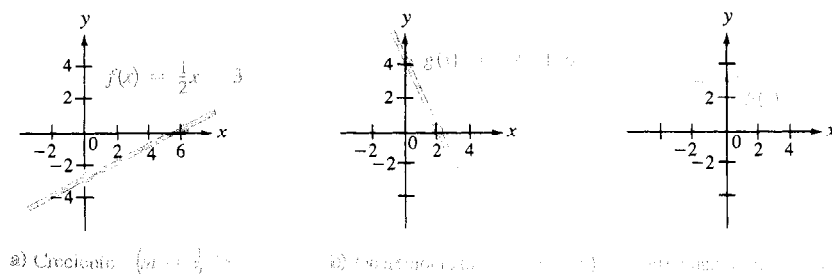


Figura 17. Funciones lineales.

Si a y b son números cualesquiera en un intervalo I en el dominio de f , entonces

1. f es **creciente** en I cada vez que $a < b$, entonces $f(a) < f(b)$.
2. f es **decreciente** en I cada vez que $a < b$, entonces $f(b) < f(a)$.
3. f es **constante** en I si $f(a) = f(b)$ para todas a y b en I .

Así, para una función creciente, y aumenta al aumentar x , y para una función decreciente, y disminuye al aumentar x .

Las funciones lineales en la figura 17 tienen una de estas propiedades para todos los valores de x . Algunas funciones crecerán en un intervalo y decrecerán en otro. Considérese la **función valor absoluto**,

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Para graficar esta función, considerar $f(x) = x$ para toda $x \geq 0$ y $f(x) = -x$ para toda $x < 0$. La figura 18 muestra la gráfica.

x	$f(x)$
-5	5
-1	1
0	0
1	1
5	5

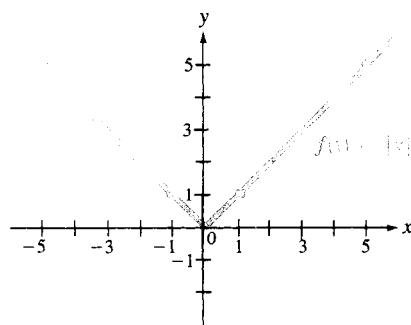


Figura 18. Función valor absoluto.

Obsérvese que para $x \leq 0$ la función es decreciente mientras que para $x \geq 0$ es creciente.

EJEMPLO 1

Graficar $g(x) = -x^2 + 3$ y determinar los valores de x para los cuales g es creciente y para los cuales g es decreciente.

x	$g(x)$
0	3
1	2
-1	2
2	-1
-2	-1
3	-6
-3	-6

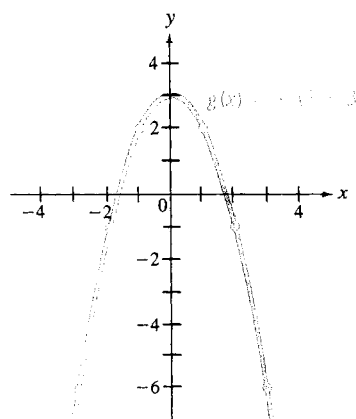
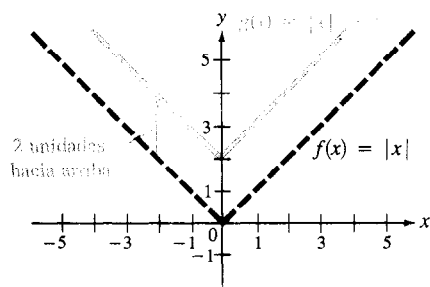


Figura 19. Función cuadrática.

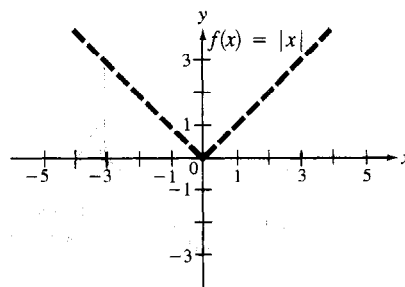
Como indica la figura 19, g es creciente para $x \leq 0$ y decreciente para $x \geq 0$. \square

Desplazamientos en gráficas

En seguida se procede a utilizar la función valor absoluto mostrada en la figura 18 para analizar los desplazamientos en las gráficas. Supóngase que se grafican las funciones $g(x) = |x| + 2$ y $h(x) = |x| - 3$ en la figura 20. La gráfica de $f(x) = |x|$ se muestra con líneas punteadas.



a) Desplazamiento hacia arriba



b) Desplazamiento hacia abajo

Figura 20

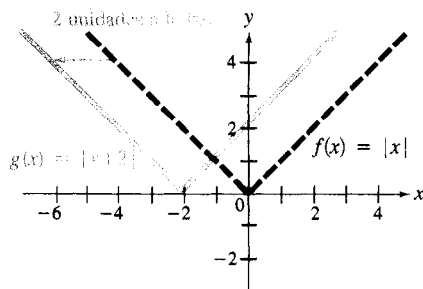
Obsérvese que la gráfica de $g(x) = |x| + 2$ en la figura 20 a) es la gráfica de $f(x) = |x|$ desplazada dos unidades hacia arriba, y $h(x) = |x| - 3$ en la figura 20 b) está desplazada tres unidades hacia abajo. Así, g puede obtenerse de f mediante un desplazamiento vertical de dos unidades hacia arriba. La función h requiere un desplazamiento vertical de tres unidades hacia abajo.

Desplazamientos verticales en una función

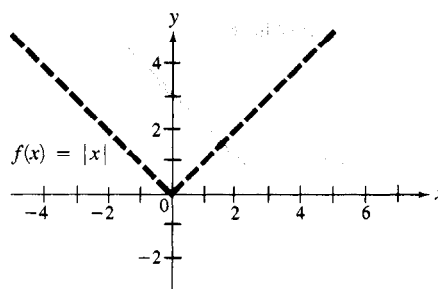
Sea c un número positivo.

1. Para obtener la gráfica de $f(x) + c$ se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia arriba.
2. Para obtener la gráfica de $f(x) - c$ se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia abajo.

Los desplazamientos verticales son un tipo de cambio en una gráfica llamado **transformación**. Otra transformación es un desplazamiento horizontal ilustrado por las gráficas de las funciones $g(x) = |x + 2|$ y $h(x) = |x - 3|$ en la figura 21. La gráfica de $f(x) = |x|$ se muestra con líneas punteadas.



a) Desplazamiento hacia la izquierda



b) Desplazamiento hacia la derecha

Figura 21

La figura 21 a) muestra que la gráfica de $g(x) = |x + 2|$ está desplazada dos unidades hacia la izquierda de $f(x) = |x|$. En la figura 21 b), $h(x) = |x - 3|$ está desplazada tres unidades hacia la derecha de $f(x) = |x|$.

Desplazamientos horizontales en una función

Sea c un número positivo.

1. Para obtener la gráfica de $f(x + c)$ se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia la izquierda.
2. Para obtener la gráfica de $f(x - c)$ se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia la derecha.

EJEMPLO 2

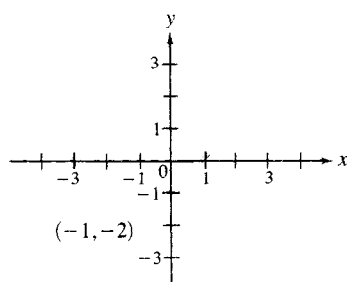
Graficar cada función usando los desplazamientos verticales y horizontales de $f(x) = |x|$.

a) $g(x) = |x + 1| - 2$

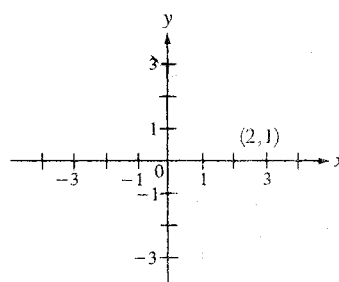
Ésta es una función de la forma $f(x + c_1) - c_2$ para $c_1 = 1$ y $c_2 = 2$. Por consiguiente, la gráfica $f(x)$ se desplaza una unidad hacia la izquierda y dos unidades hacia abajo como en la figura 22 a).

b) $h(x) = |x - 2| + 1$

Ésta es una función de la forma $f(x - c_1) + c_2$ donde $c_1 = 2$ y $c_2 = 1$. Esto significa que la gráfica de $f(x)$ se desplaza dos unidades hacia la derecha y una unidad hacia arriba como muestra la figura 22 b).



a) Desplazamiento hacia la izquierda y hacia abajo



b) Desplazamiento hacia la derecha y hacia arriba

Figura 22

EJEMPLO 3

Utilizando la gráfica de $f(x) = x^2$ en la figura 23 a), encontrar la gráfica de la función dada.

a) $g(x) = -x^2$

Obsérvese que cada ordenada de $g(x) = -x^2$ es el negativo de la ordenada correspondiente de $f(x) = x^2$. Así, la gráfica es la reflexión de $f(x)$ con respecto al eje x . Véase figura 23 b).

b) $h(x) = 3x^2$

Cada ordenada de $f(x) = x^2$ está multiplicada por 3. Así, para cualquier x la ordenada de $h(x)$ es tres veces la ordenada de $f(x)$. Véase figura 23 c).

c) $k(x) = \frac{1}{2}x^2$

Cada ordenada de $f(x) = x^2$ está multiplicada por $1/2$ o dividida entre 2. Así, para cualquier x la gráfica de $h(x)$ tiene la mitad de la altura de $f(x)$. Véase figura 23 d).

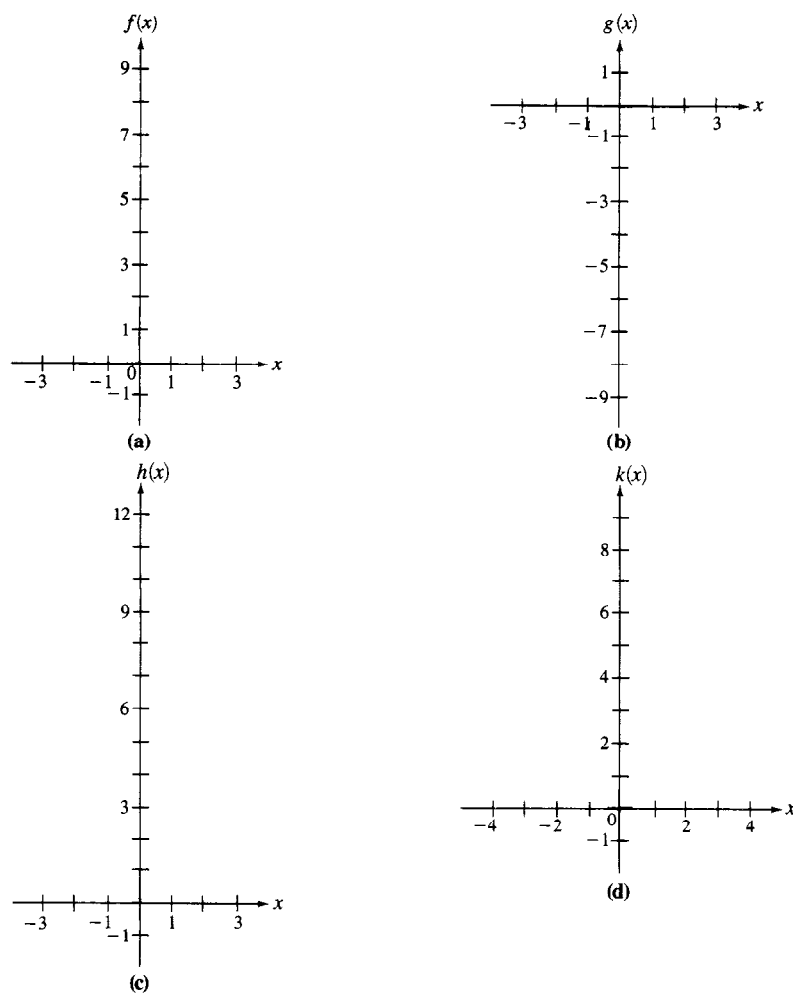


Figura 23

Funciones pares e impares

Cada una de las gráficas expuestas en la figura 23 es simétrica con respecto al eje y . Obsérvese que $f(x) = f(-x)$, es decir, la gráfica tiene la misma ordenada para x y $-x$.

Si para toda x en el dominio de f ,

1. $f(x) = f(-x)$ entonces f es una **función par**;
2. $f(x) = -f(-x)$ entonces f es una **función impar**.

EJEMPLO 4

Determinar si la función dada es par o impar.

a) $f(x) = -x^2 + 3$

Debe determinarse si $f(x) = f(-x)$ o $f(x) = -f(-x)$.



$$f(-x) = -(-x)^2 + 3 = -x^2 + 3 = f(x)$$

Así, f es par. La gráfica mostrada en la figura 24 a) es simétrica con respecto al eje y . Así, para $(x, f(x))$ en la gráfica $(-x, f(x))$ está también en la gráfica.

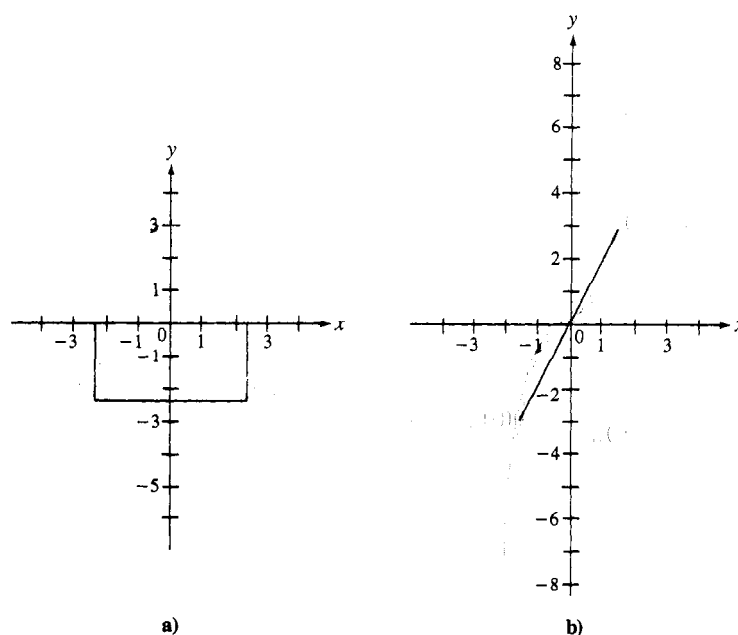


Figura 24. Funciones pares e impares.

b) $g(x) = x^3$

$$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$$

Ya que $g(-x) = -g(x)$ es equivalente a $g(x) = -g(-x)$, la función es impar. Obsérvese que la gráfica de g en la figura 24 b) es simétrica con respecto al origen; es decir, para $(x, g(x))$ en la gráfica $(-x, -g(x))$ está también en la gráfica.

c) $h(x) = x^3 + x^2 - 1$

$$h(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - 1 = -x^3 + x^2 - 1$$

Ya que $h(-x) \neq h(x)$ y $h(-x) \neq -h(x)$, la función no es par ni impar.

Pruebas de simetría

Para las relaciones en general, la prueba de simetría con respecto al eje y consiste en reemplazar a x por $-x$. Si la ecuación no se altera, la gráfica es simétrica con respecto al eje y . Por ejemplo, considérese la ecuación de un círculo con centro en el origen y radio 3, $x^2 + y^2 = 9$. Reemplácese x por $-x$.

$$\begin{aligned} (-x)^2 + y^2 &= 9 \\ x^2 + y^2 &= 9 \end{aligned}$$



Ya que $(-x)^2 = x^2$, la gráfica es simétrica con respecto al eje y . Reemplácese y por $-y$.

$$x^2 + (-y)^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

Esto significa que la gráfica es simétrica con respecto al eje x . Obsérvese que una gráfica que es simétrica con respecto al eje x no puede ser la gráfica de una función.

La gráfica de $x^2 + y^2 = 9$ también es simétrica con respecto al origen. Reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ para verificarlo.

$$(-x)^2 + (-y)^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

Criterios de simetría

Si la ecuación permanece inalterada cuando:

1. x se reemplaza por $-x$, hay simetría con respecto al eje y .
2. y se reemplaza por $-y$, hay simetría con respecto al eje x .
3. x se reemplaza por $-x$ y y se reemplaza por $-y$, hay simetría con respecto al origen.

EJEMPLO 5

Analizar la simetría de cada relación.

a) $y = |x| + 6$

Reemplácese x por $-x$.

$$y = 2|-x| + 6 = 2|x| + 6.$$

Reemplácese y por $-y$.

$$-y = 2|x| + 6$$

Reemplácese x por $-x$ y y por $-y$.

$$-y = 2|-x| + 6 = 2|x| + 6$$

b) $y^2 = x - 5$

Reemplácese x por $-x$.

$$y^2 = (-x) - 5 = -x - 5$$

Reemplácese y por $-y$.

$$(-y)^2 = x - 5$$

$$y^2 = x - 5$$

Al considerar los dos primeros análisis juntos, puede concluirse que la relación no es simétrica con respecto al origen.

c) $y^4 + x^2 = 5$

Reemplazar x por $-x$ y y por $-y$.

$$(-y)^4 + (-x)^2 = 5$$

$$y^4 + x^2 = 5$$

Obsérvese que la gráfica es simétrica con respecto al eje y y al eje x .

d) $y^4 + x^2 = xy$

Reemplácese x por $-x$ y y por $-y$.

$$(-y)^4 + (-x)^2 = (-x)(-y)$$

$$y^4 + x^2 = xy$$

Reemplácese x por $-x$.

$$y^4 + (-x)^2 = (-x)y$$

$$y^4 + x^2 = -xy$$

De manera análoga, la gráfica no es simétrica con respecto al eje x .

Gráficas que no son curvas continuas

Esta sección concluye al considerar funciones cuyas gráficas no son curvas continuas. Por ejemplo, considérense las siguientes funciones.

$$f(x) = \begin{cases} -2, & x \leq -3 \\ x - 1, & -3 < x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

Esta función se define mediante diferentes relaciones en diversos intervalos de su dominio. En la figura 25, el punto oscuro en las discontinuidades de la gráfica indica el valor de la función. Hay un punto hueco en la otra parte de la curva para este valor de x .

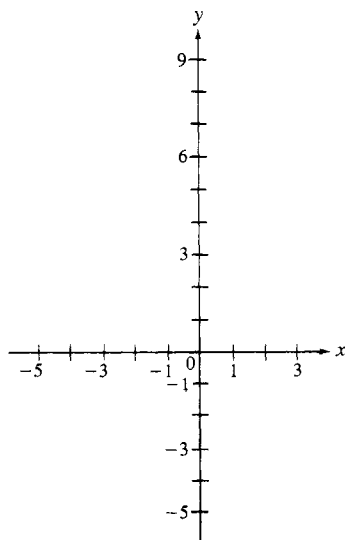


Figura 25. Curva discontinua.

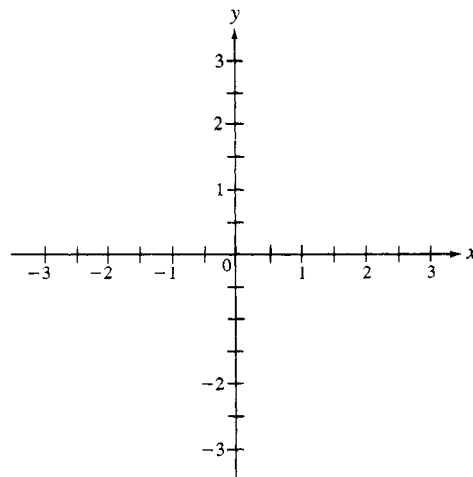


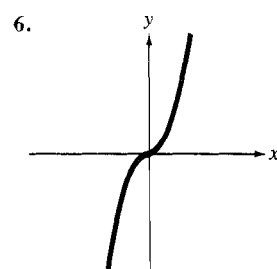
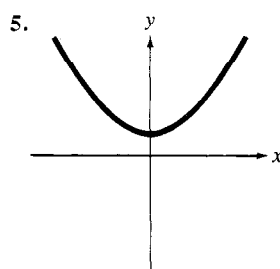
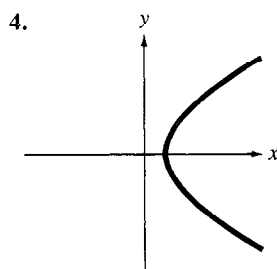
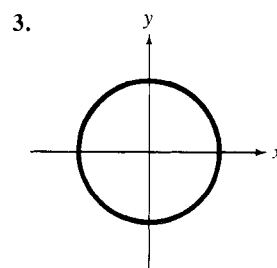
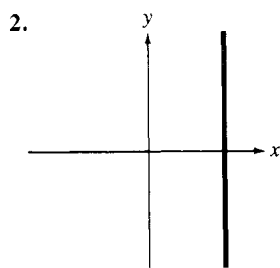
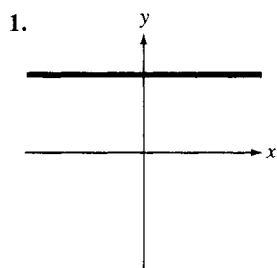
Figura 26. Función mayor entero.

La gráfica de la figura 26 muestra la **función mayor entero**, la cual se denota mediante

y se define como el entero más grande n tal que $n \leq x$. Así, $f(x) = [x] = -2$ para $-2 \leq x < -1$ y $f(x) = [x] = 1$ para $1 \leq x < 2$. Obsérvese que $[\sqrt{2}] = 1$, $[-1.4] = -2$ y $[\pi] = 3$.

3.4. Ejercicios

Utilizar el criterio de la recta vertical en los ejercicios 1-6 para determinar si cada gráfica es la gráfica de una función.

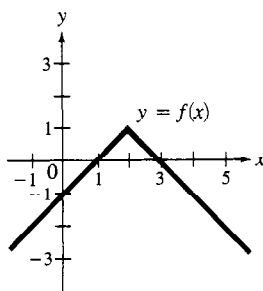


En los ejercicios 7-14 graficar la función y determinar los valores de x para los cuales la función crece y los valores para los cuales decrece.

- | | | | |
|----------------------|----------------------|-------------------------|-----------------------|
| 7. $f(x) = 5x - 3$ | 8. $g(x) = -2x$ | 9. $h(x) = -4$ | 10. $h(x) = 4$ |
| 11. $k(x) = x - 2$ | 12. $f(x) = x + 1 $ | 13. $g(x) = -(x - 3)^2$ | 14. $g(x) = x(x - 2)$ |

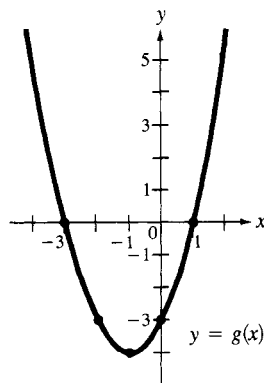
La gráfica de f se da en la figura. Utilizar ésta para bosquejar la gráfica de cada función en los ejercicios 15-22.

- | | | |
|------------------------|------------------------|--------------------|
| 15. $y = f(x) + 3$ | 16. $y = f(x) - 2$ | 17. $y = f(x + 3)$ |
| 18. $y = f(x - 2)$ | 19. $y = -f(x)$ | 20. $y = 2f(x)$ |
| 21. $y = f(x + 3) - 2$ | 22. $y = f(x - 3) + 2$ | |

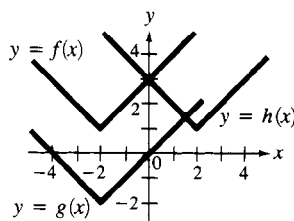


La gráfica de g se da en la figura. Utilizar ésta para bosquejar la gráfica de cada función en los ejercicios 23-30.

- | | | |
|------------------------|---------------------------|----------------------------|
| 23. $y = g(x) - 1$ | 24. $y = g(x) + 4$ | 25. $y = g(x - 3)$ |
| 26. $y = g(x + 1)$ | 27. $y = \frac{1}{2}g(x)$ | 28. $y = -\frac{3}{4}g(x)$ |
| 29. $y = g(x - 2) + 3$ | 30. $y = g(x + 1) - 1$ | |



Utilizar las gráficas de f , g y h , dadas en la figura, para los ejercicios 31-34.



31. Determinar $g(x)$ en términos de $f(x)$.

33. Determinar $h(x)$ en términos de $g(x)$.

32. Determinar $h(x)$ en términos de $f(x)$.

34. Determinar $g(x)$ en términos de $h(x)$.

En los ejercicios 35-40 determinar si cada función es par o impar.

35. $f(x) = 2x^3 - 3x$

36. $f(x) = -4x^6 + x^4$

37. $h(x) = 0$

38. $h(x) = 3$

39. $k(x) = 3|x| - 5$

40. $k(x) = 3x^2 - 2x + 1$

Sin graficar, determinar la simetría de las gráficas en los ejercicios 41-48.

41. $y^2 + x^2 = 8$

42. $xy = 5$

43. $y = 3x^2 + x^4$

44. $x^2 + xy^2 = 5$

45. $y = -3x^2 + 2x$

46. $y = \sqrt{x}$

47. $x^2y + xy^2 = 0$

48. $(x + y)(x - y) = 8$

Graficar las funciones en los ejercicios 49-54. La función mayor entero se escribe $[x]$.

49. $f(x) = \begin{cases} 3, & x \leq 1 \\ -2, & x > 1 \end{cases}$

50. $g(x) = \begin{cases} -2, & x < -2 \\ x^2, & -2 \leq x \leq 2 \\ 4, & x > 2 \end{cases}$

51. $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2}, & x \neq -2 \\ -1, & x = -2 \end{cases}$

52. $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$

53. $k(x) = [x] + 2$

54. $k(x) = [x - 2]$

En los ejercicios 55-56 determinar $f(-2)$, $f(x - 1)$ y $f(x^2)$.

55. $f(x) = x^2 - 3$

56. $f(x) = (x - 3)^2$

57. **Administración.** A todos los empleados de una compañía química se les concedió un aumento salarial del 8% más una bonificación de 1 200 dólares. a) Encontrar una función S que represente el nuevo salario en términos del salario anterior x . b) Si un técnico de laboratorio ganaba 18 500 dólares, ¿cuál es su nuevo salario?

58. **Manufactura.** El fondo y los lados de las cajas de embarque se fabrican recortando cuadrados de longitud x in en las esquinas de una hoja de cartón que mide 12 in por 16 in. a) Encontrar una función $V(x)$ que represente el volumen de la caja. b) ¿Cuál es el volumen cuando $x = 2$ in?
59. Encontrar la distancia entre los dos puntos $(-2, 6)$ y $(5, 3)$.
60. Encontrar el punto medio del segmento que une a los puntos $(4, -8)$ y $(2, -2)$.

3.5. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Composición de funciones

Considérese $f(x) = 3x - 7$ y $g(x) = 5x^2 + 4$. Evalúese f en $x = 3$, $f(3) = 3(3) - 7 = 2$. Ahora, evalúese g en 2, $g(2) = 5(2)^2 + 4 = 24$. Con lo anterior se ha determinado $g(f(3))$.

Si la imagen de f está contenida en el dominio de g , entonces la función compuesta $g \circ f$, léase " g compuesta con f ", está definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Por lo general, la notación que se utiliza es $g(f(x))$, léase " g de f de x ". Si $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, entonces h es una función que lleva a x en el dominio de f directamente a la imagen de g . Este proceso se ilustra en la figura 27.

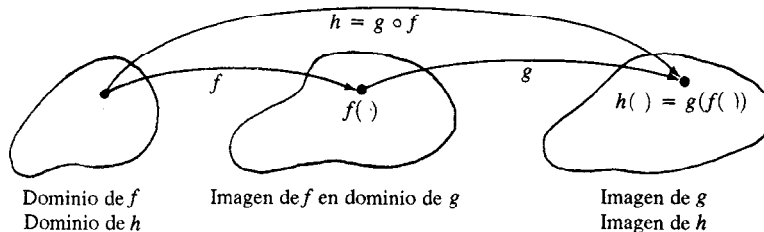


Figura 27. Función compuesta.

EJEMPLO 1

Sea $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2 - 4$. Determinar $g(f(x))$ y $f(g(x))$. ¿Son iguales las dos funciones?

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(2x + 1) \\ &= (2x + 1)^2 - 4 \\ &= 4x^2 + 4x - 3 \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2 - 4) \\ &= 2(x^2 - 4) + 1 \\ &= 2x^2 - 7 \end{aligned}$$

Así, $g(f(x)) \neq f(g(x))$ o $g \circ f \neq f \circ g$. Por consiguiente, la composición de funciones no es conmutativa.

EJEMPLO 2

Ciencias del medio ambiente

El radio de un derrame petrolero aumenta con el tiempo y está dado por la función $r(t) = \sqrt{t}$ para $3 \leq t \leq 48$, donde t está en horas y r está en millas. El costo C en dólares por limpiar a fondo el derrame está dado por $C(r) = 2\,630r^2 + 580r + 9\,320$.

- a) Encontrar el costo C como una función del tiempo.
Debe encontrarse la función compuesta $C(r(t))$.

$$\begin{aligned} C(r(t)) &= 2\,630(\sqrt{t})^2 + 580(\sqrt{t}) + 9\,320 \\ &= 2\,630t + 580\sqrt{t} + 9\,320 \end{aligned}$$

- b) Encontrar el costo aproximado si el proceso de limpieza comienza cuando $t = 40$ hr.

$$C(40) = 2\,630(40) + 580\sqrt{40} + 9\,320 \approx \$151\,000$$

Funciones inversas

Considérense las funciones $h(x) = x^2$ para $x \geq 0$ y $k(x) = \sqrt{x}$. Supóngase que se encuentran $h(k(x))$ y $k(h(x))$.

$$\begin{aligned} h(k(x)) &= h(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x \\ k(h(x)) &= k(x^2) = \sqrt{x^2} = x \end{aligned}$$

No sólo es $h(k(x)) = k(h(x))$ sino también ambas son iguales a la función identidad. Las funciones h y k son inversas entre sí.

Una función g es la **inversa** de f si

$$f(g(x)) = x \text{ para toda } x \text{ en el dominio de } g$$

y

$$g(f(x)) = x \text{ para toda } x \text{ en el dominio de } f.$$

La inversa de f usualmente se denota f^{-1} .

Utilizando la notación f^{-1} se tiene

Funciones uno a uno

Antes de encontrar la inversa de una función f , debe determinarse qué funciones tienen inversas. Para demostrar que $h(x) = x^2$ y $k(x) = \sqrt{x}$ eran inversas, tuvo que restringirse el dominio de h a $x \geq 0$. Esta restricción hace que h sea una *función uno a uno*.

Una función f es una **función uno a uno** si para x_1 y x_2 en el dominio de f , $x_1 \neq x_2$ implica

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

Otra forma de describir la propiedad de correspondencia uno a uno es decir que para cada y en la imagen de f hay una y sólo una x en el dominio de f . Gráficamente, si una recta horizontal atraviesa la gráfica de f en más de un punto, f no es una función uno a uno. Este **criterio de la recta horizontal** en la figura 28 muestra que $h(x) = x^2$ cuyo dominio es $x \geq 0$ es una función uno a uno, mientras que $g(x) = x^2$ cuyo dominio es todo x real no es una función uno a uno.

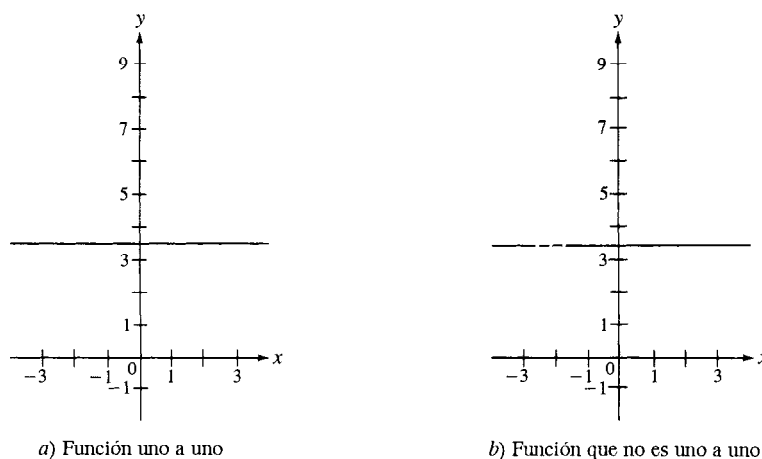


Figura 28. Prueba de la recta horizontal.

El teorema enunciado a continuación ayuda a determinar qué funciones son uno a uno.

Si f es una función creciente para toda x en su dominio o si f es una función decreciente para toda x en su dominio, entonces f es una función uno a uno.

Para comprender por qué el teorema es cierto para funciones crecientes, considérense dos puntos diferentes x_1 y x_2 en el dominio de f . Si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$ ya que la propiedad creciente requiere que $f(x_1) < f(x_2)$. De manera semejante, el teorema es cierto para $x_2 < x_1$ y, por supuesto, para funciones decrecientes. Este teorema implica que cualquier función lineal $f(x) = mx + b$, $m \neq 0$, es una función uno a uno. Sólo las funciones lineales constantes no son uno a uno.

EJEMPLO 3

Determinar si la función dada es uno a uno.

- a) $f(x) = x^3$, cuyo dominio es todo x

Ya que la función es creciente para todo x (véase la figura 24 b) en la sección anterior), f es uno a uno.

- b) $f(x) = |x|$, cuyo dominio es todo x

Ya que $|x| = -x$ si $x < 0$ y $|x| = x$ si $x \geq 0$, f es decreciente para $x \leq 0$ y creciente para $x \geq 0$ (véase la figura 18 en la sección anterior). Por tanto, f no es uno a uno.

Esto conduce al siguiente teorema.

Si f es una función uno a uno, entonces hay una función f^{-1} tal que

$$f(f^{-1}(x)) = x = f^{-1}(f(x)).$$

Ahora que se sabe cuáles funciones tienen inversas, es necesario hallar una técnica para encontrar la inversa de una función particular. Considérese de nuevo la función $h(x) = x^2$ ($x \geq 0$), así como $k(x) = \sqrt{x}$. La figura 29 muestra que h y k son simétricas con respecto a la recta $y = x$. Por ejemplo $(2, 4)$ está en la gráfica de h y el punto $(4, 2)$ está en la gráfica de k . En general, si (x, y) está en la gráfica de f , entonces (y, x) está en la gráfica de f^{-1} .

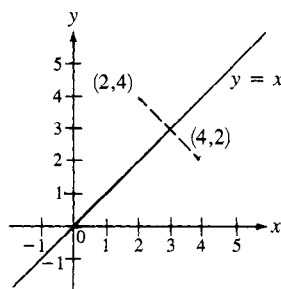


Figura 29. Función inversa.

Este análisis sugiere el siguiente procedimiento para encontrar la inversa de una función f .

Procedimiento para encontrar inversas

1. Se escribe la función utilizando y en lugar de $f(x)$.
2. Se intercambian x y y en la ecuación.
3. Se obtiene la expresión para f^{-1} al despejar en la ecuación a y .

El resultado siempre puede comprobarse demostrando que

$$f(f^{-1}(x)) = x = f^{-1}(f(x)).$$

EJEMPLO 4

Si existe, encontrar la inversa de la función dada.

a) $f(x) = 5x - 8$

f^{-1} existe ya que f es una función lineal creciente.

$$\begin{aligned} y &= 5x - 8 \\ x &= 5y - 8 \\ x + 8 &= 5y \\ y &= \frac{x + 8}{5} \end{aligned}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+8}{5}$$

Como comprobación, determinar si $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+8}{5}\right) = 5\left(\frac{x+8}{5}\right) - 8 = x + 8 - 8 = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(5x - 8) = \frac{(5x - 8) + 8}{5} = \frac{5x - 8 + 8}{5} = x$$

b) $g(x) = \sqrt{x-3}$, $x \geq 3$

Ya que g es una función creciente donde está definida, tiene una inversa.

$$y = \sqrt{x-3}$$

$$x = \sqrt{y-3}$$

$$x^2 = y - 3$$

$$y = x^2 + 3$$

$$g^{-1}(x) = x^2 + 3$$

La comprobación indicará algo acerca del dominio de g^{-1} .

$$g(g^{-1}(x)) = g(x^2 + 3) = \sqrt{x^2 + 3 - 3} = \sqrt{x^2} = x$$

$$g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(\sqrt{x-3}) = (\sqrt{x-3})^2 + 3 = x$$

Obsérvese que para que $g(g^{-1}(x))$ sea x , se requiere que $x \geq 0$. Así, el dominio de g^{-1} es $x \geq 0$. En general, para cualquier función f , el dominio de f^{-1} es la imagen de f y el dominio de f es la imagen de f^{-1} .

c) $h(x) = x^4 + 2$, para toda x real

Ya que $h(x)$ es decreciente para $x \leq 0$ y creciente para $x \geq 0$, no tiene una inversa.

d) $k(x) = 4 - x^3$

Ya que k es decreciente para toda x , tiene inversa.

$$y = 4 - x^3$$

$$x = 4 - y^3$$

$$y^3 = 4 - x$$

$$y = \sqrt[3]{4-x}$$

$$k^{-1}(x) = \sqrt[3]{4-x}$$

$$\text{Comprobación: } k(k^{-1}(x)) = k(\sqrt[3]{4-x}) = 4 - (\sqrt[3]{4-x})^3 = 4 - (4-x) = x$$

$$k^{-1}(k(x)) = k^{-1}(4 - x^3) = \sqrt[3]{4 - (4 - x^3)} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

3.5. Ejercicios

Determinar $f(g(2))$, $g(f(-1))$, $f(g(x))$, y $g(f(x))$ para cada par de funciones en los ejercicios 1-8.

1. $f(x) = 5x$ y $g(x) = 3x - 2$

2. $f(x) = 1 - x$ y $g(x) = 5x + 1$

3. $f(x) = 2x^2$ y $g(x) = -x$

4. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ y $g(x) = x^4$

5. $f(x) = -2x + 1$ y $g(x) = x^2 + 2$

6. $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = (x - 3)^2$

7. $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$

8. $f(x) = \frac{x}{1-x}$ y $g(x) = \frac{x}{x+1}$

En los ejercicios 9-14 determinar qué funciones son uno a uno.

9. $f(x) = -2x + 6$

10. $g(x) = 2 - 3x^2$

11. $h(x) = |x + 1|$

12. $h(x) = \frac{1}{x}$

13. $k(x) = x^3 + 1$

14. $k(x) = \sqrt{x-2}$

En los ejercicios 15-18 determinar si las funciones son inversas entre sí y graficarlas en el mismo sistema de coordenadas.

15. $f(x) = \sqrt{x-2}$ y $g(x) = x^2 + 2, x \geq 0$

16. $f(x) = -2x + 5$ y $g(x) = \frac{5-x}{2}$

17. $f(x) = \sqrt{x+4}$ y $g(x) = x^2 - 4, x \geq 0$

18. $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ y $g(x) = \sqrt[3]{2x}$

Encontrar la inversa de cada función en los ejercicios 19-26.

19. $f(x) = 2x + 3$

20. $g(x) = 1 - x^2, x \geq 0$

21. $h(x) = \sqrt{x-3}$

22. $h(x) = \sqrt{x+2}$

23. $k(x) = 2x^3$

24. $k(x) = \sqrt[3]{x-3}$

25. $g(x) = \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1$

26. $g(x) = \sqrt{x^2-1}, x \geq 1$

27. Encontrar la inversa de $f(x) = mx + b$. ¿Hay algunas restricciones sobre m o b ?

28. Encontrar la inversa de $g(x) = ax^2 + c, x \geq 0$. ¿Hay algunas restricciones sobre a o c ?

29. **Ecología.** El radio de un incendio circular de hierba aumenta con el tiempo de acuerdo con la ecuación $r(t) = 2t^2 - 1$.

a) Encontrar la circunferencia C del incendio como función del tiempo. b) Encontrar el área quemada como función del tiempo.

30. **Meteorología.** El radio de un globo atmosférico aumenta con el tiempo de acuerdo con la ecuación $r(t) = \sqrt{t+2}$.

a) Encontrar el volumen V del globo como una función del tiempo. b) Encontrar el área S del globo como función del tiempo.

31. **Ecología.** Un derrame petrolero está fluyendo río abajo, el río mide 22 m de ancho. La distancia en kilómetros que el derrame ha recorrido al tiempo t en horas está dada por $d(t) = 3t^2 + 2t + 1$. a) Encontrar el área A , en metros cuadrados, cubierta por el derrame como una función del tiempo. b) Encontrar el área después de dos horas.

32. **Ingeniería.** El costo de limpiar el derrame mencionado en el ejercicio 31 está dado por la ecuación

$C(d) = 2220d + 9530$, donde C está en dólares y $d = 3t^2 + 2t + 1$ en kilómetros. a) Encontrar C como una función del tiempo. b) Encontrar C si el derrame se suspende después de dos horas.

En los ejercicios 33-34 determinar qué efecto tiene la transformación sobre la gráfica de f .

33. $y = f(x-4) + 2$

34. $y = f(x+4) - 2$

Determinar si cada función en los ejercicios 35-36 es par o impar.

35. $f(x) = 4x^3 + 2x$

36. $g(x) = |x^3|$

37. Encontrar la ecuación de la recta que pasa a través de $(-6, 2)$ y que es paralela a la recta $3x - 2y + 5 = 0$.

38. Encontrar la ecuación del bisector perpendicular del segmento que une a los puntos $(4, 6)$ y $(-8, -2)$.

39. ¿Qué se debe sumar para completar el cuadrado en cada expresión?

a) $x^2 - 8x$

b) $x^2 + 3x$

40. Resolver $2x^2 + 9x - 5 = 0$

En la sección 3.4 se utilizaron gráficas de funciones de la forma $f(x) = ax^2 + c$ para estudiar varias propiedades de las funciones. En esta sección este tipo de función se considerará con mayor detalle.

Una **función cuadrática** es una función de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a , b y c son constantes y $a \neq 0$.

En la figura 30 las gráficas de $f(x) = x^2 + 2x - 3$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 3$ se determinan por trazado de puntos.

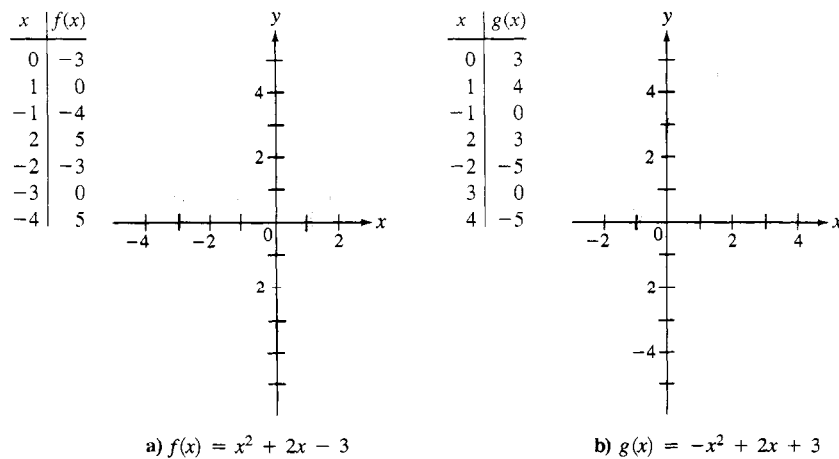


Figura 30. Parábolas.

Estas gráficas son características de las funciones cuadráticas. Todas son parábolas que abren hacia arriba si $a > 0$ como en la figura 30 a), y abren hacia abajo si $a < 0$ como en la figura 30 b). Obsérvese también que cada parábola tiene un punto mínimo o máximo llamado **vértice**. Por ejemplo, el vértice en la figura 30 a) es $(-1, -4)$.

Forma estándar

La graficación de funciones cuadráticas se facilita al encontrar el vértice antes de trazar los puntos. Supóngase que se completa el cuadrado en la siguiente función.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2x^2 + 12x + 13 \\
 &= 2(x^2 + 6x \quad \quad) + 13 \\
 &= 2(x^2 + 6x + 9) + 13 - 18 \\
 &= 2(x + 3)^2 - 5 \\
 &= 2[x - (-3)]^2 - 5
 \end{aligned}$$

Así, el valor mínimo de f ocurrirá cuando $[x - (-3)]^2$ es 0; es decir, cuando $x = -3$. Por consiguiente, el vértice es $(h, k) = (-3, -5)$. Si se escribe una función cuadrática en la **forma estándar**,

el vértice puede determinarse con facilidad. En lugar de completar el cuadrado en cada función cuadrática, puede obtenerse una fórmula para el vértice (h, k) al considerar una función cuadrática general.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

Esto prueba el siguiente teorema.

Fórmula del vértice

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una función cuadrática, entonces el vértice de la gráfica es

$$(h, k) = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right).$$

EJEMPLO 1

Encontrar el vértice de $f(x) = 3x^2 - 2x - 2$.

Primero, se encuentra h .

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-2)}{2(3)} = \frac{1}{3}$$

Ahora, se encuentra $f(h)$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}\right) &= 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right) - 2 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{6}{3} = -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

El vértice es $\left(\frac{1}{3}, -\frac{7}{3}\right)$.

Coordenadas al origen

Antes de usar el vértice para graficar, es conveniente encontrar las **abscisas al origen**. Éstas son los puntos donde $f(x) = 0$, y pueden encontrarse al resolver la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Por lo visto en la sección 2.3,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La figura 31 muestra que ocurren tres casos.

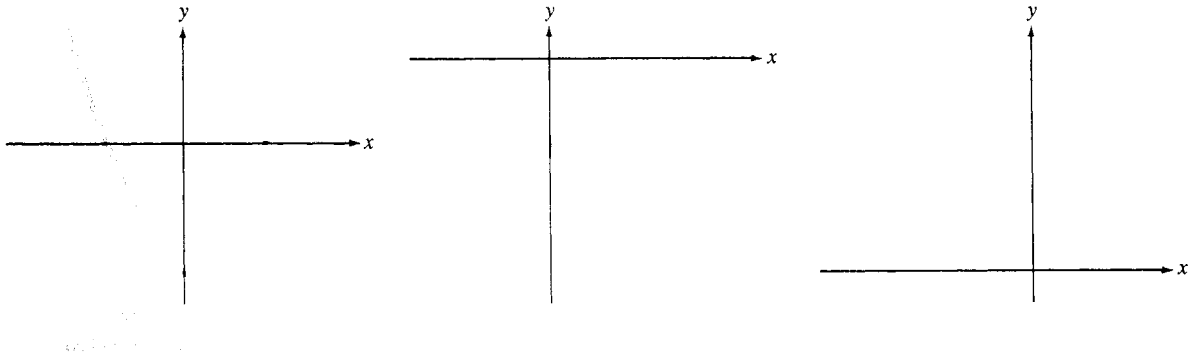


Figura 31. Intersecciones.

Toda esta información se utiliza para graficar una función cuadrática. Primero, se encuentra el vértice y las abscisas al origen. Luego, se determinan tantos puntos adicionales como sea necesario para bosquejar la parábola.

EJEMPLO 2

Encontrar el vértice, las abscisas al origen y graficar la función cuadrática.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

Obsérvese que $a = 1 > 0$, de modo que la gráfica se abre hacia arriba. En seguida se procede a encontrar el vértice (h, k) .

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(1)} = 3$$

$$k = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(3) = 3^2 - 6(3) + 5 = -4$$

El vértice es $(3, -4)$. Resolver la ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0$ para encontrar las intersecciones x .

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x - 1)(x - 5) = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 5 = 0$$

$$x = 1 \quad \quad \quad x = 5$$

Eje de simetría

Las coordenadas al origen son $(1, 0)$ y $(5, 0)$. Ahora, eligiendo una $x < 1$ y una $x > 5$, pueden trazarse dos puntos adicionales $(0, 5)$ y $(6, 5)$. Obsérvese que la gráfica mostrada en la figura 32 es simétrica con respecto al eje de simetría $x = 3$.

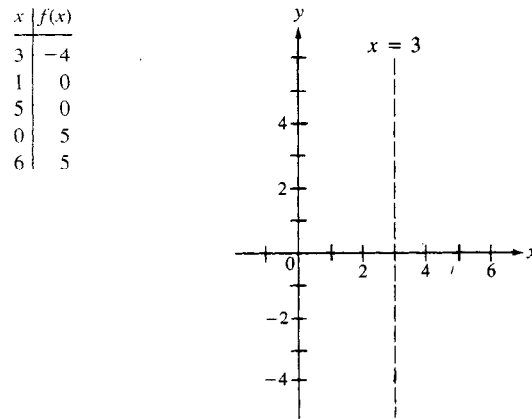


Figura 32

b) $g(x) = -3x^2 + 9x - 4$

La gráfica se abre hacia abajo ya que $a = -3 < 0$. Enseguida se procede a encontrar (h, k) .

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{9}{2(-3)} = \frac{3}{2}$$

$$k = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = (-3)\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 9\left(\frac{3}{2}\right) - 4 = \frac{11}{4}$$

El vértice es $\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{4}\right)$. Ahora, se usa la fórmula cuadrática para resolver $-3x^2 + 9x - 4 = 0$ y encontrar las abscisas al origen.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-9 \pm \sqrt{(9)^2 - 4(-3)(-4)}}{2(-3)} \\ &= \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 48}}{-6} = \frac{-9 \pm \sqrt{33}}{-6} = \frac{9 \pm \sqrt{33}}{6} \end{aligned}$$

Al utilizar una calculadora se encuentra que $x \approx 0.54$ y $x \approx 2.46$. Por tanto, las abscisas al origen son $(0.54, 0)$ y $(2.46, 0)$. Trazar los puntos adicionales y graficar la función en la figura 33. Obsérvese que el eje de simetría es $x = \frac{3}{2}$. La simetría no debería utilizarse cuando se determinan los puntos adicionales a trazar.

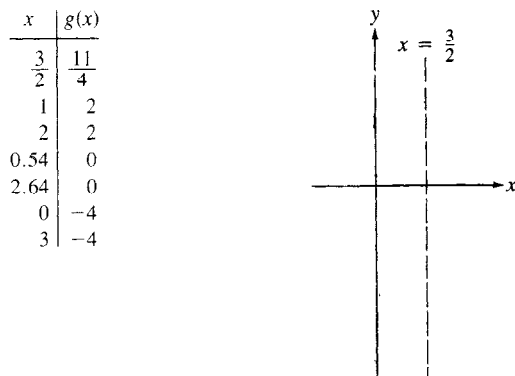


Figura 33

La función $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 13$ ilustra el caso cuando no hay abscisas al origen. Nótese que

$$b^2 - 4ac = (5)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)(13) = 25 - 26 = -1 < 0.$$

Ya que el discriminante es negativo no hay intersecciones con el eje x . La gráfica abre hacia arriba y el vértice es $(-5, 0.5)$. Utilizar la simetría con respecto a $x = -5$ y trazar suficientes puntos para determinar la gráfica en la figura 34.

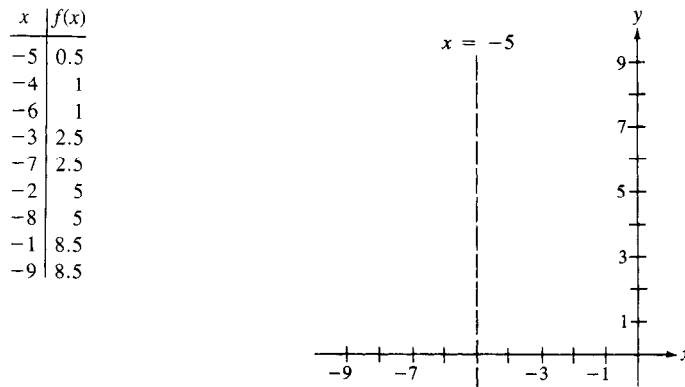


Figura 34

Muchas aplicaciones que involucran funciones cuadráticas se resuelven al encontrar el valor máximo (si $a < 0$) o el valor mínimo (si $a > 0$) utilizando el vértice.

EJEMPLO 3

Agricultura

Una ranchera necesita construir un corral de encierro para el ganado junto a una cerca existente. Dispone de 600 m de cercado para construir los tres lados del corral rectangular que se muestra en la figura 35. Encontrar las dimensiones del corral que proporcionan un área máxima, así como el área máxima.

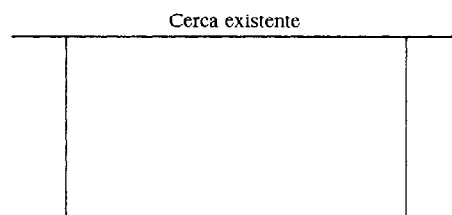


Figura 35

Sea x = longitud de los lados perpendiculares a la cerca existente,
 y = longitud del lado paralelo a la cerca existente.

Ya que están disponibles 600 m de cercado,

$$\begin{aligned} 2x + y &= 600 \\ y &= 600 - 2x. \end{aligned}$$

La cantidad que ha de maximizarse es el área del corral.

$$\begin{aligned} A &= xy \\ &= x(600 - 2x) \\ &= 600x - 2x^2 \\ &= -2x^2 + 600x \end{aligned}$$

Obsérvese que en la función, $a = -2 < 0$, y por ello la parábola abre hacia abajo; por consiguiente, tiene un máximo. Puede encontrarse el valor de x que corresponde al máximo al encontrar h en el vértice (h, k) .

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{600}{2(-2)} = 150$$

Por tanto, cada lado perpendicular a la cerca existente debe medir 150 m para proporcionar el área máxima. Ahora se encuentra y .

$$y = 600 - 2x = 600 - 2(150) = 300$$

El lado paralelo de la cerca existente es 300 m. El área máxima puede encontrarse al determinar k en (h, k) o al especificar el producto de x por y .

$$A = xy = (150)(300) = 45\,000 \text{ m}^2$$

El área máxima es 45 000 m².

La aplicación siguiente se presentó primero en la introducción de este capítulo.

EJEMPLO 4

Administración

Una agencia de alquiler de automóviles tiene un promedio de 20 clientes por día para un modelo que se renta por 32 dólares diarios. Un estudio muestra que la agencia podría conseguir dos clientes nuevos por cada dólar de reducción en la tasa de alquiler por día. ¿Qué tasa diaria le proporcionaría a la compañía la renta máxima?

Sea $n =$ el número de dólares de reducción en los honorarios de alquiler por día. Luego, ya que hay dos clientes nuevos por cada dólar de reducción, $2n$ es el número de clientes nuevos. Así,

$$\begin{aligned} 20 + 2n &= \text{número de clientes tras descontar } n \text{ dólares a los honorarios de alquiler por día,} \\ 32 - n &= \text{nuevos honorarios de alquiler por día.} \end{aligned}$$

El producto $(20 + 2n)(32 - n)$ es la renta diaria que ha de maximizarse.

$$\begin{aligned} (20 + 2n)(32 - n) &= 640 + 44n - 2n^2 \\ &= -2n^2 + 44n + 640 \end{aligned}$$

Ya que $a = -2 < 0$, la función cuadrática tiene un máximo. Encontrar h en (h, k) .

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{44}{2(-2)} = 11$$

Así, los honorarios de alquiler por día deben reducirse 11 dólares para proporcionar la renta máxima. Este descuento dejaría los nuevos precios de alquiler en 21 dólares diarios.

3.6. Ejercicios

Sin graficar, encontrar el vértice y las intersecciones con el eje x de las funciones cuadráticas en los ejercicios 1-12.

1. $f(x) = x^2 - 5x + 6$

2. $g(x) = -x^2 - 6x - 8$

3. $h(x) = x^2 + 2x + 2$

4. $h(x) = x^2 - 2x + 1$

5. $k(x) = -x^2 - 8x$

6. $k(x) = -x^2 + 10x$

7. $m(x) = 2x^2 - 4$

8. $m(x) = -3x^2 + 6$

9. $f(x) = 2x^2 + 8x - 5$

10. $g(x) = -3x^2 + 4x + 3$

11. $h(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 5$

12. $k(x) = -4x^2 + 12x + 5$

En los ejercicios 13-24 encontrar el vértice, las intersecciones con el eje x y graficar la función.

13. $g(x) = -x^2 - 2x + 3$

14. $h(x) = x^2 - 7x + 6$

15. $k(x) = -x^2 + 5x - 2$

16. $k(x) = -x^2 - 4x + 2$

17. $f(x) = x^2 + 4x + 5$

18. $f(x) = x^2 - 3x - 5$

19. $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 7x + 20$

20. $h(x) = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 4$

21. $k(x) = -4x^2 + 8x - 4$

22. $k(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 8$

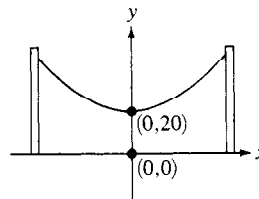
23. $m(x) = 2(x + 1)^2 + 2$

24. $m(x) = -(x + 2)^2 - 2$

25. Agricultura. Un ranchero necesita construir un corral con 1 000 yd de cercado. ¿Cuáles serían las dimensiones del corral rectangular más grande que puede hacer? ¿Cuál es el área máxima?

26. Agricultura. Se va a construir un corral rectangular para ganado junto a la ribera de un río derecho. Si no es necesaria una cerca a lo largo del río y hay 240 ft de cercado disponibles, ¿cuáles son las dimensiones del corral rectangular más grande posible? ¿Cuál es el área máxima?

27. Ingeniería. Las torres para un puente suspendido están separadas 100 ft. Si se establece un sistema de coordenadas como indica la figura, el cable entre las torres se ajusta a la curva $f(x) = \frac{1}{100}x^2 + 20$. ¿A qué altura en cada torre está conectado el cable?



28. Ingeniería. Si el cable en la figura debe conectarse a una altura de 30 ft en cada torre y $f(x) = \frac{1}{100}x^2 + 20$, ¿qué tan separadas deben colocarse las torres?

29. Física. La altura en ft de un cohete pequeño t segundos después del encendido está dada por la función

$$h(t) = -16t^2 + 256t. \quad \text{a) ¿En cuánto tiempo el cohete alcanzará su máxima altura? b) ¿Cuál es la máxima altura?}$$

c) ¿En cuánto tiempo llegará al suelo otra vez?

30. **Minería.** Se deja caer la hulla desde una correa transportadora a la base del contenedor de un camión, la altura en ft de la hulla sobre la base del contenedor la describe $h(t) = -16t^2 + 16$, donde t es el número de segundos después de que la hulla sale de la correa. Si la velocidad de la hulla está dada por $v(t) = -32t$ en ft/s, ¿a qué velocidad golpea la base del contenedor del camión la primera hulla?
31. **Manufactura.** La utilidad diaria en una planta industrial está dada por $P(x) = -x^2 + 120x - 1\,000$, donde x es el número de partes para máquina producidas. ¿Cuál es el número de partes que proporcionará la utilidad máxima? ¿Cuál es la utilidad máxima?
32. **Manufactura.** El costo industrial diario de una pequeña planta está dado por $C(x) = 2x^2 - 180x + 5\,200$ donde x es el número de pares de zapatos producidos. ¿Cuál es el número de pares de zapatos que minimizará el costo? ¿Cuál es el costo mínimo?
33. **Manufactura.** El costo en una operación industrial está dado por una función cuadrática. El costo mínimo ocurre en el punto (30, 200). Si la curva pasa también a través del punto (0, 2 000), encontrar la función cuadrática.
34. **Menudeo.** La utilidad en una operación al menudeo está dada por una función cuadrática. La utilidad máxima ocurre en el punto (100, 400). Si la curva pasa también a través del punto (80, 200), encontrar la función cuadrática.
35. **Administración.** Un mayorista vende componentes electrónicos a 40 dólares cada uno en pedidos de 200 o menos. Para pedidos mayores el precio por componente se reduce a una tasa de 0.20 dólares por el número pedido por encima de 200. ¿Un pedido de cuántos componentes electrónicos le daría al mayorista el ingreso más grande?

En los ejercicios 36-37 determinar $f(g(0))$, $g(f(-2))$, $f(g(x))$, y $g(f(x))$.

36. $f(x) = -3x + 4$ y $g(x) = 2x - 5$

37. $f(x) = |x + 5|$ y $g(x) = x^2$

En los ejercicios 38-40 determinar la inversa de cada función.

38. $f(x) = 7x + 8$

39. $g(x) = \sqrt{x + 4}$

40. $h(x) = \sqrt[3]{x + 1}$

En los ejercicios 41-42 graficar la función y determinar los valores para los cuales la función crece y los valores para los cuales decrece.

41. $g(x) = -5x - 3$

42. $f(x) = |x| + 3$

Variación directa

Las expresiones tales como "el costo de producción *varía* con el número de unidades producidas" y "el volumen de un gas *varía* con la temperatura" son de uso frecuente. La *variación* puede definirse precisamente con una variable representada como función de una o más variables. Por ejemplo, si un automóvil se mueve a una velocidad constante de 55 mi/h, la distancia recorrida es una función del tiempo. del tiempo.

$$d = 55t$$

Expresado en términos de variación, se dice: "la distancia *varía directamente* con el tiempo". Éste es un ejemplo del primer tipo de variación denominado *variación directa*.

Si dos variables x y y se relacionan de modo que

$$y = cx$$

donde c es una constante, se dice que y **varía directamente** con x , y es **proporcional** a x , o simplemente y **varía como** x . A c se le denomina la **constante de variación** o **constante de proporcionalidad**.

En la definición, obsérvese que el sujeto de variación se relaciona estrechamente con la proporción estudiada en la sección 2.2. En realidad, la variación es otra manera de considerar problemas de proporción.

EJEMPLO 1

Determinar la ecuación de variación.

- a) y varía directamente con x , y cuando $x = \frac{3}{2}$ entonces $y = 10$.

Primero se escribe la ecuación descrita por y *varía directamente con* x .

$$y = cx$$

Luego se determina el valor de la constante utilizando la información de que $y = 10$ cuando $x = \frac{3}{2}$.

$$10 = c \cdot \frac{3}{2}$$

$$\frac{20}{3} = c$$

Así, la ecuación de variación es $y = \frac{20}{3}x$.

- b) El volumen V de un gas bajo presión constante varía directamente con la temperatura T . El volumen es 220 cm^3 cuando la temperatura es 320 K (kelvin). La ecuación de variación es

$$V = cT.$$

Utilizando $V = 220 \text{ cm}^3$ cuando $T = 320 \text{ K}$, se tiene

$$220 = c(320).$$

$$c = \frac{220}{320} = \frac{11}{16}$$

Así,

$$V = \frac{11}{16}T.$$

En el ejemplo 1 b), obsérvese que después de que se ha determinado que $V = \frac{11}{16}T$, es posible encontrar el volumen para cualquier temperatura. Por ejemplo, si $T = 480 \text{ K}$, entonces

$$V = \frac{11}{16}(480) = 330 \text{ cm}^3.$$



Además, si $V = 77 \text{ cm}^3$, puede encontrarse T .

$$77 = \frac{11}{16}T$$

$$T = \frac{16}{11}(77) = 112 \text{ K}$$

En la relación de variación directa, $y = cx$, la variable y es una función lineal de x . Por supuesto, también puede considerarse que y varía con las potencias de x . La tabla siguiente ofrece varias posibilidades.

Enunciación de la variación	Ecuación
y varía con el cuadrado de x	$y = cx^2$
u varía con la raíz cuadrada de v	$u = c\sqrt{v}$
el volumen V de una esfera varía con el cubo del radio r	$V = cr^3 \quad \left(c = \frac{4}{3}\pi\right)$

EJEMPLO 2

Física

El periodo P de un péndulo simple varía directamente con la raíz cuadrada de la longitud l . Si el periodo es 3.2 s cuando la longitud es 12.5 cm, encontrar el periodo cuando $l = 20.2 \text{ cm}$.

La ecuación de variación es

$$P = c\sqrt{l}.$$

Para encontrar c , usar $P = 3.2 \text{ s}$ cuando $l = 12.5 \text{ cm}$.

$$3.2 = c\sqrt{12.5}$$

$$c = \frac{3.2}{\sqrt{12.5}} \approx 0.91$$

Así,

$$P = 0.91\sqrt{l}.$$

Cuando $l = 20.2$,

$$P = (0.91)\sqrt{20.2} \approx 4.1 \text{ s}.$$

Variación inversa

Considérese ahora una segunda clase de variación llamada *variación inversa*.

Si dos variables x y y se relacionan de modo que

$$y = \frac{c}{x}$$

donde c es una constante, entonces se dice que y **varía inversamente** con x o y es **inversamente proporcional a x** . Otra vez, c se denomina **constante de variación**.



En la variación directa, y aumenta al aumentar x cuando $c > 0$. En contraste, para la variación inversa y disminuye al aumentar x ($c > 0$). Por ejemplo, con respecto a una distancia fija de 100 millas, el tiempo t varía inversamente con la velocidad r de viaje.

$$t = \frac{100}{r}$$

Así, al aumentar la velocidad r , el tiempo t para viajar las 100 millas disminuye.

EJEMPLO 3

La intensidad de iluminación I de una fuente de luz varía inversamente con el cuadrado de la distancia d desde la fuente. Cuando $d = 20$ ft, entonces $I = 5\,000$ candelas. Encontrar I cuando d es 60 ft.

Primero, se escribe la ecuación de variación. Luego, se despeja c .

$$\begin{aligned} I &= \frac{c}{d^2} \\ 5\,000 &= \frac{c}{(20)^2} \\ c &= 2\,000\,000 \\ I &= \frac{2\,000\,000}{d^2} \\ I &= \frac{2\,000\,000}{(60)^2} \\ &\approx 556 \text{ candelas} \end{aligned}$$

Variación conjunta

Una variable z puede variar con dos o más variables. Esto se denomina *variación conjunta*.

Si tres variables x , y y z se relacionan de modo que

$$z = cxy$$

donde c es una constante, se dice que: z varía directamente con x y directamente con y o que z **varía conjuntamente** con x y y .

Es posible encontrar otras ecuaciones de variación al combinar varios tipos de variación. La siguiente tabla ofrece varios ejemplos.

Enunciación de la variación	Ecuación
y varía conjuntamente con x y z e inversamente con w	$y = \frac{cxz}{w}$
el volumen V de un gas varía directamente con la temperatura T e inversamente con la presión P	$V = \frac{cT}{P}$
la resistencia R de un alambre varía directamente con la longitud l e inversamente con el cuadrado del diámetro d	$R = \frac{cl}{d^2}$

El ejemplo 4 considera una de las aplicaciones presentadas en la introducción de este capítulo.

EJEMPLO 4

Ingeniería

La resistencia R de un alambre a temperatura constante varía directamente con la longitud l e inversamente con el cuadrado del diámetro d . Una sección de alambre con un diámetro de 0.01 in y una longitud de 1 ft tiene una resistencia de 8.2 ohms. Encontrar la resistencia de un alambre de 1 mi de largo y 0.05 in de diámetro.

La ecuación es $R = cl/d^2$. Sustituir el primer conjunto de valores.

$$= \frac{c \cdot}{(\quad)^2}$$

$$(0.01)^2(8.2) = c$$

$$0.00082 = c$$

Así, la ecuación de variación es $R = 0.00082l/d^2$. Sustituir $d = 0.05$ y $l = 5\,280$ ft (1 mi = 5 280 ft).

$$R = \frac{(0.00082)(\quad)}{(\quad)^2} \approx 1732$$

La resistencia es aproximadamente 1 732 ohms.

3.7. Ejercicios

Encontrar la ecuación de variación en los ejercicios 1-10.

1. y varía directamente con x , y cuando $x = 16$ entonces $y = 8$.
2. p varía directamente con q , y cuando $q = 40$ entonces $p = 400$.
3. z varía inversamente con w , y $z = 12$ cuando $w = 5$.
4. u varía inversamente con v , y $u = 0.025$ cuando $v = 0.4$.
5. z varía conjuntamente con x y y . Cuando $x = 2$ y $y = 7$, entonces $z = 42$.
6. m varía conjuntamente con p y q . Cuando $p = 0.25$ y $q = 9.5$ entonces $m = 8.55$.
7. a es directamente proporcional al cuadrado de b e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de d . Cuando $b = 3$ y $d = 25$, entonces $a = 405$.
8. P es directamente proporcional a la raíz cúbica de R e inversamente proporcional a la cuarta potencia de T . Cuando $R = 0.027$ y $T = 0.1$, entonces $P = 3\,300$.
9. w varía conjuntamente con el cuadrado de x y la raíz cúbica de y e inversamente con la raíz cuadrada de z . Si $x = 40$, $y = 125$ y $z = 400$, entonces $w = 330$.
10. L varía directamente con la raíz cuadrada de M e inversamente con el cuadrado de N y el cubo de K . Si $M = 0.09$, $N = 0.2$ y $K = 2$, entonces $L = 1.5$.
11. **Consumo.** El interés simple I pagado sobre un préstamo por un año varía directamente con la cantidad otorgada en préstamo A . Si se pagó un interés de 250 dólares sobre un préstamo de 2 000 dólares, ¿qué interés debe pagarse sobre un préstamo de 9 250 dólares?

12. **Consumo.** El interés anual I recibido sobre ahorros varía directamente con la tasa de interés r . Si se recibió un interés de 468 dólares cuando la tasa era del 9%, ¿qué interés se hubiera recibido de haber sido la tasa del 7%?
13. **Manufactura.** El costo diario C de producción varía directamente con el número n de unidades producidas, cuando $3\,000 \leq n \leq 7\,000$. Si el costo es 25 200 dólares cuando se producen 4 100 unidades, ¿cuál será el costo si la producción aumenta a 6 400 unidades?
14. **Administración.** La utilidad diaria P varía directamente con el número de unidades vendidas n , si $200 \leq n \leq 1\,000$. Si la utilidad es 6 520 dólares cuando se venden 580 unidades, ¿cuál es la utilidad cuando sólo se venden 340 unidades?
15. **Manufactura.** En una operación industrial la productividad P varía directamente con el cuadrado de la eficiencia e e inversamente con la raíz cuadrada del tiempo de trabajo d . Si $P = 7.6$ cuando $e = 7$ y $d = 16$, encontrar P para $e = 8$ y $d = 9$.
16. **Administración.** En una operación de mayoreo, el factor de movimiento M es directamente proporcional a la raíz cuadrada del número n de trabajadores en la tarea e inversamente proporcional al cuadrado del tiempo de descanso t . Si $M = 5.8$ cuando $n = 9$ y $t = 2.2$, encontrar M cuando $n = 16$ y $t = 3.1$.
17. **Física.** El volumen V de un gas varía directamente con la temperatura T e inversamente con la presión P . Si $V = 16 \text{ in}^3$ cuando $T = 480 \text{ K}$ y $P = 45 \text{ lb/in}^2$, encontrar V cuando $T = 1\,200 \text{ K}$ y $P = 15 \text{ lb/in}^2$.
18. **Física.** Utilizar la ecuación de variación determinada en el ejercicio 17 para encontrar la presión P cuando $V = 6 \text{ in}^3$ y $T = 360 \text{ K}$.
19. **Ciencia.** El peso w de un cuerpo sobre la superficie de la Tierra es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia d desde el centro de la Tierra. ¿Cuál es el efecto sobre el peso cuando la distancia se duplica?
20. **Navegación.** La fuerza P que se requiere para mover un barco varía directamente con el cubo de la velocidad s . ¿Cuál es el efecto sobre P cuando la velocidad se reduce a la mitad?
21. **Física.** El periodo de vibración P de un péndulo varía directamente con la raíz cuadrada de la longitud l . Si el periodo de vibración es 1.56 s cuando la longitud es 9.25 cm, ¿cuál es el periodo cuando $l = 16.8 \text{ cm}$?
22. **Ciencia.** La atracción gravitacional A entre dos masas varía inversamente con el cuadrado de la distancia entre ellas. La fuerza de atracción es 17.6 lb cuando las masas están separadas 12.4 ft. ¿Cuál es la atracción cuando las masas están separadas 34.6 ft?
23. **Física.** La intensidad I de la luz varía inversamente con el cuadrado de la distancia d desde la fuente. Si la intensidad debe aumentarse al doble, ¿qué debe hacerse con la distancia?
24. **Física.** La fuerza F de atracción entre dos partículas cargadas varía conjuntamente con las cargas q_1 y q_2 e inversamente con el cuadrado de la distancia d entre ellas. ¿Qué pasa con la fuerza cuando q_1 se duplica, q_2 se divide entre 3 y d se duplica?
25. **Manufactura.** El tiempo T necesario para hacer la ampliación de un negativo fotográfico varía directamente con el área A de la ampliación. Si se requieren 25 segundos para hacer una ampliación de 5 por 7, encontrar el tiempo requerido para una ampliación de 11 por 14.
26. **Física.** El peso w de un líquido varía directamente con su volumen v . Si el peso del líquido en un cilindro de radio 2 cm y altura 12 cm es 142 g, encontrar el peso del líquido en una esfera de radio 5 cm.
27. **Ingeniería.** La velocidad s de un automóvil cuando se aplican los frenos puede estimarse midiendo la longitud l de las marcas del resbalón. Esto es posible ya que s es directamente proporcional a la raíz cuadrada de l . Si el automóvil que viaja a 45 mi/h deja marcas del resbalón de 65 ft, estimar la velocidad de un automóvil que deja una marca de 120 ft de largo.
28. **Ingeniería.** Utilizar la ecuación de variación del ejercicio 27 para estimar la longitud de una marca de resbalón cuando se aplican los frenos de un automóvil que viaja a 90 mi/h.

- 29. Ingeniería.** La carga máxima admisible m de una viga horizontal varía conjuntamente con el ancho w y el cuadrado del grosor t e inversamente con la longitud l . Si una segunda viga tiene un ancho $W = 5w$, grosor $T = \frac{1}{2}t$, y longitud $L = 3l$, ¿cuál es la relación entre la carga máxima admisible M en la segunda viga y la carga en la primera?
- 30. Ingeniería.** La presión total P del viento sobre una superficie plana varía conjuntamente con el área A de la superficie y el cuadrado de la velocidad del viento v . Si se duplica el área de la superficie, ¿qué debe pasar con la velocidad del viento para mantener la misma P ?

En los ejercicios 31-36 encontrar el vértice y las intersecciones con el eje x de cada función cuadrática.

31. $f(x) = x^2 - 7x + 6$ 32. $f(x) = -x^2 - 12x - 11$ 33. $g(x) = -2x^2 + 3x + 20$
 34. $g(x) = 3x^2 + 4x - 4$ 35. $h(x) = 4x^2 - 4x + 1$ 36. $h(x) = -4x^2 + 2x - 2$

En los ejercicios 37-40 encontrar la forma general de la ecuación de la recta que satisface las condiciones dadas.

37. Con pendiente -8 y abscisa al origen $(-4, 0)$.
 38. Que pasa a través de $(4, -2)$ y que es paralela a una recta con pendiente $\frac{2}{3}$.
 39. Con abscisa al origen $(3, 0)$ y que es perpendicular a $2x - 5y = 4$.
 40. Con ordenada al origen $(0, -8)$ y que es paralela a $3x - 9y = 5$.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 3

- Graficar las soluciones de la ecuación $3x - 2y = 6$.
- Encontrar la distancia entre los puntos $(-2, 6)$ y $(7, 3)$.
- Si $(7, 2)$ es el punto medio del segmento que une a (a, b) y $(8, 5)$, encontrar (a, b) .
- Encontrar todos los puntos $(a, 2)$ que estén a cinco unidades de $(2, -1)$.
- Encontrar la pendiente de la recta que pasa a través de los puntos $(-2, 8)$ y $(-3, -1)$.

Encontrar la forma general de la ecuación de una recta en los ejercicios 6-7.

- Que pasa a través de $(-3, -7)$ y $(-1, 2)$
- Con intersección $(-2, 0)$ y paralela a $4x - 3y + 6 = 0$
- Encontrar la pendiente y la ordenada al origen y de $7x - 2y = 4$.

Determinar si las rectas son paralelas o perpendiculares en los ejercicios 9-10.

- $8x + 4y - 7 = 0$ y $-12x - 6y + 5 = 0$ 10. $x + 3y - 2 = 0$ y $6x - 2y + 7 = 0$
- ¿Es el triángulo con vértices $A(5, 6)$, $B(-2, 1)$ y $C(3, -6)$ un triángulo rectángulo?
- Determinar la forma general del bisector perpendicular del segmento que une a $(-2, -4)$ con $(4, 8)$.

En los ejercicios 13-14 determinar si la relación es una función, si x es la variable independiente y y la variable dependiente.

13. $y = 2x^2 + 3$ 14. $x = 2y^2 + 3$

Determinar los números reales para los cuales cada función está definida en los ejercicios 15-16.

$$15. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$16. g(x) = \frac{x+5}{x^2-9}$$

Utilizar la palabra más apropiada, *identidad: constante, lineal o cuadrática* para cada función de los ejercicios 17-18.

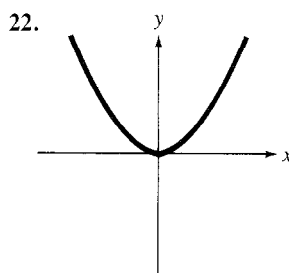
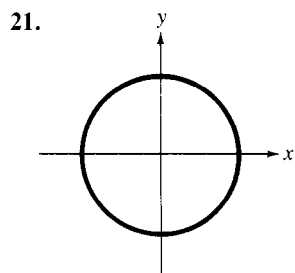
$$17. g(x) = 1 - x$$

$$18. h(x) = 16$$

$$19. \text{ Si } f(x) = 2x^2 + 3x, \text{ determinar } f(0), f(-2), f\left(\frac{1}{2}\right), f(a), \text{ y } f(a+1).$$

$$20. \text{ Si } g(x) = 3x - 5, \text{ determinar } g(a^3), g\left(\frac{1}{a}\right), \text{ y } g(\sqrt{a}).$$

Utilizar la prueba de la recta vertical en los ejercicios 21-22 para determinar si la gráfica corresponde a una función.

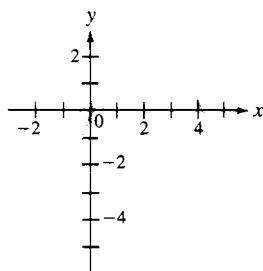


Determinar los valores de x para los cuales la función crece y los valores para los cuales decrece en los ejercicios 23-24.

$$23. g(x) = -\frac{1}{3}x - 2$$

$$24. k(x) = \frac{4}{x}$$

La gráfica de f se da en la figura. Utilizar ésta para bosquejar las gráficas de cada función en los ejercicios 25-28.



$$25. y = -f(x)$$

$$26. y = 2f(x)$$

$$27. y = f(x+1) - 2$$

$$28. y = f(x-1) + 2$$

En los ejercicios 29-31 determinar si la función es par o impar.

$$29. f(x) = 2x^2 - 3$$

$$30. g(x) = 4x^3 + 2x$$

$$31. h(x) = |x| + x$$

En los ejercicios 32-34 determinar la simetría de las gráficas sin graficar la relación.

$$32. 3x^2 + 2y^2 = 5$$

$$33. 8xy = 1$$

$$34. y^2 + 2x = 5$$

Graficar cada función en los ejercicios 35-36.

$$35. f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq -2 \\ -2, & -2 < x \leq 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$36. g(x) = \frac{1}{2}[x]$$

Determinar $f(g(3))$, $g(f(3))$, $f(g(x))$ y $g(f(x))$ para cada par de funciones en los ejercicios 37-38.

37. $f(x) = 3x^2 + 2$ y $g(x) = x - 5$

38. $f(x) = |x - 2|$ y $g(x) = 1 - x^2$

Determinar si las funciones en los ejercicios 39-40 son uno a uno.

39. $f(x) = \sqrt{x - 4}$

40. $f(x) = |x - 4|$

Encontrar la inversa de cada función en los ejercicios 41-44.

41. $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

42. $g(x) = \sqrt{x + 5}$

43. $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2, \quad x \geq 0$

44. $k(x) = \frac{1}{2}x^3$

En los ejercicios 45-46 encontrar el vértice y las intersecciones con el eje x de la función cuadrática.

45. $f(x) = 2x^2 + 9x - 5$

46. $g(x) = -3x^2 - 2x + 8$

En los ejercicios 47-48 encontrar el vértice y las intersecciones con el eje x y graficar la función.

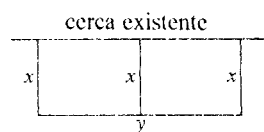
47. $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$

48. $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$

49. **Consumo.** Si se otorga un préstamo de x dólares por tres años al 11% de interés simple y S es la cantidad que ha de reembolsarse, encontrar una ecuación lineal que relacione S con x . ¿Qué cantidad debe reembolsarse cuando el préstamo asciende a 2 200 dólares?

50. **Menudeo.** Un minorista rectifica la mercancía con un alza de precio de 30% y luego ofrece una rebaja de x por ciento. Si el impuesto sobre las ventas es de 5%, encontrar una función T que represente el precio total de un saco que originalmente costaba 120 dólares. ¿Cuál es el precio total si la rebaja es de 40%?

51. **Administración.** Se van a construir dos áreas de almacenamiento al aire libre junto a una cerca existente como indica la figura. Si hay 120 ft de cercado disponibles para ello, ¿cuáles son las dimensiones x y y que determinarán el área máxima?



52. **Administración.** El costo diario de un sistema de almacenaje está dado por $C(x) = 2x^2 - 80x + 2\,200$ donde x es el número de camiones cargados. ¿Qué número de camiones da el costo mínimo? ¿A cuánto asciende el costo mínimo?

53. **Manufactura.** La utilidad en una pequeña fábrica está dada por una función cuadrática. La utilidad máxima ocurre en el punto (150, 850). Si la curva también pasa a través del punto (130, 50), encontrar la función cuadrática.

54. **Menudeo.** El ingreso R recibido por concepto de ventas varía directamente con el número n de unidades vendidas. Si $R = 2\,500$ dólares por la venta de 320 unidades, ¿cuál sería el ingreso por la venta de 920 unidades?

55. **Ecología.** El radio r de un derrame petrolero aumenta con el tiempo t en horas de acuerdo con la función $r(t) = 2t + 1$. Si el costo en dólares de limpiar el derrame es $C(r) = 30r^2 + 8\,000$, encontrar C como una función del tiempo. Determinar el costo cuando $t = 3$ h.

56. **Minería.** Los datos empíricos indican que el costo C en dólares por extraer x por ciento de un metal a partir de una tonelada de mineral es $C(x) = 923.6x^2 - 1\,756x + 46.8$. Encontrar el porcentaje que minimiza el costo.

57. **Administración.** Se van a pintar varios tanques esféricos de almacenamiento con radio r a un costo de 3.20 dólares por metro cuadrado. Encontrar el costo C como una función de r y encontrar el costo cuando $r = 3.2$ m.

- 58. Aeronáutica.** La altura en ft de un pequeño cohete, t segundos después del encendido, está dada por la función $h(t) = -16t^2 + 96t$. ¿Cuál es la altura máxima que alcanzará el cohete? ¿Después de cuánto tiempo llegará al suelo?
- 59. Ingeniería.** El tiempo T requerido para que un elevador suba un peso w varía conjuntamente con el peso y la distancia d que ha de subir e inversamente con la fuerza p del motor. Si a un motor de tres caballos de fuerza le toma 24 s subir 500 lb una distancia de 60 ft, ¿qué fuerza será necesaria para subir 700 lb una distancia de 100 ft en 35 s?
- 60. Física.** El periodo P de un péndulo varía directamente con la raíz cuadrada de la longitud l . ¿Cómo tendría que cambiarse la longitud para que el periodo sea tres veces más largo?

Capítulo



Funciones polinómicas y racionales

En el capítulo 1 se hizo un repaso de las diferentes operaciones realizadas con expresiones polinómicas. Un polinomio en una variable define a una función cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales. Tales funciones han sido de gran importancia en matemáticas. Asimismo, las funciones formadas al tomar cocientes de polinomios, llamadas funciones racionales, también tienen numerosas aplicaciones. A continuación se exponen algunas de las posibles aplicaciones de funciones polinómicas y racionales.

Ingeniería

Un tractocamión repartidor de petróleo tiene un tanque en la forma de cilindro con una semiesfera unida en cada extremo. Si la longitud total del tanque es de 20 ft y la capacidad total de almacenamiento es de 162π ft³, ¿cuál es el radio del cilindro?

Manufactura

Durante un turno de ocho horas, el número de mercancías producidas en una fábrica está dado por $n(t) = t^2 + 16t$ donde $0 \leq t \leq 8$. El costo total en dólares por producir $n(t)$ mercancías está dado por $c(t) = 120t + 960$. El costo promedio de producción

es una función de t y está dado por $a(t) = \frac{c(t)}{n(t)}$.

Graficar $a(t)$, concentrarse en la porción para $0 < t \leq 8$ e interpretar los resultados.

Una vez que se haya estudiado la teoría de los polinomios y de las ecuaciones polinómicas y que se hayan considerado los teoremas clásicos sobre polinomios se tendrán herramientas para resolver el primero de estos problemas (véase el ejemplo 5 en la sección 4.3) así como para graficar funciones polinómicas. Al final, el estudio de las funciones racionales y sus gráficas proporcionará la teoría para resolver el segundo problema (véase el ejemplo 7 en la sección 4.5).

Polinomios

En el capítulo 2 se repasó la técnica para resolver ecuaciones que pueden transformarse en una ecuación lineal o de primer orden de la forma

$$ax + b = 0 \quad (a \neq 0).$$

También se expuso cómo se resuelven ecuaciones cuadráticas o de segundo grado de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Uno de los objetivos principales de este capítulo es aprender a resolver ecuaciones de grado superior al segundo. Por supuesto, existen fórmulas para resolver **ecuaciones de tercer grado o cúbicas** tales como

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0)$$

y **ecuaciones de cuarto grado** o cuárticas, tales como

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad (a \neq 0).$$

Sin embargo, rara vez se utilizan ya que son complicadas en extremo. No existen fórmulas para resolver ecuaciones de grado superior al cuarto. En consecuencia, al resolver ecuaciones generales de grado superior al segundo, el procedimiento consiste en buscar soluciones con base en varios teoremas. Con frecuencia, las soluciones sólo se aproximan utilizando técnicas numéricas.

Polinomios con coeficientes reales

Una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ son números reales constantes y n es un entero no negativo, se denomina **polinomio con coeficientes reales en la variable x** . Cada una de las expresiones $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_1 x$, y a_0 se denomina **término** del polinomio. A los números

$$a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$$

se les llama **coeficientes**, y $a_n \neq 0$ se le denomina **coeficiente principal**. Si todos los coeficientes son nulos, el polinomio recibe el nombre de **polinomio nulo**. El polinomio $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$) tiene **grado n** o es de **n -ésimo grado**, y el polinomio nulo no tiene grado.

Por ejemplo, el polinomio $2x^4 - 3x^3 - x + 1$ es un polinomio de cuarto grado con coeficiente principal 2. El coeficiente del término x^2 no presente es 0. El polinomio nulo, denotado por 0, no tiene coeficiente principal ni grado. Un polinomio de grado cero es simplemente la constante a_0 . Por ejemplo, 15 es un polinomio de grado cero ya que 15 puede expresarse como $15x^0$.



Ecuaciones polinomiales

Una solución a una ecuación polinómica de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

es un número (ya sea real o complejo) que, cuando sustituye a la variable, hace verdadera a la ecuación. El uso de la notación funcional con polinomios puede abreviar el trabajo. Por ejemplo, sea

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

la frase "evalúese el polinomio $P(x)$ cuando x es igual a 2" puede acortarse a "hállese $P(2)$ ". La ecuación polinómica correspondiente se abrevia $P(x) = 0$.

EJEMPLO 1

Sea $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$.

a) Hallar el valor de $P(x)$ cuando x es 2; es decir, hállese $P(2)$.

$$\begin{aligned} P(2) &= (2)^3 - 2(2)^2 + 3(2) - 1 \\ &= 8 - 8 + 6 - 1 = 5 \end{aligned}$$

b) Hallar $P(-1)$.

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^3 - 2(-1)^2 + 3(-1) - 1 \\ &= -1 - 2 - 3 - 1 = -7 \end{aligned}$$

Ceros de un polinomio

Si $P(x)$ es un polinomio y r es un número (real o complejo) tal que $P(r) = 0$, entonces r se denomina **cero** del polinomio $P(x)$ y es una **solución** o **raíz** de la ecuación polinómica $P(x) = 0$.

La letra P utilizada para representar un polinomio no tiene una importancia especial; otras letras pueden emplearse también, así como otras letras diferentes a x se usan para la variable. Por lo tanto, podrían expresarse polinomios tales como $Q(y)$, $F(t)$, o $f(x)$.

EJEMPLO 2

Evaluar el polinomio $Q(t) = t^3 + 3t^2 + t + 3$ cuando $t = -3$, i y $-i$.

$$Q(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 + (-3) + 3 = -27 + 27 - 3 + 3 = 0$$

$$Q(i) = (i)^3 + 3(i)^2 + (i) + 3 = -i - 3 + i + 3 = 0$$

$$Q(-i) = (-i)^3 + 3(-i)^2 + (-i) + 3 = i - 3 - i + 3 = 0$$

Así, -3 , i y $-i$ son ceros de $Q(t)$ y, por supuesto, soluciones de la ecuación polinómica $Q(t) = 0$. ■

División sintética

Las soluciones de las ecuaciones polinómicas pueden ser números reales o complejos, como se señala en el ejemplo 2. En este punto puede verse si un número determinado es una solución de una ecuación



polinómica; sin embargo, no se tiene todavía un método para encontrar las posibles soluciones. Aunque no es claro todavía, la habilidad de dividir con rapidez un polinomio $P(x)$ entre un binomio de la forma $x - r$ es una herramienta utilísima para resolver ecuaciones. El método de división larga, estudiado en el capítulo 1, puede acortarse mediante un proceso denominado **división sintética**. Supóngase que se divide $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ entre $x - 2$.

$$\begin{array}{r}
 2x^2 + x + 5 \\
 x - 2 \overline{) 2x^3 - 3x^2 + 3x - 4} \\
 \underline{2x^3 - 4x^2} \\
 x^2 + 3x \\
 \underline{x^2 - 2x} \\
 5x - 4 \\
 \underline{5x - 10} \\
 6
 \end{array}$$

El trabajo puede abreviarse con sólo escribir los coeficientes.

$$\begin{array}{r}
 2 + 1 + 5 \\
 1 - 2 \overline{) 2 - 3 + 3 - 4} \\
 \underline{-4} \\
 1 + 3 \\
 \underline{-2} \\
 5 - 4 \\
 \underline{-10} \\
 6
 \end{array}$$

Si $P(x)$ es de grado n , entonces $Q(x)$ es de grado $n - 1$. En este caso, ya que $2x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ es de grado 3, $Q(x)$ es de grado 2.

El primer término en cada renglón (que aparece a color arriba) es innecesario ya que se resta en el siguiente paso. Por consiguiente, el procedimiento puede abreviarse eliminando estos números.

$$\begin{array}{r}
 2 + 1 + 5 \\
 1 - 2 \overline{) 2 - 3 + 3 - 4} \\
 \underline{} \\
 1 + 3 \\
 \underline{} \\
 5 - 4 \\
 \underline{} \\
 6
 \end{array}$$

El residuo R es siempre una constante. Por ello, si R contiene a la variable x a alguna potencia, el proceso de división debe continuar hasta que x no aparezca.

El 1 en el divisor $1 - 2$ es innecesario ya que el primer número no se escribe más en otros renglones. Además, "bajar" al siguiente término sólo desperdicia espacio ya que todas las restas pueden realizarse en un renglón, como se muestra más adelante en color.

$$\begin{array}{r}
 2 + 1 + 5 \\
 -2 \overline{) 2 - 3 + 3 - 4} \\
 \underline{1 + 5 + 6}
 \end{array}$$

El 2 inicial en el cociente $2 + 1 + 5$ es siempre el mismo que el término inicial en el dividendo $2 - 3 + 3 - 4$, y los términos restantes en el cociente $(1 + 5)$ se reescriben frente al residuo (el cual es 6) en el renglón de abajo $1 + 5 + 6$. Así, el procedimiento podría abreviarse más aún al escribir el cociente sólo en el renglón de abajo "bajando" primero el 2.

$$\begin{array}{r} -2 \overline{) 2 - 3 + 3 - 4} \\ \underline{-4 - 2 - 10} \\ 2 + 1 + 5 + 6 \end{array}$$

Por último, ya que las líneas de división son superfluas, éstas deben omitirse. Además, ya que el proceso de suma es más rápido que el de resta, al cambiar el signo del divisor (de -2 a $+2$) pueden obtenerse los coeficientes en el cociente al sumar en lugar de restar.

$$\begin{array}{r} +2 \overline{) 2 - 3 + 3 - 4} \\ \underline{+4 + 2 + 10} \\ 2 + 1 + 5 + 6 \end{array}$$

El primer 2 se escribe bajo la línea y se multiplica por el divisor $+2$, el producto que es 4, se coloca sobre la línea. Se suma -3 a 4, de lo que se obtiene 1, el cual se multiplica por el divisor $+2$, y el producto, que es 2, se coloca sobre la línea. Se suma 3 a 2, de lo que se obtiene 5, el cual se multiplica por el divisor $+2$, y el producto que es 10, se coloca sobre la línea. La suma final de -4 y 10 da 6, la última anotación bajo la línea, la cual es el residuo, mientras que $2 + 1 + 5$ corresponde al cociente $2x^2 + x + 5$.

RECOMENDACIÓN Cuando se divida un polinomio $P(x)$ entre un binomio $x - r$ utilizando la división sintética, siempre ordénese $P(x)$ en potencias decrecientes de x e insértese un cero para todos los términos con coeficientes nulos.

EJEMPLO 3

Dividir $x^4 - 2x^2 + x + 3$ entre $x - 1$ utilizando división sintética.

El divisor $x - r$ es $x - 1$ de modo que $r = 1$. Asegúrese de introducir el cero en la posición del término x^3 que no aparece. El polinomio es $x^4 + 0x^3 - 2x^2 + x + 3$.

$$\begin{array}{r} 1 \overline{) 1 + 0 - 2 + 1 + 3} \\ \underline{1 + 1 - 1 + 0} \\ 1 + 1 - 1 + 0 + 3 \end{array}$$

El cociente es $x^3 + x^2 - x$ y el residuo es 3.

EJEMPLO 4

Dividir $3x^5 - 2x^3 + 7 - x + x^2$ entre $x + 2$ utilizando división sintética.

El divisor $x - r$ es $x + 2$ de modo que se tiene $x + 2 = x - (-2)$; por consiguiente, $r = -2$. Es menester asegurarse de intercalar el coeficiente cero y reordenar los términos en orden descendente. El polinomio es $3x^5 + 0x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 7$.

$$\begin{array}{r} -2 \overline{) 3 + 0 - 2 + 1 - 1 + 7} \\ \underline{-6 + 12 - 20 + 38 - 74} \\ 3 - 6 + 10 - 19 + 37 - 67 \end{array}$$

El cociente es $3x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 19x + 37$, y el residuo es -67 . ■

Con práctica, el proceso de división sintética se vuelve mecánico y puede efectuarse en un tiempo corto. Con la ayuda de una calculadora es posible aumentar la velocidad aún más, en especial cuando los coeficientes del polinomio son grandes en valor absoluto o están en notación decimal. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5

Dividir $6x^4 - 48x^3 + 210x^2 - 457x - 5\,043$ entre $x + 3$ utilizando división sintética y una calculadora.

		-3	6	-48	210	-457	-5 043
			-18	198	-1 224	5 053	
			6	-66	408	-1 681	0

PRIMERO:	ALG:	3	+/-	STO	×	6	+	48	+/-	=	↑
	RPN:	3	CHS	STO	ENTER	6	×	48	CHS	+	

SEGUNDO:	ALG:	PANTALLA	×	RCL	+	210	=	↑
	RPN:	PANTALLA	RCL	×	210	+	=	

TERCERO:	ALG:	PANTALLA	×	RCL	+	457	+/-	=	↑
	RPN:	PANTALLA	RCL	×	457	CHS	+	=	

CUARTO:	ALG:	PANTALLA	×	RCL	+	5 043	+/-	=	↑
	RPN:	PANTALLA	RCL	×	5 043	CHS	+	=	

Los números -18 , 198 , $-1\,224$, y $5\,053$, mostrados en color, no se escriben cuando se realizan los pasos con la calculadora; aquí sólo se ofrecen para verificar los pasos empleados. Además, el símbolo **PANTALLA** no representa una entrada de la calculadora sino el número mostrado en la pantalla (*display*) al final de cada paso. Obsérvese cómo la secuencia

$$\begin{array}{l} \text{ALG: } \boxed{\times} \boxed{\text{RCL}} \boxed{+} \text{Número} \boxed{+/-} \boxed{=} \\ \text{RPN: } \boxed{\text{RCL}} \boxed{\times} \text{Número} \boxed{\text{CHS}} \boxed{+} \end{array}$$

ocurre repetidamente donde $\boxed{+/-}$ o $\boxed{\text{CHS}}$ se utiliza sólo en el caso de un coeficiente negativo. ■

NOTA. La división sintética de un polinomio $P(x)$ entre un binomio se desarrolló sólo para binomios de la forma $x - r$. Si se desea dividir entre un binomio de la forma $ax - r$, $a \neq 1$, primero debe cambiarse la forma de $P(x)$ y $ax - r$. Por ejemplo, ya que

$$\frac{9x^3 + 18x^2 - 3x + 6}{3x - 1} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)(9x^3 + 18x^2 - 3x + 6)}{\left(\frac{1}{3}\right)(3x - 1)} = \frac{3x^3 + 6x^2 - x + 2}{x - \frac{1}{3}},$$

puede transformarse el problema dado en la forma correcta para la división sintética.

4.1. Ejercicios

Determinar para cada polinomio en los ejercicios 1-9 a) su grado, b) el coeficiente principal, c) $P(2)$ y d) $P(-1)$.

1. $P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 5$

2. $P(z) = -z^4 - 3z^2 + 5$

3. $P(x) = -2x + \sqrt{2}$

4. $P(u) = \sqrt{5} - u^3$

5. $P(y) = 2y^2 - y^4 - 1$

6. $P(x) = 3x^3 - x^5 + 2$

7. $P(t) = 8$

8. $P(t) = 0$

9. $P(x) = 3x^{12} - x^4 - 5x^2 + 3$

10. Determinar si 1, 2 y 3 son ceros del polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$.

11. Determinar si 1, -1 y 2 son ceros del polinomio $f(x) = 3x^4 - 2x^2 - 1$.

12. Determinar si 3, $1 + i$, y $1 - i$ son ceros del polinomio $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6$.

13. Determinar si 0, 1 y -1 son soluciones de la ecuación polinomial $2x^4 - 5x^3 + 3x = 0$.

14. Indicar si 1, $2i$ y $-2i$ son soluciones de la ecuación polinomial $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$.

15. Resolver si -1 , $\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ y $\frac{3-i\sqrt{3}}{2}$ son soluciones de la ecuación polinomial $x^3 - 3x^2 + 3x = 0$.

16. **Administración.** El ingreso en dólares obtenida por concepto de venta de x bienes está dada por $R(x) = 200x$. El costo en dólares por producir x de estos bienes está dado por $C(x) = 1\,000 + 100x$. Los ceros del polinomio $P(x) = R(x) - C(x)$ se denominan puntos de equilibrio. Encontrar $P(x)$ y usarlo para determinar si 10 es un punto de equilibrio.

17. **Movimiento.** La altura en ft de un objeto impulsado hacia arriba con una velocidad inicial de 240 ft/s desde una altura inicial de 1 600 ft puede expresarse como un polinomio en la variable t (tiempo) por $h(t) = -16t^2 + 240t + 1\,600$. Demostrar que 20 es un cero de $h(t)$ e interpretar este resultado.

Encontrar cada cociente y residuo en los ejercicios 18-29 utilizando división sintética.

18. $(x^3 - x^2 + 2x - 3) \div (x - 1)$

19. $(3y^3 - 2y^2 + y - 5) \div (y - 2)$

20. $(2x^3 - 3x + 5) \div (x - 2)$

21. $(3z^4 - 2z^2 + z - 3) \div (z - 3)$

22. $(t^4 - 2t^3 + t^2 - t + 5) \div (t + 2)$

23. $(2x^5 - 3x^4 - 6x^3 + x + 8) \div (x - 3)$

24. $(z^2 - z + 2 + z^4) \div (z - 2)$

25. $(y^3 - y + y^4 - 3) \div (y + 1)$

26. $(6t^3 - t^2 + 2) \div \left(t + \frac{1}{3}\right)$

27. $(6x^3 - x + 4) \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$

28. $(2y^3 + 3y^2 + 7y + 3) \div (2y + 1)$

29. $(t^3 + 3t^2 + t + 3) \div (t + i)$

Emplear una calculadora y la división sintética para encontrar cada cociente y residuo en los ejercicios 30-33.

30. $(5x^4 - 30x^3 + 180x^2 - 640x + 800) \div (x - 3)$

31. $(7x^5 - 25x^4 + 80x^3 - 170x^2 + 305x + 2600) \div (x + 2)$

32. $(2.1x^3 - 3.45x^2 + 6.865x + 7.5312) \div (x - 1.2)$

33. $(6.5x^3 - 2.77x^2 + 11.413x - 456.329) \div (x + 3.6)$

34. ¿Es posible que un polinomio no tenga ceros?

35. Demostrar que el polinomio $P(x) = -x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ no puede tener un cero que sea número real negativo.

36. Comprobar que el polinomio $P(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ no puede tener un cero que sea número real positivo.

37. ¿Cuál es el valor de m tal que $x^3 + x^2 - x + m$ tenga un residuo igual a 0 cuando se divide entre $x - 1$.

38. ¿Cuál es el valor de m tal que $x^3 - 2x^2 + mx + 1$ tenga un residuo igual a 5 cuando se divide entre $x + 2$.

39. Sea $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. a) Encontrar $P(1)$. b) Obtener el residuo cuando $P(x)$ se divide entre $x - 1$.

c) Comparar los resultados de las partes a) y b).

40. Sea $P(x) = 2x^4 - 4x^2 + x - 2$. a) Encontrar $P(-2)$. b) Obtener el residuo cuando $P(x)$ se divide entre $x + 2$.

c) Comparar los resultados de las partes a) y b).

Para repaso

41. Localizar el punto medio del segmento que une a $(6, -1)$ y $(3, 5)$.
42. Hallar la pendiente de la recta que pasa a través de los puntos $(4, -3)$ y $(7, -3)$.
43. Encontrar la forma general de la ecuación de la recta que pasa a través de $(6, 1)$ y que es perpendicular a $3x + 6y - 2 = 0$.
44. Hallense el cociente y el residuo cuando el polinomio $3x^3 - 4x^2 + x - 7$ se divide entre $x - 2$.
45. ¿Cuál es el conjugado de cada número complejo? a) $3 - 2i$. b) $5 + i\sqrt{7}$

4.2. TEOREMAS SOBRE POLINOMIOS

Algoritmo de la división

Una conocida propiedad de la aritmética, llamada **algoritmo de la división**, establece que si p , d , q y r son números enteros no negativos con $d \neq 0$, tales que $p \div d = q$ con un residuo igual a r , entonces

$$p = qd + r.$$

Por ejemplo, si se divide 13 entre 4, el cociente es 3 con un residuo igual a 1, y

$$13 = 3 \cdot 4 + 1.$$

Un resultado análogo es válido para los polinomios.

Algoritmo de la división

Sean $P(x)$ y $D(x)$ polinomios con $D(x) \neq 0$ (el polinomio nulo). Entonces, existen polinomios únicos $Q(x)$ y $R(x)$ tales que

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x)$$

es cierto para todos los números reales x . Además, $R(x)$ o es el polinomio nulo o su grado es menor que el grado de $D(x)$.

EJEMPLO 1

Sea $P(x) = 3x^3 - 4x^2 + x - 7$ y $D(x) = x - 2$.

Supóngase que $P(x)$ se divide entre $D(x)$ utilizando división sintética.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 3 & -4 & 1 & -7 \\ & & 6 & 4 & 10 \\ \hline & 3 & 2 & 5 & 3 \end{array}$$

Así, el cociente es $Q(x) = 3x^2 + 2x + 5$, y el residuo es $R(x) = 3$. Entonces,

$$\begin{aligned} P(x) &= Q(x)D(x) + R(x) \\ &= (3x^2 + 2x + 5)(x - 2) + 3. \end{aligned}$$

Teorema del residuo

Cuando se divide un polinomio $P(x)$ entre un binomio $x - r$, el residuo $R(x)$ debe ser el polinomio cero 0, o debe tener grado 0 ya que su grado debe ser menor que 1, el grado de $x - r$. Como resultado, se escribe R para $R(x)$ destacando en muchos de tales casos que R es una constante ($R(x)$ es un polinomio constante). Supóngase que $P(x)$ es un polinomio de grado n y divídase $P(x)$ entre $x - r$. Entonces, $Q(x)$ es de grado $n - 1$, R es una constante y

$$P(x) = Q(x)(x - r) + R.$$

Con $P(x)$ expresado en esta forma, supóngase que se encuentra $P(r)$. Sustituyendo,

$$\begin{aligned} P(r) &= Q(r)(r - r) + R \\ &= Q(r) \cdot 0 + R \\ &= R. \end{aligned}$$

Así, el residuo cuando $P(x)$ se divide entre $x - r$ es $P(r)$. Con ello se ha probado el siguiente teorema.

Teorema del residuo

Si $P(x)$ es un polinomio, r es un número complejo y $P(x)$ se divide entre $x - r$, entonces el residuo obtenido es igual a $P(r)$.

EJEMPLO 2

Utilícese el teorema del residuo para encontrar el valor del polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + x - 6$ para el número dado.

a) $r = 2$

Divídase $P(x)$ entre $(x - 2)$ utilizando división sintética.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & -6 \\ & & 2 & 10 & 22 & 46 \\ \hline & 1 & 5 & 11 & 23 & 40 \end{array}$$

Así, por el teorema del residuo, $P(2) = 40$. Este resultado puede comprobarse por sustitución directa.

$$\begin{aligned} P(2) &= 2^4 + 3(2)^3 + (2)^2 + (2) - 6 \\ &= 16 + 24 + 4 + 2 - 6 = 40 \end{aligned}$$

b) $r = -3$

Divídase $P(x)$ entre $x + 3$ utilizando división sintética.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & 3 & 1 & 1 & -6 \\ & & -3 & 0 & -3 & 6 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Así, por el teorema del residuo, $P(-3) = 0$. Esto significa que -3 es un cero de $P(x)$, y ya que

$$P(x) = Q(x)(x - r) + R,$$

se tiene

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^3 + x - 2)(x + 3) + 0 \\ &= (x^3 + x - 2)(x + 3). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema del factor

Este ejemplo conduce al siguiente teorema.

Teorema del factor

Sea $P(x)$ un polinomio y r un número complejo. Entonces, r es un cero de $P(x)$ si y sólo si $x - r$ es un factor de $P(x)$.

Demostración. Ya que el teorema del factor es un teorema de "sí y sólo si", hay dos cosas que probar. *Primero*, supóngase que r es un cero de $P(x)$; demostrar que $x - r$ es un factor. Si $P(x)$ se divide entre $x - r$, se obtiene $P(x) = Q(x)(x - r) + R$. Pero por el teorema del residuo, $R = P(r)$, y ya que $P(r) = 0$, $P(x) = Q(x)(x - r)$ de modo que $x - r$ es un factor de $P(x)$. *Segundo*, supóngase que $x - r$ es un factor de $P(x)$. Entonces $P(x) = Q(x)(x - r)$ y $P(r) = Q(r)(r - r) = Q(r) \cdot 0 = 0$. Así, r es un cero de $P(x)$.

EJEMPLO 3

Determinar si $x - 5$ es un factor de

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 15.$$

Utilizando el teorema del factor, debe determinarse si $P(5) = 0$. La mejor manera de hacerlo es usar la división sintética.

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & -7 & +13 & -15 \\ & & +5 & -10 & +15 \\ \hline & 1 & -2 & +3 & +0 \end{array} \quad \text{Residuo} = P(5)$$

Ya que $P(5) = 0$, $x - 5$ es un factor de $P(x)$. Al utilizar la división sintética, no sólo se ha descubierto que $P(5) = 0$, sino también que cuando $P(x)$ se divide entre $x - 5$ el cociente es $Q(x) = x^2 - 2x + 3$. Así, es posible representar a $P(x)$ en la forma factorizada

$$P(x) = (x^2 - 2x + 3)(x - 5). \quad \blacksquare$$

Tan pronto como se haya encontrado un cero de un polinomio puede utilizarse el teorema del factor y, por supuesto, buscarse otros ceros que serán ceros de un polinomio cuyo grado es 1 menos que el original. Por ejemplo, para resolver la ecuación polinómica

$$x^3 - 7x^2 + 13x - 15 = 0,$$

si se ha descubierto que 5 es una solución (véase el ejemplo 3), la ecuación puede escribirse en la forma factorizada

$$(x^2 - 2x + 3)(x - 5) = 0,$$

y utilizarse la regla del producto nulo para obtener

$$x^2 - 2x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad x - 5 = 0.$$

Haciendo uso de la fórmula cuadrática para resolver $x^2 - 2x + 3 = 0$, se obtiene

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{2 \pm 2i\sqrt{2}}{2} = 1 \pm i\sqrt{2}.$$

Así, las soluciones de la ecuación original son 5, $1 + i\sqrt{2}$ y $1 - i\sqrt{2}$.

Teorema fundamental del álgebra

Como ya se ha señalado con anterioridad, cada ecuación lineal de la forma

$$a_1x + a_0 = 0 \quad (a_1 \neq 0)$$

tiene una solución. Asimismo, cada ecuación cuadrática de la forma

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (a_2 \neq 0)$$

tiene al menos una solución y a lo más dos soluciones que son números complejos. El siguiente teorema es una generalización de estas observaciones y es resultado del **teorema fundamental del álgebra**, el cual garantiza que cada polinomio de grado $n \geq 1$ tiene al menos un cero en el sistema de los números complejos. (Recuérdese que los números reales son también números complejos.)

Teorema fundamental del álgebra

Cada ecuación polinómica


$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

donde $n \geq 1$, tiene al menos una y a lo más n soluciones distintas que son números complejos.

Obsérvese que este teorema garantiza que las soluciones existen, pero no dice cómo encontrarlas.

EJEMPLO 4

Determinar el número posible de soluciones diferentes para cada ecuación polinómica.

- $3x^3 - x^2 + 5 = 0$ tiene al menos una y a lo más tres soluciones ($n = 3$).
- $12x^7 - 5x^4 + x^3 - 2x^2 + 7x - 1 = 0$ tiene al menos una y a lo más siete soluciones ($n = 7$). 

Los resultados del teorema anterior pueden indicarse con mayor precisión al definir **raíces múltiples**. Por ejemplo, la ecuación polinómica

$$P(x) = (x - 1)(x - 1)(x + 2) = x^3 - 3x + 2 = 0$$

tiene al menos una y a lo más tres soluciones. En realidad, las soluciones pueden encontrarse al notar que cuando $x = 1$ o $x = -2$, $P(x) = 0$. Así, 1 y -2 son soluciones. Ya que $(x - 1)$ es un factor doble de $P(x)$, 1 es una **raíz doble** de $P(x)$, o una **raíz de multiplicidad dos**. Así, contando multiplicidades, $P(x)$ tiene exactamente tres ceros: 1, 1 y

EJEMPLO 5

El polinomio $f(x) = (x + 1)^2(x - 5)^3(x + 3)$ es un polinomio de grado 6 ($n = 6$), y, por consiguiente, tiene al menos uno y a lo más seis ceros (la ecuación polinómica $f(x) = 0$ tiene al menos una y a lo más seis soluciones). Contando multiplicidades, puede decirse que $f(x)$ tiene exactamente seis ceros: -1, -1, 5, 5, 5, y -3. Se dice que -1 es un cero de multiplicidad dos, 5 es un cero de multiplicidad tres y -3 es un cero de multiplicidad uno.

El ejemplo 5 sirve de motivación para el siguiente teorema.

Cada polinomio $P(x)$ de grado n tiene exactamente n ceros (contando multiplicidades) que son números reales o complejos. Es decir, la ecuación

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

tiene exactamente n soluciones o raíces (contando multiplicidades).

Es fácil construir una ecuación polinómica que tiene una colección especificada de raíces haciendo uso del teorema del factor.

EJEMPLO 6

Determinar una ecuación polinomial que tenga a -2 como raíz doble (una raíz de multiplicidad dos), a 4 como raíz triple (una raíz de multiplicidad tres) y a 1 como raíz simple (una raíz de multiplicidad uno).

Contando multiplicidades, debe obtenerse un polinomio de grado seis ($2 + 3 + 1 = 6$), que tenga como factores a $(x - (-2))^2 = (x + 2)^2$, $(x - 4)^3$ y $(x - 1)$. Ya que

$$(x + 2)^2(x - 4)^3(x - 1) = 0,$$

los factores pueden multiplicarse para obtener

$$x^6 - 9x^5 + 12x^4 + 76x^3 - 144x^2 - 192x + 256 = 0,$$

una ecuación polinómica que tiene las raíces deseadas.



Raíces complejas e irracionales

La ecuación polinómica (cuadrática) $x^2 - 2x + 5 = 0$ tiene raíces $1 + 2i$ y $1 - 2i$ (que se encuentra empleando la fórmula cuadrática). Obsérvese que estas soluciones son conjugadas. Esto es resultado del siguiente teorema general, del cual no se ofrece la prueba.

Si el número complejo $a + bi$ es una raíz de la ecuación polinómica con coeficientes *reales*,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0, n \geq 1),$$

entonces su conjugado $a - bi$ también es una raíz. Es decir, las raíces complejas siempre ocurren en pares conjugados.

EJEMPLO 7

Determinar un polinomio, $P(x)$, de grado tres con coeficientes reales tal que la ecuación $P(x) = 0$ tenga a 3 y a $1 + i$ como raíces.

Ya que $1 + i$ es una raíz, por el teorema anterior, $1 - i$ también es una raíz. Así, $(x - 3)$, $(x - (1 + i))$, y $(x - (1 - i))$ son factores de $P(x)$ por el teorema del factor.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 3) \\ &= (x - 3)(x^2 - 2x + 2) \\ &= x^3 - 5x^2 + 8x - 6 \end{aligned}$$

EJEMPLO 8

Determinar el polinomio, $P(x)$, de grado cuatro con coeficientes reales tal que la ecuación $P(x) = 0$ tenga a $2 + i$ como una raíz de multiplicidad dos y a 7 como una raíz de multiplicidad uno.

Ya que $2 + i$ es una raíz doble, $2 - i$ también debe ser una raíz doble. Si también 7 es una raíz, el polinomio tiene cinco raíces y no puede ser de grado cuatro. En consecuencia, no existe polinomio alguno que satisfaga las condiciones dadas.

El teorema anterior sólo es cierto cuando el polinomio en cuestión tiene coeficientes reales. Si se impone una restricción adicional de coeficientes *racionales*, hay un teorema similar para ciertas raíces reales.

Si el número real $a + b\sqrt{c}$, donde a y b son racionales pero \sqrt{c} es irracional, es una raíz de la ecuación polinómica con coeficientes *racionales*.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0, n \geq 1),$$

entonces $a - b\sqrt{c}$ es una raíz también.



EJEMPLO 9

Determinar un polinomio, $P(x)$, de grado cuatro con coeficientes racionales tal que $P(x) = 0$ tenga como raíces a $1 + \sqrt{2}$ e $i\sqrt{3}$

Ya que $1 + \sqrt{2}$ es una raíz, $1 - \sqrt{2}$ es una segunda raíz. Además, como $i\sqrt{3}$ es una raíz, $-i\sqrt{3}$ es la cuarta raíz. Así,

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - (1 + \sqrt{2}))(x - (1 - \sqrt{2}))(x - i\sqrt{3})(x + i\sqrt{3}) \\ &= (x^2 - 2x - 1)(x^2 + 3) \\ &= x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 6x - 3. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.2. Ejercicios

En los ejercicios 1-4 usar la división sintética y el teorema del residuo para encontrar cada valor de $P(x)$ donde

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1.$$

1. $P(1)$ 2. $P(-1)$ 3. $P(5)$ 4. $P(-2)$

En los ejercicios 5-8 utilizar la división sintética y el teorema del residuo para encontrar cada valor de $P(x)$ donde

$$P(x) = x^5 + 3x^3 - x + 1.$$

5. $P(-1)$ 6. $P(2)$ 7. $P(-3)$ 8. $P(1)$

En los ejercicios 9-12 utilizar la división sintética para encontrar el residuo cuando $P(x) = x^3 - 27$ se divide entre cada binomio.

9. $x - 3$ 10. $x + 2$ 11. $x - 4$ 12. $x + 3$

En los ejercicios 13-16 emplear la división sintética para encontrar el residuo cuando $P(x) = x^4 + x^2 - 3$ se divide entre cada binomio.

13. $x + 2$ 14. $x - 1$ 15. $x - 3$ 16. $x + 4$

En los ejercicios 17-20 emplear la división sintética y el algoritmo de la división para expresar $P(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 14$ en la forma $P(x) = Q(x)D(x) + R(x)$ para cada uno de los divisores binomiales dados, $D(x)$.

17. $x - 7$ 18. $x + 2$ 19. $x + 1$ 20. $x - 3$

En los ejercicios 21-24 usar la división sintética y el teorema del factor para determinar si $P(x) = 2x^3 - x^2 - 15x + 18$ tiene al binomio dado como un factor.

21. $x + 3$ 22. $x - 2$ 23. $x - 1$ 24. $x - \frac{3}{2}$

25. Si un polinomio $P(x)$ se divide entre $x - r$, ¿cuál es el valor del residuo?

26. Si un polinomio $P(x)$ se divide entre $x + r$, ¿cuál es el valor del residuo?

27. Si r es un cero del polinomio $P(x)$, dar un factor de $P(x)$.

28. Si $-r$ es un cero del polinomio $P(x)$, dar un factor de $P(x)$.

29. Un polinomio de grado $n \geq 1$ ¿cuántos ceros distintos tiene al menos?

30. Un polinomio de grado $n \geq 1$ ¿cuántos ceros distintos tiene a lo más?

31. Si 5 es un cero de multiplicidad dos del polinomio $P(x)$, dar un factor cuadrático de $P(x)$.

32. Si -2 es un cero de multiplicidad tres de un polinomio $P(x)$, dar un factor cúbico de $P(x)$.

33. Contando multiplicidades, ¿exactamente cuántos ceros reales o complejos tiene un polinomio de grado 5?

34. Contando multiplicidades, ¿exactamente cuántos ceros reales o complejos tiene un polinomio de grado 0?

35. Si $3 + 2i$ es un cero del polinomio $P(x)$, con coeficientes reales, dar otro cero de $P(x)$.

36. Si $5 - 6i$ es un cero del polinomio $P(x)$, con coeficientes reales, dar otro cero de $P(x)$.
37. Si $1 - 3\sqrt{2}$ es un cero del polinomio $P(x)$, con coeficientes racionales, dar otro cero de $P(x)$.
38. Si $2 + 3\sqrt{5}$ es un cero del polinomio $P(x)$, con coeficientes racionales, dar otro cero de $P(x)$.
39. Demostrar que 3 es una solución de $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$, y encontrar las soluciones restantes.
40. Demostrar que -2 es una solución de $x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$, y encontrar las soluciones restantes.
41. ¿Cuál es el número más grande de soluciones distintas que puede tener la ecuación $x^5 - 3x^3 + x^2 - 5x + 7 = 0$?
¿El más pequeño? ¿Exactamente cuántas soluciones tiene, contando multiplicidades?
42. ¿Cuál es el número más grande de soluciones distintas que puede tener la ecuación $x^7 + x^4 - 3x^3 + 7x^2 + 1 = 0$?
¿El más pequeño? ¿Exactamente cuántas soluciones tiene, contando multiplicidades?

En los ejercicios 43-46 determinar un polinomio $P(x)$ con coeficientes racionales del menor grado tal que los números dados sean raíces de $P(x) = 0$.

43. 3 es una raíz doble y $1 + 2i$ es una raíz simple.
44. 2 y $3 + \sqrt{2}$ son raíces simples
45. 0 es una raíz doble y $1 - \sqrt{3}$ es una raíz simple.
46. -2 , $-\sqrt{2}$ y $-i\sqrt{2}$ son raíces simples.

En los ejercicios 47-48 encontrar cada valor polinomial con calculadora, división sintética y el teorema del residuo.

47. $P(x) = 6.5x^5 - 4.1x^4 + 3.25x^3 - 7.51x - 521.4674$; $P(-2.6)$
48. $P(x) = 7.3x^4 - 8.5x^3 + 2.153x^2 - 4.16x - 3219.0574$; $P(5.3)$
49. Las soluciones de $x^3 - 1 = 0$ se denominan raíces cúbicas de 1. ¿Cuántas raíces cúbicas de 1 hay? Determinélas.
50. Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ es un polinomio tal que $P(x) = 0$ para cada número real x , probar que $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son todos nulos, es decir, que $P(x)$ es el polinomio nulo.
51. Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, y $P(x) = Q(x)$ para cada número real x , comprobar que $a_i = b_i$, para $i = 0, 1, 2, \dots, n$.
52. Demostrar que $1 + i$ es un cero de $P(x) = x^2 + (1 - i)x - 2 - 2i$, pero $1 - i$ no. ¿Contradice esto al teorema presentado en esta sección?
53. Demostrar que $1 + \sqrt{2}$ es un cero de $P(x) = x^2 - \sqrt{2}x - 1 - \sqrt{2}$, pero que $1 - \sqrt{2}$ no. ¿Contradice esto al teorema presentado en esta sección?

Problemas

54. Considérese el polinomio $P(x) = x^8 - 3x^4 + x^2 - x^9 + 7$. a) ¿Cuál es el grado de $P(x)$? b) ¿Cuál es el coeficiente principal de $P(x)$? c) Encontrar $P(-1)$.
55. **Administración.** El ingreso en dólares obtenido por concepto de ventas de x mercancías está dada por $R(x) = 125x$. El costo en dólares por producir x mercancías está dado por $C(x) = 600 + 85x$. Si $P(x) = R(x) - C(x)$, localizar los puntos de equilibrio al encontrar los ceros de $P(x)$.
56. Dar en orden descendente el polinomio $2x^2 - 7x^5 + 5 - 3x^3 + x^7 + 8x^6$.
57. Considérese el polinomio $P(x) = 15x^4 - 3x^3 + x^2 + 7x - 6$. a) Encontrar $P(-x)$. b) Haga una lista de todos los factores del coeficiente principal 15. c) Haga una lista de todos los factores del término constante -6 .

Los teoremas presentados en la sección anterior ofrecen información acerca de la naturaleza de las soluciones de una ecuación polinómica. Aunque no está disponible una regla específica para encontrar todas las soluciones de una ecuación polinómica general, en ciertas situaciones es posible encontrar algunas soluciones si es que no todas. En esta sección se consideran tres teoremas que ayudarán a resolver este problema. El primer teorema proporciona información acerca del número de soluciones reales; el segundo se refiere a cómo localizar un intervalo en el que deben encontrarse las soluciones reales, si acaso existen, y el tercero determina todas las soluciones racionales posibles.

Regla de los signos de Descartes

El primer teorema a considerar lo desarrolló el matemático francés René Descartes, el padre de la geometría analítica, en 1636. Permite determinar el número de soluciones reales positivas y negativas de una ecuación polinómica, y depende de la "variación de signo" de un término a otro en un polinomio escrito en orden descendente. Por ejemplo, considérese la ecuación polinómica

$$P(x) = 2x^5 - x^4 + 3x - 6 = 0.$$

Hay tres variaciones en los signos de los términos de $P(x)$, como se muestra abajo:

$$P(x) = 2x^5 - x^4 + 3x - 6 = 0$$

En forma análoga, hay cuatro variaciones en los signos de $Q(x)$ en la ecuación

$$Q(x) = 5x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 7x + 10.$$

Así, una "variación de signos" ocurre cada vez que dos términos sucesivos tienen signos opuestos. El teorema también depende de la variación de signos de la ecuación formada al reemplazar a x por $-x$ en toda la ecuación original. Por ejemplo,

$$P(-x) = -2x^5 - x^4 - 3x - 6$$

no tiene variación en los signos, mientras que

$$Q(-x) = -5x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 7x + 10$$

tiene una variación en los signos. El teorema de Descartes se presenta sin prueba, pues excedería el alcance de este curso.

Regla de los signos de Descartes

Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales cuyo término constante es diferente de cero.

1. Soluciones reales positivas: El número de soluciones reales positivas de la ecuación $P(x) = 0$ es igual al número de variaciones de signos en $P(x)$ o es menor que el número de variaciones en un número par.
2. Soluciones reales negativas: El número de soluciones reales negativas de la ecuación $P(x) = 0$ es igual al número de variaciones de signos en $P(-x)$ o es menor que el número de variaciones en un número par.

EJEMPLO 1

¿Qué puede decirse acerca del número de soluciones reales positivas y negativas de la ecuación polinómica dada?

a) $P(x) = 5x^4 - 6x^3 + x - 9 = 0$

$$P(x) = 5x^4 - 6x^3 + x - 9 \quad \text{Polinomio de grado 4}$$

$$P(-x) = 5x^4 + 6x^3 - x - 9 \quad \text{Polinomio de grado 4}$$

Así, la ecuación tiene 1 o 3 soluciones reales positivas y 1 solución negativa. Puede utilizarse una tabla para resumir las diferentes posibilidades. Recuérdese que si el grado de $P(x)$ es 4, debe haber 4 soluciones de la ecuación.

Número total de soluciones	Número de soluciones negativas	Número de soluciones positivas	Número de soluciones no reales
4	1	1	2
4	1	3	0

b) $Q(x) = 4x^6 + 3x^4 - 7x + 8 = 0$

$$Q(x) = 4x^6 + 3x^4 - 7x + 8 \quad \text{Polinomio de grado 6}$$

$$Q(-x) = 4x^6 + 3x^4 + 7x + 8 \quad \text{Polinomio de grado 6}$$

Así, la ecuación tiene 2 o 0 soluciones reales positivas y 0 soluciones negativas.

Número total de soluciones	Número de soluciones negativas	Número de soluciones positivas	Número de soluciones no reales
6	0	0	6
6	0	2	4

c) $R(x) = 7x^6 - 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x = 0$

Ya que el término constante es cero, la regla de Descartes no se aplica a $R(x)$. No obstante, obsérvese que puede factorizarse una x y aplicarse el teorema al factor restante. Como resultado, es obvio que 0 es una solución de la ecuación

$$R(x) = x(7x^5 - 2x^3 - 5x^2 + 2x - 1) = 0.$$

Sea

$$S(x) = 7x^5 - 2x^3 - 5x^2 + 2x - 1 \quad \text{Polinomio de grado 5}$$

$$S(-x) = -7x^5 + 2x^3 - 5x^2 - 2x - 1 \quad \text{Polinomio de grado 5}$$

Así, $S(x) = 0$ tiene 3 o 1 soluciones reales positivas y 2 o 0 soluciones reales negativas. Las soluciones posibles de $S(x) = 0$ se resumen en la tabla.

Número total de soluciones	Número de soluciones negativas	Número de soluciones positivas	Número de soluciones no reales
5	0	1	4
5	0	3	2
5	2	1	2
5	2	3	0

d) $W(x) = x^6 + 5x^4 + 2x^2 + 8 = 0$

Puesto que no hay variaciones de signo ni en $W(x)$ ni en $W(-x)$, no hay, por tanto, soluciones reales ni positivas ni negativas. Por consiguiente, la ecuación debe tener 6 soluciones complejas, las cuales ocurren en tres pares conjugados. ■

Acotamiento de soluciones

El siguiente teorema ayuda a determinar las cotas superior e inferior para las soluciones reales de una ecuación polinómica. Si $P(x) = 0$ no tiene raíz real alguna mayor que el número real a , a a se le denomina **cota superior** para las raíces reales. En forma análoga, si $P(x) = 0$ no tiene raíz real alguna menor que el número real b , a b se le denomina **cota inferior** para las raíces reales. Es decir, a y b son cotas superior e inferior para las raíces reales de $P(x) = 0$ si

$$b \leq \text{toda raíz real} \leq a.$$

Las raíces de la ecuación polinómica $P(x) = (x - 1)(2x - 1)(2x + 1) = 0$ son $-1/2$, $1/2$ y 1 . Así, cualquier número b tal que $b \leq -1/2$ es una cota inferior para las raíces y cualquier número a tal que $a \geq 1$ es una cota superior. Supóngase que se hubiera comenzado con los factores de $P(x)$ multiplicados,

$$P(x) = 4x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0,$$

y que se desconocieran los valores de las tres raíces. Usando la división sintética para dividir $P(x)$ entre $x + 2$, $x + 1$, $x - 0$, $x - 1$, $x - 2$ y $x - 3$.

$$\begin{array}{r}
 \underline{-2} \quad 4 - 4 - 1 + 1 \\
 \quad - 8 + 24 - 46 \\
 \hline
 4 - 12 + 23 - 45
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \underline{-1} \quad 4 - 4 - 1 + 1 \\
 \quad - 4 + 8 - 7 \\
 \hline
 4 - 8 + 7 - 6
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \underline{0} \quad 4 - 4 - 1 + 1 \\
 \quad 0 + 0 + 0 \\
 \hline
 4 - 4 - 1 + 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \underline{1} \quad 4 - 4 - 1 + 1 \\
 \quad + 4 + 0 - 1 \\
 \hline
 4 + 0 - 1 + 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \underline{2} \quad 4 - 4 - 1 + 1 \\
 \quad + 8 + 8 + 14 \\
 \hline
 4 + 4 + 7 + 15
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \underline{3} \quad 4 - 4 - 1 + 1 \\
 \quad + 12 + 24 + 69 \\
 \hline
 4 + 8 + 23 + 70
 \end{array}$$

Obsérvese que cuando se dividió entre -2 y -1 , los signos en la fila bajo la línea se alternaron consecutivamente de $+$ a $-$, y viceversa. Esto sucede siempre al dividir entre un número negativo que es una cota inferior para las raíces reales. Además, cuando se dividió entre 2 y 3 , los signos en la fila bajo la línea fueron todos positivos. Esto sucede siempre al dividir entre un número positivo que es una cota superior para las raíces reales. El teorema siguiente, presentado sin prueba, resume estos resultados.

Supóngase que el polinomio $P(x)$ se divide entre $x - r$ (utilizando división sintética).

1. Si r es negativo y los términos en la tercera fila (bajo la línea) se alternan de positivo a negativo (o puede considerarse ya sea positivo o negativo), entonces $P(x) = 0$ no tiene raíz alguna mayor que r .
2. Si r es positivo y los términos en la tercera fila son todos positivos o nulos, entonces $P(x) = 0$ no tiene raíz alguna mayor que r .

EJEMPLO 2

Verificar que -2 es una cota inferior y 3 es una cota superior para las raíces reales de $3x^4 - 5x^3 + 19x^2 - 35x - 14 = 0$.

Haciendo uso de la división sintética, se divide entre -2 y 3 .

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 3 & -5 & +19 & -35 & -14 \\ & & +6 & -22 & +82 & -234 \\ \hline & 3 & +1 & -3 & +47 & -248 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrrr} 3 & 3 & -5 & +19 & -35 & -14 \\ & & +9 & +12 & +93 & +174 \\ \hline & 3 & +4 & +31 & +58 & +160 \end{array}$$

Ya que los signos se alternan en el primer caso y son todos más en el segundo, se sabe que -2 es una cota inferior y 3 es una cota superior para las raíces de la ecuación.

Teorema de la raíz racional

El proceso de determinar todas las soluciones de una ecuación polinómica con coeficientes enteros se simplifica en gran medida haciendo uso del teorema anterior y el siguiente.

Teorema de la raíz racional

Supóngase que

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

es un polinomio para el cual todos los coeficientes, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$, son enteros. Si p/q es un número real reducido a su mínima expresión, tal que p/q es una raíz de $P(x) = 0$ (es decir $P(p/q) = 0$), entonces p es un factor de a_0 y q es un factor de a_n .

Este teorema no proporciona directamente los ceros de un polinomio $P(x)$ (las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$). Sin embargo, sí ofrece una lista limitada de soluciones racionales posibles. El teorema de la raíz racional se utiliza junto con el proceso de división sintética y el siguiente resultado.

Supóngase que p/q es una raíz; entonces $x - p/q$ es un factor y

$$P(x) = \left(x - \frac{p}{q}\right) \cdot Q(x),$$

donde $Q(x)$ es un polinomio cuyo grado es uno menos que el de $P(x)$. Las soluciones adicionales de $P(x) = 0$ deben ser entonces soluciones de

$$Q(x) = 0.$$

Entonces se aplica el teorema de la raíz racional para resolver $Q(x) = 0$. Además, es aconsejable considerar primero el número de soluciones reales positivas y negativas posibles.

EJEMPLO 3

Hacer una lista de las soluciones racionales posibles de la ecuación $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x - 4 = 0$, ¿Cuáles son todas las soluciones?

Ya que $P(x)$ tiene tres variaciones de signo, la ecuación tiene 3 o 1 soluciones reales positivas. Además, ya que $P(-x)$ tiene una variación de signo, debe haber una solución real negativa. Para una referencia fácil se han resumido estos resultados:

Número total de soluciones	Número de soluciones negativas	Número de soluciones positivas	Número de soluciones no reales
4	1	3	0
4	1	1	2

Si p/q es una solución racional de esta ecuación, entonces p es un factor de -4 ($a_0 = -4$) y q es un factor de 2 ($a_n = 2$). Así, las posibilidades para p y q son

$$p: 1, -1, 2, -2, 4, -4; \quad q: 1, -1, 2, -2$$

de modo que las soluciones racionales posibles son

$$\frac{p}{q}: 1, -1, 2, -2, 4, -4, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}.$$

Si se utiliza la división sintética para encontrar una solución, se descubrirá también el polinomio de grado 3 que es el otro factor de $P(x)$. Después, hay que concentrarse en encontrar sus ceros.

Procédase a ensayar las ocho soluciones posibles.

$$\frac{p}{q} = 1: \quad \begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 2 & -3 & 2 & -6 & -4 \\ & & 2 & -1 & 1 & -5 \\ \hline & 2 & -1 & 1 & -5 & -9 \end{array}$$

Así, $P(p/q) = P(1) = -9 \neq 0$ de modo que 1 no es una solución.

$$\frac{p}{q} = -1: \quad \begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 2 & -3 & 2 & -6 & -4 \\ & & -2 & 5 & -7 & 13 \\ \hline & 2 & -5 & 7 & -13 & 9 \end{array}$$

De esta manera, $P(p/q) = P(-1) = 9$ de modo que -1 no es una solución. Más aún, ya que los signos en la tercera fila se alternan, no hay necesidad de ensayar con -2 o -4 puesto que -1 es una cota inferior para las raíces.

$$\frac{p}{q} = 2: \quad \begin{array}{r|rrrrrr} 2 & 2 & -3 & 2 & -6 & -4 \\ & & 4 & 2 & 8 & 4 \\ \hline & 2 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{array}$$

Entonces, $P(p/q) = P(2) = 0$ de modo que 2 es una solución y, por el teorema del factor, $x - 2$ es un factor de $P(x)$, con $Q(x) = 2x^3 + x^2 + 4x + 2$ como el otro factor. Así,

$$P(x) = (x - 2)(2x^3 + x^2 + 4x + 2) = 0,$$

lo cual significa que debe resolverse

$$2x^3 + x^2 + 4x + 2 = 0.$$

Cualquier solución racional p/q de esta ecuación debe encontrarse todavía en la lista anterior, pero ahora se sabe que p debe ser un factor de 2 (a_0 es ahora 2) y que q debe ser un factor de 2 (a_n es ahora 2). Las únicas posibilidades son

$$\frac{p}{q}: 2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

debido a que 1, -1 y -2 ya se han descartado.

Ahora, intentemos con $p/q = 2$. Aunque se encontró que 2 es una solución, debe probarse nuevamente puesto que podría ser una solución de la nueva ecuación polinómica $2x^3 + x^2 + 4x + 2 = 0$, es decir, podría ser una raíz doble de la ecuación original.

$$\frac{p}{q} = 2: \quad \begin{array}{r} 2 \overline{) 2 + 1 + 4 + 2} \\ \underline{4 + 10 + 28} \\ 2 + 5 + 14 + 30 \end{array}$$

Por consiguiente, 2 no es una raíz doble. Ya que los signos son todos positivos, 2 es una cota superior para las soluciones reales de la ecuación. Las únicas posibilidades restantes son $-1/2$ y $1/2$.

$$\frac{p}{q} = -\frac{1}{2}: \quad \begin{array}{r} -\frac{1}{2} \overline{) 2 + 1 + 4 + 2} \\ \underline{-1 + 0 - 2} \\ 2 + 0 + 4 + 0 \end{array}$$

Así, $P(p/q) = P(-1/2) = 0$, de modo que $-1/2$ es una solución y, por el teorema del factor, $(x + 1/2)$ es un factor de $2x^3 + x^2 + 4x + 2$ con $2x^2 + 4$ como el otro factor. De esta forma se ha resuelto la ecuación original en

$$(x - 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 4) = 0$$

y se sabe que 2 y $-1/2$ son las dos soluciones racionales. Procédase ahora a resolver la ecuación cuadrática $2x^2 + 4 = 0$.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4 &= 0 \\ x^2 + 2 &= 0 \\ x^2 &= -2 \\ x &= \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}i \end{aligned}$$

Las cuatro soluciones de la ecuación original son 2, $-1/2$, $\sqrt{2}i$, y $-\sqrt{2}i$. Obsérvese que se ha obtenido una solución real negativa, una solución real positiva y dos soluciones complejas. ■

EJEMPLO 4

Encontrar todas las soluciones racionales de $P(x) = x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0$.

Ya que $P(x)$ tiene dos variaciones de signo, la ecuación tiene 2 o 0 soluciones reales positivas. Además, ya que $P(-x)$ tiene una variación de signo, la ecuación tiene 1 solución real negativa. Así, la ecuación tiene una solución real negativa y dos soluciones reales positivas o una solución real negativa y dos soluciones no reales.

Las posibilidades para p son los factores de 2 ($a_0 = 2$), y las posibilidades para q son los factores de 1 ($a_n = 1$).

$$p: 1, -1, 2, -2; \quad q: 1, -1; \quad \frac{p}{q}: 1, -1, 2, -2$$

Cada vez que el coeficiente principal sea 1 (como en este caso) los únicos valores posibles para q son 1 y -1 . En estos casos, las posibilidades para p/q siempre serán enteros (los factores de a_0).

$$\begin{array}{r} \underline{2} \overline{) 1 - 5 + 1 + 2} \\ \underline{2 - 6 - 10} \\ 1 - 3 - 5 - 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} \underline{1} \overline{) 1 - 5 + 1 + 2} \\ \underline{1 - 4 - 3} \\ 1 - 4 - 3 - 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} \underline{-1} \overline{) 1 - 5 + 1 + 2} \\ \underline{-1 + 6 - 7} \\ 1 - 6 + 7 - 5 \end{array}$$

Ya que los signos en la tercera fila se alternan cuando se ensaya con -1 , no hay necesidad de intentarlo con -2 . La ecuación no tiene soluciones racionales.

La teoría de las ecuaciones y el estudio de métodos para resolver ecuaciones polinómicas es un área extensa en matemáticas, en este libro se aborda sólo de forma somera. No obstante, esta introducción será útil para el estudiante que lleva cursos con temas avanzados en matemáticas.

Esta sección concluye con la resolución del primer problema aplicado presentado en la introducción de este capítulo.

EJEMPLO 5

Ingeniería

Un tractocamión repartidor de petróleo tiene un tanque en la forma de cilindro con una semiesfera unida en cada extremo. Si la longitud total del tanque es 20 ft y la capacidad total de almacenamiento es $162\pi \text{ ft}^3$, ¿cuál es el radio del cilindro?

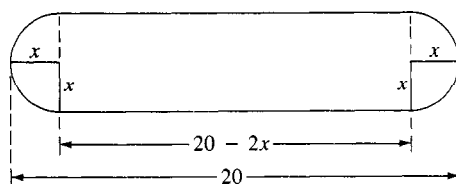


Figura 1

Sea $x =$ el radio del cilindro. Observar en la figura 1 el diagrama del tanque. Como se puede ver, el radio del cilindro es el mismo que el radio de cada semiesfera. El volumen del cilindro es $\pi r^2 h = \pi x^2(20 - 2x)$ y el volumen total de las dos semiesferas es $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi x^3$. Debe resolverse

$$\pi x^2(20 - 2x) + \frac{4}{3}\pi x^3 = 162\pi.$$



Al dividir todo entre π y simplificar se tiene

$$x^3 - 30x^2 + 243 = 0.$$

Ya que el coeficiente principal es 1, las únicas soluciones racionales posibles deben ser enteros que, además, sean divisores de 243. Ya que $243 = 3^5$, las únicas posibilidades son 3, 9, 27, 81 y 243 (por supuesto, no es necesario considerar soluciones negativas).

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 1 - 30 + 0 + 243} \\ \underline{+ 3 - 81 - 243} \\ 1 - 27 - 81 \quad 0 \end{array}$$

Por consiguiente, 3 es una solución. Las soluciones restantes deben resolver $x^2 - 27x - 81 = 0$, pero es fácil demostrar que una de ellas es negativa y la otra es demasiado grande para satisfacer las condiciones del problema. Por lo tanto, el radio del cilindro es 3 ft.

4.3. Ejercicios

En los ejercicios 1-6 encontrar el posible número de soluciones negativas, positivas y no reales para cada ecuación con la regla de los signos de Descartes. No se intente encontrar las soluciones.

1. $x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$
2. $x^3 + 3x^2 - x - 9 = 0$
3. $-x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 5 = 0$
4. $3x^5 - x^4 + x^2 + x + 6 = 0$
5. $2x^6 - 4x^4 + x^2 - 3 = 0$
6. $8x^8 + 6x^6 + 4x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

En los ejercicios 7-12 encontrar la cota superior que sea el mínimo entero positivo y la cota inferior que sea el máximo entero negativo para las soluciones reales de cada ecuación, utilizando el criterio de las cotas superior e inferior.

7. $4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$
8. $2x^3 - 3x^2 + 6x - 9 = 0$
9. $x^4 + x^3 - 7x^2 - 5x + 10 = 0$
10. $9x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 30x - 165 = 0$
11. $6x^4 - 7x^3 - 26x^2 + 7x + 20 = 0$
12. $2x^4 - 15x^3 + 41x^2 - 48x + 20 = 0$

En los ejercicios 13-20, ¿existen soluciones racionales?, ¿cuáles son éstas? Si es posible, encontrar las otras soluciones.

13. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
14. $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$
15. $x^3 - 5x^2 + x + 12 = 0$
16. $x^3 - 6x^2 + 4x - 24 = 0$
17. $3x^3 + x^2 + 12x + 4 = 0$
18. $x^4 - 4x^3 + x^2 + 8x - 6 = 0$
19. $9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + x^2 - 2x = 0$
20. $2x^5 - x^4 - x^3 + 4x^2 - 2x = 0$

21. ¿Por qué $1/2$ podría no ser una solución de la ecuación $x^3 + 3x^2 - x + 7 = 0$.
22. ¿Por qué un polinomio con coeficientes reales de grado 3 debe tener al menos un cero real?
23. Si a es un número real positivo, ¿por qué $x^4 + a = 0$ no puede tener una raíz real?
24. Si a es un número real positivo, ¿por qué $x^4 - a = 0$ debe tener exactamente dos raíces reales?
25. **Administración.** Se va a fabricar una caja de cartón para envíos de tal manera que el largo mida tres veces el ancho y la altura sea dos pulgadas menor que el ancho. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja si su volumen es $2\,400 \text{ in}^3$?
26. **Construcción.** Se va a fabricar una estructura para un embalaje rectangular de embarques a partir de 36 ft de varilla de acero de tal manera que los extremos del embalaje formen un cuadrado. ¿Cuáles son las dimensiones del embalaje si su volumen es 20 ft^3 ?
27. **Agricultura.** Un silo para acopio de maíz tiene la forma de un cilindro circular recto con una semiesfera en la parte superior. Si la altura total del silo es de 20 ft y almacenará $1\,377\pi \text{ ft}^3$ de maíz, ¿cuál es el radio del cilindro?
28. **Agricultura.** Un pastizal ganadero tiene la forma de triángulo rectángulo con la hipotenusa cuatro millas más larga que uno de los catetos. Si su área es 24 mi^2 , ¿cuáles son las dimensiones del pastizal?



29. **Manufactura.** Supóngase que el costo por producir x mercancías está dado por $C(x) = 1\,000 - x^3$ y que el ingreso obtenido por la venta de x mercancías es $R(x) = 200x - 125$. Encontrar el número de mercancías que sirve como punto de equilibrio.

Para repaso

30. Utilizar la división sintética y el teorema del residuo para encontrar $P(-3)$ donde $P(x) = 4x^4 - x^2 + 3x + 8$.
31. Con base en la división sintética y el teorema del factor determinar si $x - 5$ es un factor de $P(x) = x^5 - 5x^4 + x^2 - 6x + 5$.
32. ¿Cuál es el número más grande de soluciones distintas que puede tener la ecuación $x^6 + 3x^4 - x^2 + 5x - 7 = 0$? ¿El más pequeño? ¿Exactamente cuántas soluciones tiene, contando multiplicidades?
33. Si $5 - 2i$ es un cero de un polinomio $P(x)$ con coeficientes reales, dar otro cero de $P(x)$.
34. Si $1 + \sqrt{7}$ es un cero de un polinomio $P(x)$ con coeficientes racionales, dar otro cero de $P(x)$.
35. Determinar un polinomio $P(x)$, con coeficientes racionales, de mínimo grado tal que 2 sea una raíz doble, $1 + i$ sea una raíz simple y $1 + \sqrt{2}$ sea una raíz simple de $P(x) = 0$.

4.4. GRAFICACIÓN DE FUNCIONES POLINÓMICAS

Naturaleza de las gráficas

Una función de la forma

$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

con números reales como coeficientes, se denomina **función polinómica (con coeficientes reales)**. Las funciones lineales de la forma $f(x) = a_1 x + a_0$ y las funciones cuadráticas de la forma $g(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ son casos especiales de funciones polinómicas, cuyas gráficas son líneas rectas y parábolas, respectivamente. En cursos más avanzados de matemáticas se muestra que la gráfica de una función polinómica $y = P(x)$ es una curva "lisa" (sin picos) y "continua" (sin roturas u hoyos).

Las gráficas expuestas en la figura 2 son características de polinomios. Las gráficas de la figura 3 no pueden ser gráficas de polinomios.

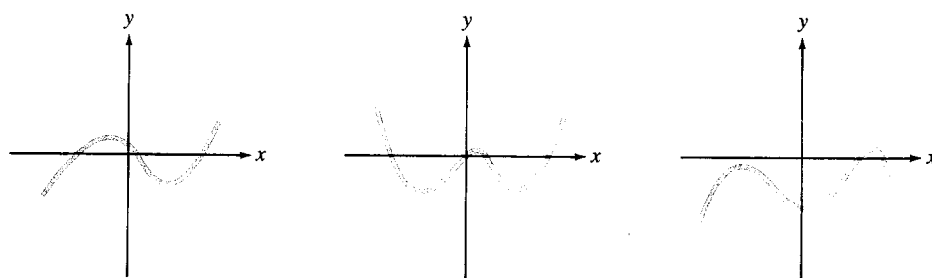


Figura 2. Gráficas polinómicas.

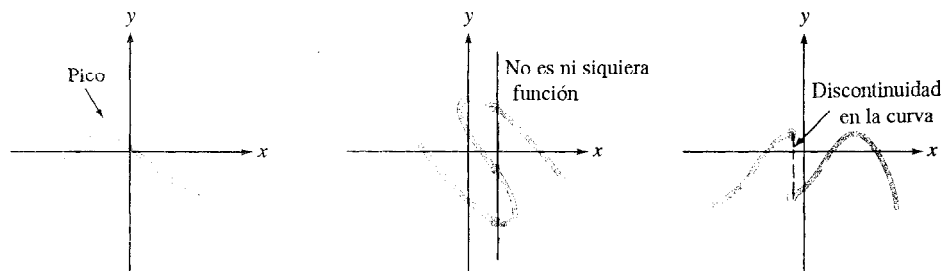


Figura 3. Gráficas no polinómicas.

Cuando se grafican polinomios, es útil conocer el comportamiento de la gráfica para valores grandes de $|x|$. Considérese el polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0).$$

Cuando $|x|$ es muy grande, el primer término del polinomio, $a_n x^n$, es más grande en valor absoluto que la suma de los términos restantes. Como resultado, el signo del primer término determina la naturaleza de la gráfica cuando $|x|$ es extremadamente grande. La gráfica de un polinomio finalmente "despegará" y crecerá o decrecerá, dependiendo del signo del coeficiente principal, a_n , y de si n es par o impar. La figura 4 resume las posibilidades; la flecha indica la naturaleza final de la gráfica.

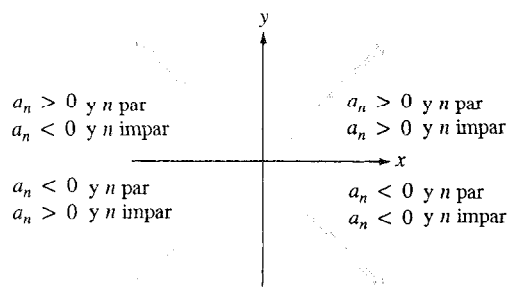


Figura 4. Naturaleza de $P(x)$ para x grande.

EJEMPLO 1

Analizar la naturaleza final de la gráfica para $|x|$ grande.

a) $P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$

Ya que $n = 3$ (n es impar) y $a_3 = 1 > 0$, la gráfica de $P(x)$ al final subirá hacia la derecha y bajará hacia la izquierda, como muestra la figura 5 a).

b) $P(x) = -2x^3 + x^2 - 5$.

Ya que $n = 3$ (n es impar) y $a_3 = -2 < 0$, la gráfica de $P(x)$ al final bajará hacia la derecha y subirá hacia la izquierda, como muestra la figura 5 b).

c) $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 7$.

Ya que $n = 4$ (n es par) y $a_4 = 2 > 0$, la gráfica de $P(x)$ al final subirá hacia la derecha y también hacia la izquierda, como muestra la figura 5 c).

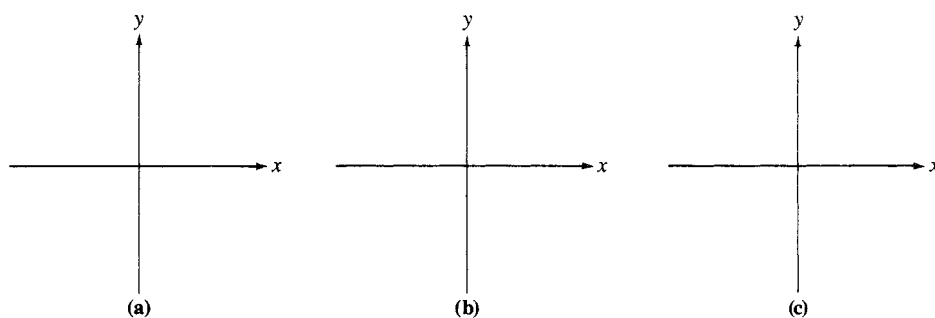


Figura 5

Puntos de inflexión

Ahora ya que se sabe cómo determinar la naturaleza final de la gráfica de un polinomio, tanto hacia la izquierda como hacia la derecha; póngase atención a la porción "media" de la gráfica y recuérdese que la gráfica debe ser una curva lisa. Los puntos sobre la gráfica en los que la curva "cambia" suavemente de arriba hacia abajo, o viceversa, se denominan **puntos de cambio** de la gráfica. El siguiente teorema, la demostración del cual se da en cálculo, enuncia un hecho importante acerca de los puntos de inflexión.

Número de puntos de cambio

Sea $P(x)$ un polinomio de grado n . La gráfica de $y = P(x)$ puede tener a lo más $n - 1$ puntos de cambio.

Así, por ejemplo, un polinomio de tercer grado puede tener a lo más dos puntos de cambio, aunque puede no tener ninguno en absoluto. La figura 6 muestra los bosquejos de dos polinomios representativos de tercer grado.

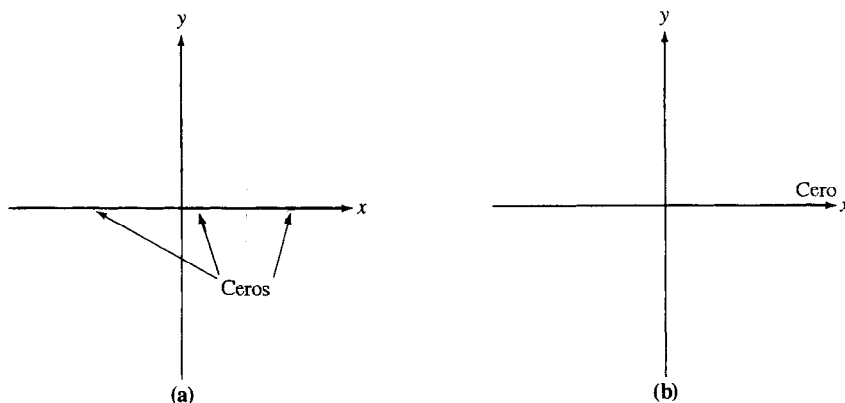


Figura 6. Polinomios de tercer grado.

Los ceros de un polinomio corresponden a las intersecciones con el eje x de la gráfica del polinomio. Así, un polinomio de grado n puede cruzar el eje x a lo más en n puntos. El polinomio de tercer grado en la figura 6 a) tiene tres ceros reales distintos (tres intersecciones con el eje x), mientras que el de la figura 6 b) tiene sólo un cero real.

Al graficar polinomios es útil emplear información referente a puntos de cambio, ceros, apariencia final para valores grandes de $|x|$, y el hecho de que todas las gráficas de polinomios son curvas "lisas" y "continuas". Otra información adicional incluye a la intersección con el eje y y a las posibles simetrías con respecto al eje y o al origen.

EJEMPLO 2

Graficar $y = P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Ya que el grado de $P(x)$ es 3, la gráfica tiene a lo más dos puntos de cambio. Además, ya que 3 es impar y $a_3 = 1 > 0$, al final la curva debe subir hacia la derecha y bajar hacia la izquierda. Un punto fácil de determinar es la intersección con el eje y , donde $x = 0$. Puesto que $P(0) = -2$, $(0, -2)$ es un punto en la gráfica. Otros puntos de interés son los ceros de $P(x)$. Ya que $P(x)$ tiene una variación de signos, habrá 1 cero real positivo. Asimismo, ya que $P(-x)$ tiene dos variaciones de signo, habrá 2 ceros negativos o no habrá cero negativo alguno. Busquemos ahora los ceros racionales. Las posibilidades aparecen en la lista de abajo.

$$p: \pm 1, \pm 2 \quad q: \pm 1 \quad \frac{p}{q}: \pm 1, \pm 2$$

$$\begin{array}{r} 1 \overline{) 1 + 2 - 1 - 2} \\ \underline{1 + 3 + 2} \\ 1 + 3 + 2 + 0 \end{array}$$

Así, $P(x) = (x - 1)(x^2 + 3x + 2) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$ y sus ceros son 1, -1 y -2 . Toda esta información es útil para dibujar la gráfica de la figura 7.

EJEMPLO 3

Graficar $y = P(x) = x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 14x - 8$.

Ya que el grado de $P(x)$ es 4, la gráfica tiene a lo más tres puntos de cambio. Además, ya que 4 es par y $a_4 = 1 > 0$, al final la curva debe subir hacia la derecha y también hacia la izquierda. La intersección con el

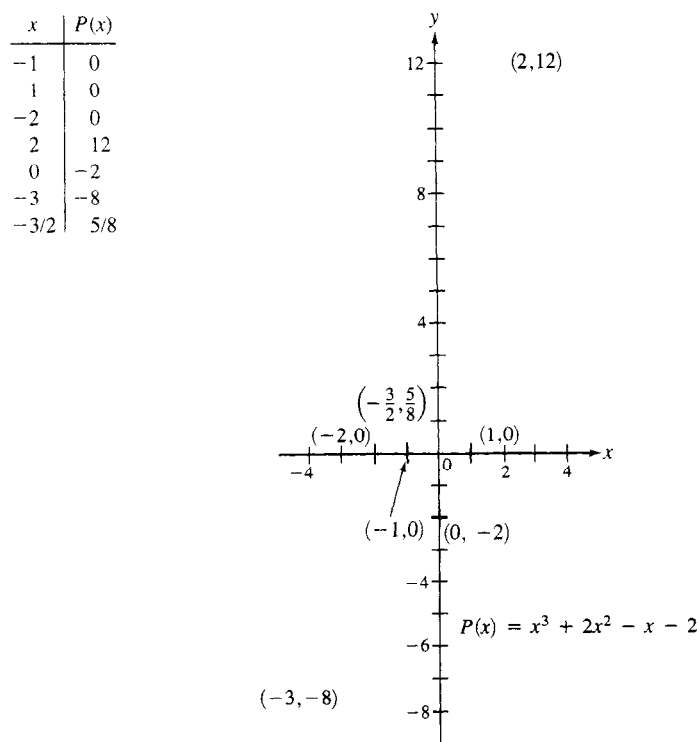


Figura 7

eje y es $(0, -8)$. Puesto que hay tres variaciones de signo, $P(x)$ debe tener 1 o 3 ceros positivos, y ya que hay una variación de signo en $P(-x)$, debe haber 1 cero negativo. Utilizando el teorema de la raíz racional, es fácil demostrar que 1 es un cero de multiplicidad dos y que -2 y 4 son los otros dos ceros. Así, $P(x) = (x - 1)^2(x + 2)(x - 4)$. Haciendo uso de esta información y trazando varios puntos adicionales puede dibujarse la gráfica de la figura 8. ■

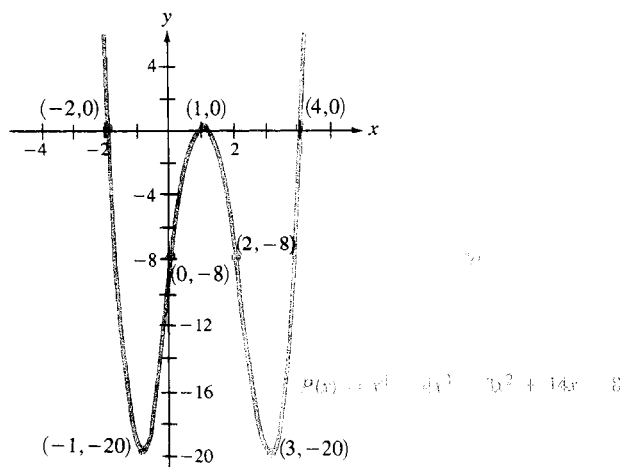


Figura 8

NOTA. La gráfica del polinomio en el ejemplo 3 cruzó el eje x en los dos ceros de multiplicidad 1 [en $(-2, 0)$ y $(4, 0)$] y fue tangente al eje de las x en el cero de multiplicidad 2 [en $(1, 0)$]. Esto es cierto en general; es decir, la gráfica de un polinomio cruzará el eje x en un cero de multiplicidad impar, y será tangente al eje de las x en un cero de multiplicidad par. Esta información puede ser de utilidad al dibujar una gráfica. Obsérvese que, aunque se sabe la posición aproximada de un punto de cambio, no hay manera de determinarlo con precisión aplicando los métodos de este curso.

EJEMPLO 4

Grafíquese $y = P(x) = x^4 - 4$.

La gráfica tendrá a lo más tres puntos de cambio y cuatro intersecciones con el eje x ya que el grado de $P(x)$ es 4. Además, ya que 4 es par y $a_4 = 1 > 0$, la curva debe subir hacia la derecha y subir también hacia la izquierda. Ya que tanto $P(x)$ como $P(-x)$ tienen una variación de signos, habrá 1 cero positivo y 1 cero negativo. Sin embargo, una búsqueda de ceros racionales no da resultado por lo que es más conveniente construir una tabla de valores. Obsérvese que al ser $P(-x) = P(x)$, la gráfica, mostrada en la figura 9, es simétrica con respecto al eje y . ■

Teorema del valor intermedio

Se sabía que el polinomio $P(x) = x^4 - 4$, considerado en el ejemplo 4, tenía 1 cero positivo y 1 cero negativo. Ya que el teorema de la raíz racional falló en cuanto a identificar los ceros racionales, se concluyó que los dos ceros eran irracionales. En realidad, respecto a la gráfica de la figura 9, se sabe aún más: el cero positivo debe ser un número entre 1 y 2 mientras que el cero negativo está entre -2 y -1 . Esto es así ya que en 2, $P(2) = 12 > 0$ y en 1, $P(1) = -3 < 0$ de modo que en algún valor r entre 1 y 2, $P(r) = 0$. Este es un caso especial de un teorema que se demuestra en cálculo.

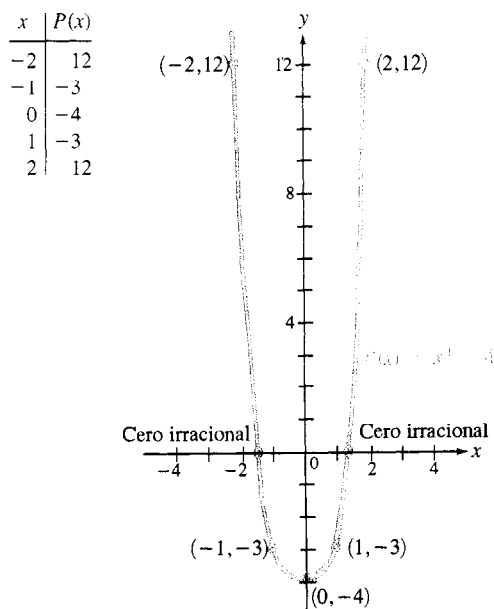


Figura 9

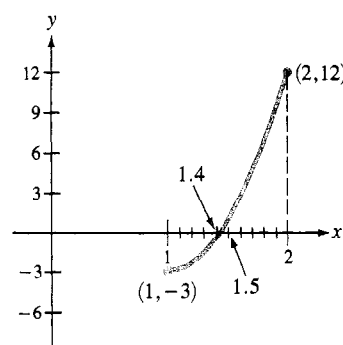


Figura 10

Teorema del valor intermedio

Si $P(x)$ es un polinomio, a y b son números reales con $a < b$, y $P(a) \neq P(b)$, entonces $P(x)$ asume cada valor entre $P(a)$ y $P(b)$ en el intervalo $[a, b]$.

En particular, para $P(x) = x^4 - 4$, ya que $P(1) = -3$ y $P(2) = 12$, hay al menos un número real r en $[1, 2]$ tal que $P(r) = 0$. Aunque el teorema del valor intermedio garantiza la existencia de un cero para $P(x)$ entre 1 y 2, no indica cómo encontrarlo. Ya que el cero es irracional, con frecuencia lo mejor es aproximarlos con números racionales utilizando una técnica de aproximación numérica. Uno de los métodos más sencillos, que puede programarse con facilidad en una computadora, involucra la determinación de valores polinómicos sucesivos entre un valor positivo conocido y un valor negativo conocido. Por ejemplo, la figura 10 muestra la porción ampliada de la gráfica precedente entre 1 y 2. Se procede a dividir el segmento de 1 a 2 en 10 partes iguales, con puntos de división en

$$1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2.$$

El cero irracional que se desea aproximar debe localizarse entre dos de estos valores. Utilizando la división sintética o sustitución, calculamos el valor del polinomio en los números de la lista de arriba hasta que el valor sea menor que cero en un valor y mayor que cero en el siguiente. Por ejemplo, se encuentra que

$$P(1.4) \approx -0.1584 \quad \text{y} \quad P(1.5) \approx 1.0625.$$

Así, el cero descado está entre 1.4 y 1.5. Para mayor precisión, el proceso puede repetirse. La división del segmento de 1.4 a 1.5 en 10 partes iguales da los valores

$$1.40, 1.41, 1.42, 1.43, 1.44, 1.45, 1.46, 1.47, 1.48, 1.49, 1.50.$$

Una vez más, por división sintética o sustitución directa, se descubriría que

$$P(1.41) \approx -0.0475 \quad \text{y} \quad P(1.42) \approx 0.0659.$$

Así, el cero deseado está entre 1.41 y 1.42. Este procedimiento puede repetirse hasta obtener el grado deseado de precisión en la aproximación.

En este ejemplo particular podrían haberse encontrado los ceros en forma más directa por factorización, ya que $P(x) = x^4 - 4 = (x^2 - 2)(x^2 + 2)$. Los ceros de $P(x)$ se encuentran al igualar cada factor a cero.

$$\begin{aligned} x^2 - 2 &= 0 & \text{o} & & x^2 + 2 &= 0 \\ x^2 &= 2 & & & x^2 &= -2 \\ x &= \pm\sqrt{2} & & & x &= \pm\sqrt{2}i \end{aligned}$$

Se tienen dos ceros imaginarios y dos ceros reales. El cero que se estuvo aproximando es $\sqrt{2} \approx 1.4142135$.

4.4. Ejercicios

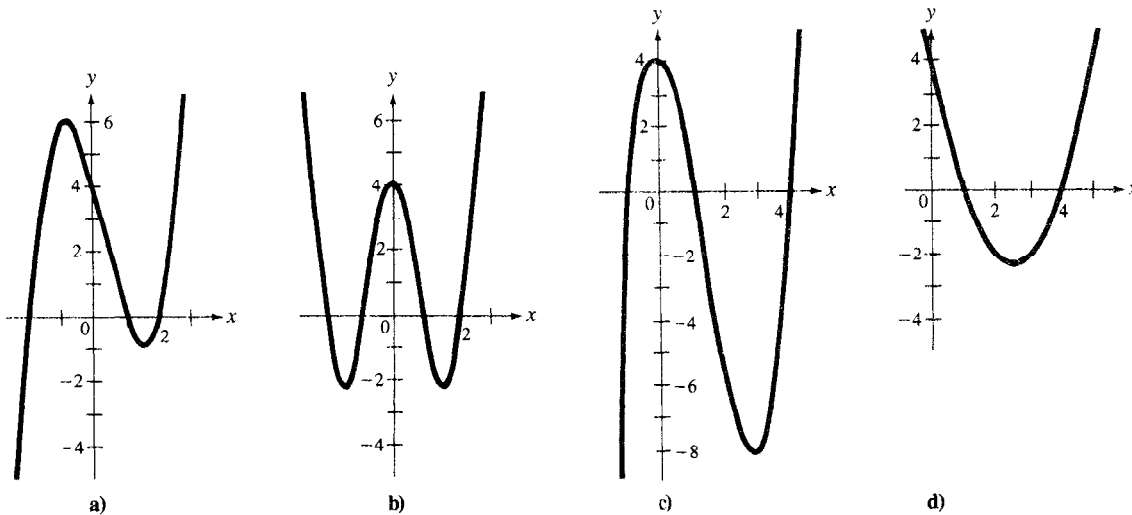
En los ejercicios 1-4 correlacionar cada polinomio con una de las gráficas a), b), c) o d).

1. $P(x) = x^2 - 5x + 4$

2. $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

3. $P(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$

4. $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$



Para cada una de las funciones polinómicas en los ejercicios 5-12 determinar a) el número máximo de ceros reales (el número máximo de intersecciones con el eje x), b) el número máximo de puntos de cambio, c) la intersección con el eje y , d) la dirección de la gráfica para valores positivos grandes de x y e) la dirección de la gráfica para valores negativos pequeños de x .

5. $P(x) = x^3 + 3x^2 - x + 7$

6. $P(x) = 2x^5 + x^3 - 3x^2 + x - 2$

7. $P(x) = -2x^3 + x^2 - 5x + 12$

8. $P(x) = -5x^5 + 4x^4 - 3x^2 + 2x + 3$

9. $P(x) = 5x^4 + x^3 - 3x - 1$

10. $P(x) = -4x^6 + 2x^5 - x^3 + 3x - 6$

11. $P(x) = -3x^6 + 4x^4 + 2x^2 - x - 5$

12. $P(x) = 7x^8 + 2x^6 - 3x^4 + 4x^2 + 1$

En los ejercicios 13-20 bosquejar la gráfica de cada función polinómica utilizando las diferentes técnicas expuestas en esta sección.

13. $y = P(x) = -x^3 + 4x$

14. $y = P(x) = x^3 - 9x$

15. $y = P(x) = x^3 - 2x$

16. $y = P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

17. $y = P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

18. $y = P(x) = -x^3 + 2x^2 - 2x + 4$

19. $y = P(x) = x^4 - 4x^2$

20. $y = P(x) = -x^4 + 9x^2$

En los ejercicios 21-24 demostrar que $P(x)$ tiene un cero entre los valores dados a y b .

21. $P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 10$; $a = 1$, $b = 2$

22. $P(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 8$; $a = -2$, $b = -1$

23. $P(x) = x^4 - 9x^2 + 8$; $a = -3$, $b = -2$

24. $P(x) = x^5 - 8x^3 + x^2 - 8$; $a = 2$, $b = 3$

En los ejercicios 25-28 el polinomio dado tiene un cero irracional entre a y b . Aproximar este cero hasta centésimas.

25. $P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 6$; $a = 1$, $b = 2$

26. $P(x) = x^3 + 4x^2 - 5x - 20$; $a = -3$, $b = -2$

27. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 10$; $a = 2$, $b = 3$

28. $P(x) = x^3 + 4x^2 - 10x - 40$; $a = 3$, $b = 4$

29. Dibujar la gráfica de $P(x) = x^3$. Con base en esta gráfica trazar cada una de las siguientes gráficas e interpretar los resultados.

a) $P(x) = x^3 + 2$

b) $P(x) = x^3 - 3$

c) $P(x) = (x + 1)^3$

d) $P(x) = (x - 3)^3$

30. Dibújese la gráfica de $P(x) = x^4$. Con base en esta gráfica trazar cada una de las siguientes gráficas e interpretar los resultados.

a) $P(x) = x^4 + 2$

b) $P(x) = x^4 - 3$

c) $P(x) = (x + 1)^4$

d) $P(x) = (x - 3)^4$

31. Hallar el valor de m tal que la gráfica de $y = x^4 - x^2 + x + m$ pase a través del punto $(2, -1)$.

32. Encontrar el valor de m tal que la gráfica de $y = x^5 + 4x^4 - x^2 + x + m$ tenga como ordenada al origen $(0, 5)$.

Encontrar todas las soluciones de cada ecuación polinómica en los ejercicios 33-34.

33. $x^3 - 5x^2 + x - 5 = 0$

34. $2x^4 - 5x^3 - 13x^2 + 25x + 15 = 0$

35. Utilizar la división sintética para encontrar el cociente y el residuo cuando $y^5 - 3y^4 + y^3 - 7y^2 + y - 2$ se divide entre $y + 1$.

36. Emplear una calculadora, división sintética y el teorema del residuo para encontrar $P(4.1)$ si

$$P(x) = 1.2x^3 - 3.7x^2 - 5.35x + 1.4268.$$

37. Las soluciones de $x^3 + 8 = 0$ se denominan raíces cúbicas de -8 . ¿Cuántas raíces cúbicas de -8 hay? Determinélas.

¿Cuál es el dominio de cada función en los ejercicios 38-39? Este tipo de función se considera en la siguiente sección.

38. $f(x) = \frac{x^2 - 5x - 6}{x + 3}$

39. $g(x) = \frac{3x + 1}{x^2 + 5}$

Una función de la forma

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(x)$ no es el polinomio nulo, se denomina **función racional**. Por ejemplo,

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}, \quad a(x) = \frac{x - 7}{x^2 + x + 3}, \quad b(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 + x - 7}{3}$$

son funciones racionales. Cada función polinómica es también una función racional ya que

$$P(x) = \frac{P(x)}{1} = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ donde } Q(x) = 1.$$

En esta sección sólo se analizan las funciones racionales cuyos denominadores no son constantes (de otro modo, podrían reducirse a funciones polinómicas). A diferencia de las funciones polinómicas que están definidas para cada número real x , las funciones racionales no están definidas para cualquier valor de x que anule al denominador. Por ejemplo,

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$$

no está definida cuando $x = 2$, ya que

$$f(2) = \frac{(2)^2 + 2(2) - 3}{(2) - 2} = \frac{5}{0},$$

la cual no está definida. Sin embargo, $f(x)$ es un número si x es cualquier otro número diferente de 2; por consiguiente, el dominio de $f(x)$ consta de todos los números reales excepto 2.

Asíntotas

Si una curva se acerca cada vez más a una recta cuando los valores x se aproximan cada vez más a un número determinado o se hacen más y más grandes positiva o negativamente, la recta se denomina **asíntota** de la curva. Muchas funciones racionales tienen asíntotas. La figura 11 muestra dos ejemplos.

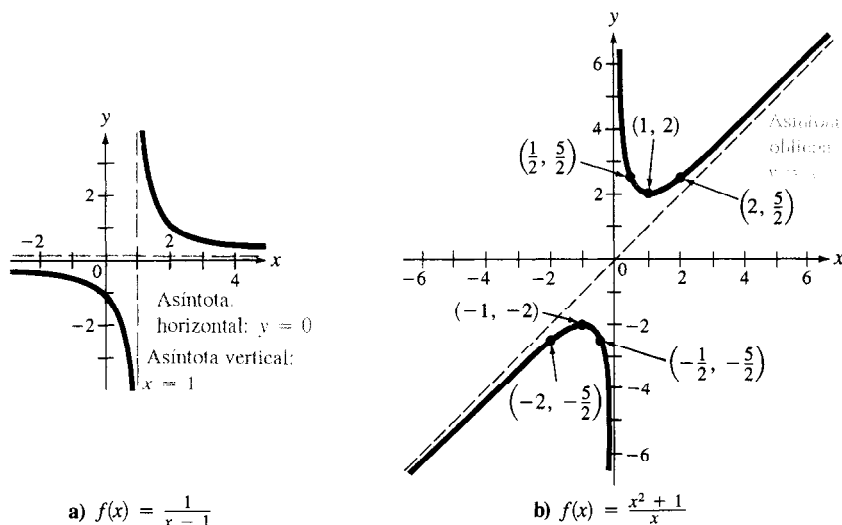


Figura 11. Asíntotas.

Hay tres tipos de asíntotas: **asíntotas verticales**, las cuales son iguales o paralelas al eje y (como $x = 1$ en la figura 11 a); **asíntotas horizontales**, las cuales son iguales o paralelas al eje x (como $y = 0$ en la figura 11 a); y **asíntotas oblicuas**, las cuales son rectas no paralelas a alguno de los dos ejes de coordenadas (como $y = x$ en la figura 11 b).

Para encontrar las asíntotas verticales de una función racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes, se hace $Q(x) = 0$ y se resuelve. Si r es un cero real de $Q(x)$, entonces la recta $x = r$ es una asíntota vertical.

EJEMPLO 1

Determinar las asíntotas verticales de cada función.

a) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$

El denominador $x - 2$ se hace igual a cero, y al resolver se obtiene $x = 2$ como asíntota vertical.

b) $g(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 4}$

Resolviendo $x^2 - 4 = 0$ por factorización, se obtienen $x = 2$ y $x = -2$ como las asíntotas verticales.

c) $h(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$

Ya que $x^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones reales, no hay asíntotas verticales. ■

Las asíntotas horizontales y oblicuas, que describen lo que le sucede a la gráfica cuando $|x|$ se hace grande, pueden descubrirse al considerar los grados de los polinomios en el numerador y denominador. Supóngase que el grado del polinomio en el numerador de una función racional es menor que el grado del polinomio en el denominador, como en la siguiente función, $k(x)$.

$$k(x) = \frac{3x + 5}{x^2 - 2x + 7}$$

Entonces se multiplica tanto al numerador como al denominador por $1/x^2$ o, lo equivalente, cada término se divide entre x^2 .

$$k(x) = \frac{\frac{3x}{x^2} + \frac{5}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{7}{x^2}} = \frac{\frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}}$$

Conforme x se vuelve más grande, $3/x$ se vuelve más pequeño (por ejemplo, si $x = 10$, $3/x = 3/10 = 0.3$; si $x = 100$, $3/x = 3/100 = 0.03$; si $x = 1\,000$, $3/x = 3/1\,000 = 0.003$). De la misma manera, cuando x se hace grande, $5/x^2$, $2/x$ y $7/x^2$ se aproximan a cero. Así, la fracción se aproxima a

$$\frac{0 + 0}{1 - 0 + 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

Lo mismo es cierto cuando x se hace más y más grande en la dirección negativa. Así, conforme $|x|$ aumenta, $k(x)$ se aproxima a 0 de modo que el eje x , $y = 0$, es una asíntota horizontal.

Si el grado del numerador es igual al grado del denominador, la función racional también tiene una asíntota horizontal, pero esta vez es una recta paralela al eje x . Por ejemplo, considérese

$$s(x) = \frac{2x^2 - x + 3}{5x^2 + 1}.$$

De nuevo, se multiplica tanto al numerador como al denominador por $1/x^2$.

$$s(x) = \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{5 + \frac{1}{x^2}}$$

Conforme $|x|$ aumenta, $1/x$, $3/x^2$ y $1/x^2$ se aproximan a cero y la fracción se aproxima a

$$\frac{2 - 0 + 0}{5 + 0} = \frac{2}{5}.$$

Así, conforme $|x|$ aumenta, $k(x)$ se aproxima a $2/5$, lo cual significa que $y = 2/5$ es una asíntota horizontal.

Asíntota horizontal de una función racional

Sea $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$. ($a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$) una función racional en la que $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes.

1. Si $n < m$, entonces el eje x , $y = 0$, es una asíntota horizontal de la gráfica de $f(x)$.
2. Si $n = m$, entonces la recta $y = a_n/b_m$ es una asíntota horizontal.
3. Si $n > m$, no hay asíntota horizontal.

EJEMPLO 2

Determinar las asíntotas horizontales de cada función.

a) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$

Ya que $P(x) = x^2 + 2x - 3$ tiene grado $n = 2$ y $Q(x) = x - 2$ tiene grado $m = 1$, $n > m$ de modo que no hay asíntota horizontal alguna.

b) $g(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 4}$

Ya que $P(x) = x + 1$ tiene grado $n = 1$ y $Q(x) = x^2 - 4$ tiene grado $m = 2$, $n < m$ de modo que el eje x , $y = 0$, es una asíntota horizontal.

c) $h(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$

Ya que $P(x)$ y $Q(x)$ son ambos de grado 2 ($n = m$), con $a_n = 2$ y $b_m = 1$, la recta $y = \frac{a_n}{b_m} = \frac{2}{1} = 2$ es una asíntota horizontal.

Por último, cuando el grado del numerador de una función racional excede al grado del denominador por uno, la gráfica tiene una asíntota oblicua.

EJEMPLO 3

En la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2},$$

el grado del numerador es 2, el cual es uno mayor que el grado del denominador. En tales casos, se divide $x^2 + 2x - 3$ entre $x - 2$, obteniéndose el cociente $x + 4$ y el residuo 5. Así,

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2} = x + 4 + \frac{5}{x - 2}.$$

Conforme $|x|$ se hace más y más grande, $5/(x - 2)$ se aproxima a cero de manera que $f(x)$ se aproxima a $x + 4$. En consecuencia, la recta $y = x + 4$ es una asíntota oblicua de la gráfica.

Asíntota oblicua de una función racional

Sea
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

una función racional tal que el grado de $P(x)$ sea n y el grado de $Q(x)$ sea m .

1. Si $n = m + 1$ ($m > 0$), y si el cociente de $P(x)$ y $Q(x)$ es $g(x)$ y el residuo no es cero, entonces la ecuación

$$y = g(x)$$

es una asíntota oblicua de la gráfica.

2. Si $n > m + 1$, no hay asíntotas oblicuas.

Ceros

Un **cero de una función racional** es un valor de x que anula al numerador, mientras que el denominador es diferente de cero. Por supuesto, los ceros son las intersecciones con el eje x de la gráfica.

Para graficar una función racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, se determinan las asíntotas, las intersecciones con el eje x , la intersección con el eje y (la cual se encuentra poniendo $x = 0$), y algunas simetrías, y debe considerarse si $f(x)$ es positiva o negativa en los intervalos con puntos extremos determinados por los ceros de $P(x)$ (los ceros de la función racional) y los ceros de $Q(x)$ (los valores que determinan las asíntotas verticales). Además, puede requerirse trazar varios puntos para obtener un bosquejo más o menos exacto. Los siguientes ejemplos ilustran esta técnica.

EJEMPLO 4

Graficar $y = f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}.$

Asíntotas verticales: $x = 2$

Asíntotas horizontales: ninguna

Asíntotas oblicuas: $y = x + 4$

Es posible factorizar el numerador.

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2} = \frac{(x + 3)(x - 1)}{x - 2} = 0$$

Por consiguiente, -3 y 1 son ceros de $f(x)$.

Intersecciones con el eje x : $(-3, 0)$ y $(1, 0)$

Sustitúyase x por 0 para encontrar la intersección con el eje y .

$$f(0) = \frac{(0)^2 + 2(0) - 3}{0 - 2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

Intersección con el eje y : $(0, 3/2)$

Simetrías: ninguna. (Las pruebas de simetría con respecto al eje y y al origen fallan.)

Los intervalos determinados por los ceros de $f(x)$, -3 y 1 , y la asíntota vertical, $x = 2$, son $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, \infty)$. Para resumir los resultados puede usarse una tabla.

Intervalo	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
Punto de prueba a	-4	0	$\frac{3}{2}$	3
Valor de $f(a)$	$f(-4) = -\frac{5}{6}$	$f(0) = \frac{3}{2}$	$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2}$	$f(3) = 12$
Signo de $f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
Localización de la gráfica de $f(x)$	abajo del eje x	arriba del eje x	abajo del eje x	arriba del eje x

La gráfica se muestra en la figura 12.

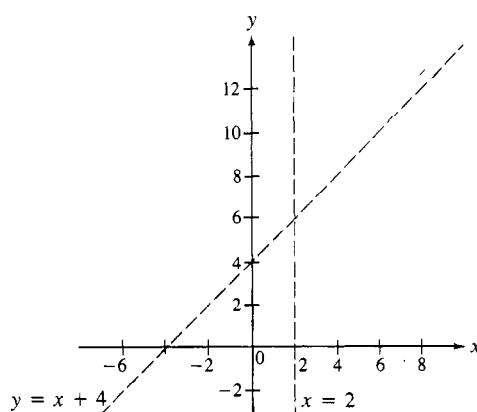


Figura 12

EJEMPLO 5

Graficar $y = h(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$.

Asíntotas verticales: ninguna

Asíntotas horizontales: $y = 2$

Asíntotas oblicuas: ninguna

Intersección con el eje x : $(0, 0)$

Intersección con el eje y : $(0, 0)$

Simetrías: eje y

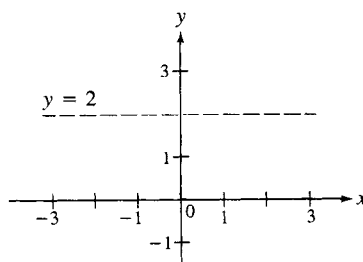


Figura 13

Esta vez sólo hay dos intervalos a considerar, $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. Ya que la gráfica es simétrica con respecto al eje y , el signo de $h(x)$ será el mismo en ambos intervalos. Utilizando el punto 1 de prueba en $(0, \infty)$, se tiene $h(1) = 1 > 0$, de modo que el signo de $h(x)$ es $+$ en $(0, \infty)$ y también en $(-\infty, 0)$. Así, la gráfica de $h(x)$, dada en la figura 13, está por arriba del eje x en ambos intervalos.

EJEMPLO 6

Graficar $y = F(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

Asíntotas verticales: $x = 1$ y $x = -1$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

Asíntotas oblicuas: ninguna

Intersección x : ninguna

Intersección y : $(0, -1)$

Simetrías: eje y

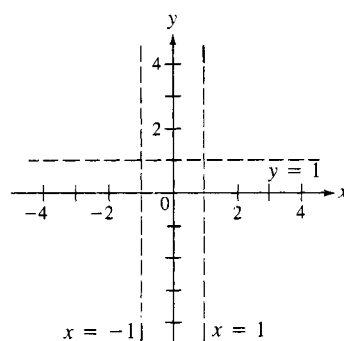


Figura 14

Sin intersecciones con el eje x , los intervalos, determinados por las asíntotas verticales $x = 1$ y $x = -1$, son

$$(-\infty, -1), (-1, 1) \text{ y } (1, \infty).$$

Utilizando la simetría con respecto al eje y , el signo de $F(x)$ en $(-\infty, -1)$ será el mismo que el signo en $(1, \infty)$.

Intervalo	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
Punto a de prueba	0	2
Valor de $F(a)$	$F(0) = -1$	$F(2) = \frac{5}{3}$
Signo de $F(x)$	$-$	$+$
Localización de la gráfica de $F(x)$	abajo del eje x	arriba del eje x

Así, la gráfica de $F(x)$ está por arriba del eje x en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$, y abajo del eje x en $(-1, 1)$. En la figura 14, se trazó primero la porción de la curva con línea continua, y la porción con línea punteada es el resultado de emplear la simetría con respecto al eje y .

Las gráficas de funciones racionales, al igual que las de funciones polinómicas son curvas lisas sin "puntas" agudas o esquinas. Este hecho se ilustró por medio de las gráficas en los ejemplos precedentes.

En esta sección concluiremos con la resolución del segundo de los dos problemas aplicados expuestos en la introducción de este capítulo.

EJEMPLO 7

Manufactura

El número de mercancías producidas en una fábrica durante un turno de ocho horas está dado por $n(t) = t^2 + 16t$ donde $(0 \leq t \leq 8)$. El costo total en dólares por producir $n(t)$ mercancías está dado por $c(t) = 120t + 960$. El costo promedio de producción es una función de t , dada por $a(t) = \frac{c(t)}{n(t)}$. Graficar $a(t)$, prestando especial atención a la porción para $0 < t \leq 8$ e interpretar los resultados.

Con el fin de determinar las asíntotas, escribese $a(t)$ en forma factorizada.

$$y = a(t) = \frac{120t + 960}{t(t + 16)}$$

Asíntotas verticales: $t = 0$ y $t = -16$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

Asíntotas oblicuas: ninguna

Intersección con el eje x : $(-8, 0)$

Intersección con el eje y : ninguna

Simetrías: ninguna

La gráfica, dada en la figura 15, muestra la porción de interés $(0 < t \leq 8)$ con línea continua.

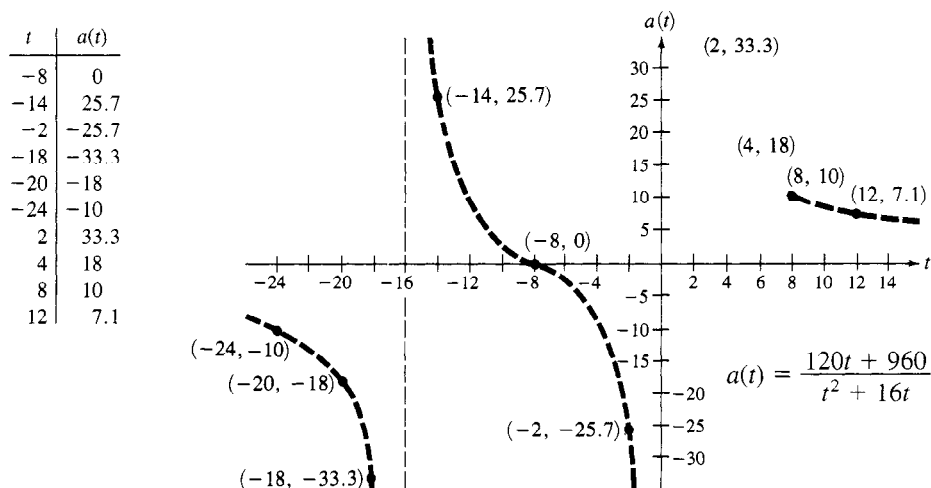


Figura 15

El costo promedio de producción decrece a un mínimo después de ocho horas ($t = 8$), y es igual a 10 dólares por mercancía en ese momento.

4.5. Ejercicios

En los ejercicios 1-10 déense a) las asíntotas verticales, b) las asíntotas horizontales, c) las asíntotas oblicuas, d) las intersecciones con el eje x , e) la intersección con el eje y y f) las simetrías de la gráfica de cada función racional.

$$1. f(x) = \frac{5}{x+2}$$

$$2. g(x) = \frac{-3}{x-4}$$

$$3. F(x) = \frac{4x}{x-5}$$

$$4. G(x) = \frac{-2x}{2x+1}$$

$$5. f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-2}$$

$$6. g(x) = \frac{2(3x-1)}{2x^2+9x-5}$$

$$7. F(x) = \frac{x^2+x-6}{x-5}$$

$$8. G(x) = \frac{x^2-16}{x+1}$$

$$9. f(x) = \frac{5x^4}{x^4+1}$$

$$10. F(x) = \frac{2x^3}{x^3-1}$$

En los ejercicios 11-22 gráfiquese cada función racional haciendo uso de la información referente a asíntotas, coordenadas al origen, simetrías e intervalos donde la función está arriba o abajo del eje x .

$$11. f(x) = \frac{2}{x-2}$$

$$12. F(x) = \frac{4}{4-x}$$

$$13. g(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$14. G(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$15. F(x) = \frac{1}{x^2-4}$$

$$16. f(x) = \frac{-1}{x^2-9}$$

$$17. G(x) = \frac{x}{x^2-4}$$

$$18. g(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

$$19. f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2-1}$$

$$20. F(x) = \frac{x^2+4}{4-x^2}$$

$$21. g(x) = \frac{5}{x^2+5}$$

$$22. f(x) = \frac{x^2+x-6}{x+2}$$

23. **Manufactura.** Durante un turno de 12 horas, el número de bienes producidos en una fábrica está dado por $n(t) = t^2 + 24t$ ($0 \leq t \leq 12$). El costo total en dólares por producir $n(t)$ bienes está dado por $c(t) = 144t + 1\,728$. Gráfiquese la función racional que expresa el costo promedio de producción para $0 < t \leq 12$ e interprétense los resultados.

24. **Ciencia.** La potencia p en watts consumida por un circuito eléctrico está dada por $p = \frac{10r}{(1+r)^2}$ donde $r \geq 0$ es la resistencia en ohms. Dibujar la gráfica de esta función y estímese la resistencia que produce una potencia máxima.

25. Dar una función racional cuya gráfica tenga una asíntota vertical en $x = 1$, una asíntota horizontal en $y = 0$ y una intersección con el eje y $(0, -3)$.

26. Dar una función racional cuya gráfica tenga una asíntota vertical en $x = 2$, una asíntota horizontal en $y = -1$ y una intersección con el eje x $(3, 0)$.

27. ¿Puede la gráfica de una función racional cruzar alguna vez una asíntota horizontal?

28. ¿Puede la gráfica de una función racional cruzar alguna vez una asíntota vertical?

29. Graficar la función polinomial $y = P(x) = 2x^2 - x^4$.

30. Graficar la función polinomial $y = P(x) = x^3 - x^2 - 16x - 20$.

31. Utilícese la regla de los signos de Descartes para encontrar el número posible de soluciones negativas, positivas y no reales de la ecuación $x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$.

32. Utilícese la prueba de las cotas superior e inferior para encontrar la cota superior que sea el entero positivo más pequeño y la cota inferior que sea el entero más grande para las soluciones reales de la ecuación $8x^3 + 2x^2 - 15x = 0$.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 4

- Para el polinomio $P(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7x - 8$.
 - ¿Cuál es el grado de $P(x)$?
 - ¿Cuál es el coeficiente principal?
 - ¿A qué es igual $P(1)$?
 - ¿A qué es igual $P(-1)$?
- Determinar si 2 , $3i$ y $-3i$ son ceros de $Q(x) = x^3 - 2x^2 + 9x - 18$.
- Emplear la división sintética para encontrar el cociente y el residuo cuando $x^4 - 3x^3 + x - 2$ se divide entre $x + 3$.
- Si un polinomio $P(x)$ se divide entre $x - 5$, ¿cuál será el valor del residuo?
- ¿Cuál es el nombre del teorema utilizado para responder el ejercicio 4?
- Si $P(x)$ es un polinomio y $P(-3) = 0$, dar un factor de $P(x)$.
- ¿Cuál es el nombre del teorema utilizado para responder el ejercicio 6?
- Administración.** El ingreso en dólares obtenido por la venta de x libros está dado por $R(x) = 10.95x$. El costo en dólares por producir x libros está dado por $C(x) = 500 + 5.95x$. Los ceros de $P(x) = R(x) - C(x)$ se denominan puntos de equilibrio. Demostrar que 100 es un punto de equilibrio.
- Localizar un valor de m de modo que $x^4 - 2x^3 + mx - 60$ tenga un residuo 0 cuando se divide entre $x + 3$. ¿A qué es igual $P(-3)$?
- Si $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 8$, utilizar la división sintética y el teorema del residuo para encontrar lo siguiente.
 - $P(1)$
 - $P(-1)$
 - $P(2)$
- Si $P(x) = x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 10x + 8$, utilizar la división sintética y el teorema del factor para determinar si cada una de las siguientes expresiones es un factor de $P(x)$.
 - $x - 4$
 - $x + 1$
 - $x + 2$
- Si -4 es un cero de multiplicidad 3 de un polinomio $P(x)$, dar un factor cúbico de $P(x)$.
- Si $2 - 7i$ es un cero del polinomio $P(x)$, con coeficientes reales, dar otro cero de $P(x)$.
- Si $3 + \sqrt{11}$ es un cero de un polinomio $P(x)$, con coeficientes racionales, dar otro cero de $P(x)$.
- ¿Cuál es el número más grande de soluciones distintas que puede tener la ecuación $5x^7 + 3x^5 - 2x^4 + x^2 - 9 = 0$? ¿El más pequeño? ¿Exactamente cuántas soluciones tiene, contando multiplicidades?
- Determinar un polinomio $P(x)$, con coeficientes racionales, de mínimo grado tal que -2 sea una raíz doble, $1 + \sqrt{2}$ sea una raíz simple y $1 - i\sqrt{2}$ sea una raíz simple.

En los ejercicios 17-18 encontrar el número posible de soluciones negativas, positivas y no reales de cada ecuación usando la regla de los signos de Descartes. No se intente determinar las soluciones.

17. $2x^6 - 4x^5 - 2x^3 + 3x^2 + x - 7 = 0$

18. $3x^5 + 7x^3 + 10x + 1 = 0$

En los ejercicios 19-20 usar el criterio de las cotas superior e inferior para encontrar la cota superior que sea el mínimo entero positivo y la cota inferior que sea el máximo entero negativo para las soluciones reales de cada ecuación.

19. $8x^4 - 16x^3 - 2x^2 - 16x - 10 = 0$

20. $3x^6 + 13x^5 + 14x^4 + 6x^2 + 26x + 28 = 0$

21. Supóngase que $\frac{a}{b}$ es una solución racional de $4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 5 = 0$.

- ¿De cuál coeficiente es a un factor?
- ¿De cuál coeficiente es b un factor?

22. ¿Por qué las soluciones racionales posibles de $x^5 - 3x^3 + x^2 + x - 9 = 0$ deben ser enteros?

En los ejercicios 23-24 encontrar todas las soluciones racionales (si existen). De ser posible, encuentrense todas las soluciones.

23. $6x^3 - 11x^2 + 9x - 2 = 0$

24. $x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0$

25. Geometría. ¿Cuál es el radio de una esfera cuya área es igual al volumen?

Para cada una de las funciones polinómicas en los ejercicios 26-27 determinar a) el número máximo de ceros reales (el número máximo de intersecciones con el eje x , b) el número máximo de puntos de cambio, c) la intersección con el eje y , d) la dirección de la gráfica para valores positivos grandes de x , y e) la dirección de la gráfica para valores negativos pequeños de x .

26. $P(x) = x^3 - 7x^2 + x - 5$

27. $P(x) = -x^4 + 3x^2 - x + 8$

En los ejercicios 28-29 dibujar la gráfica de cada función polinómica haciendo uso de la información referente a las intersecciones con el eje x , la intersección con el eje y , los puntos de cambio y la dirección final de la gráfica.

28. $y = P(x) = -x^3 - x^2 + 2x$

29. $y = P(x) = 5x^4 - 5$

30. Puesto que el polinomio $P(x) = x^3 + 5x^2 - 11x - 55$ tiene un cero irracional entre 3 y 4, aproximar este cero hasta centésimas.

En los ejercicios 31-32 dar a) las asíntotas verticales, b) las asíntotas horizontales, c) las asíntotas oblicuas, d) las intersecciones con el eje x , e) la intersección con el eje y , y f) las simetrías de la gráfica de cada función racional.

31. $f(x) = \frac{10}{x - 9}$

32. $g(x) = \frac{6x^2}{9x^2 - 1}$

En los ejercicios 33-34 graficar cada función racional haciendo uso de la información referente a asíntotas, coordenadas al origen y simetrías.

33. $y = f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$

34. $y = f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$

35. Ciencia. La sección delantera de un proyectil tiene la forma de un cilindro circular recto con una semiesfera unida a un extremo. Si la longitud total de la sección delantera es de 40 in y el volumen total de la sección es de $5\,019 \text{ in}^3$, ¿cuál es el radio del cilindro (con aproximación hasta décimas de pulgada)? [Indicación: La longitud del radio está entre 6 y 7 pulgadas.]

Capítulo



Desde el punto de vista histórico los logaritmos se desarrollaron para ayudar a realizar cálculos complejos. Con el advenimiento de las computadoras y calculadoras de mano, los cálculos logarítmicos ya no son de gran interés. Sin embargo, las funciones y ecuaciones logarítmicas y exponenciales siguen siendo importantes y tienen numerosas aplicaciones en matemáticas, hoy en día. Los siguientes ejemplos ilustran dos tipos de problemas que pueden resolverse utilizando exponenciales y logaritmos.

Administración

Con la finalidad de comprar una casa nueva, una pareja de jóvenes pide un préstamo por 60 000 dólares a una tasa de interés anual del 12%. El monto se ha de reembolsar durante un periodo de 30 años mediante pagos mensuales iguales. ¿A cuánto asciende su pago mensual y cuál es el monto del interés total pagado sobre el préstamo durante el periodo?

Medicina

Por lo general, los especialistas en audición están de acuerdo en que la exposición continua a un nivel de sonido superior a 90 decibeles por más de cinco

horas diarias puede causar, a largo plazo problemas de audición. Si un estudiante escucha un estéreo portátil a través de audífonos que produce una intensidad de 2×10^{-3} watts/m² durante largos periodos diariamente, ¿hay un peligro potencial para su oído?

El primero de estos problemas puede resolverse utilizando una función exponencial (véase el ejemplo 2 en la sección 5.6) y el segundo requiere una función logarítmica (véase el ejemplo 8 en la sección 5.6). El estudio de estas funciones lo iniciaremos con una breve introducción a los logaritmos. Enseguida, se procederá a desarrollar las propiedades básicas de los logaritmos y a considerar los logaritmos comunes y naturales, así como su relación con las ecuaciones y concluiremos con una investigación sobre una diversidad de problemas aplicados. Para trabajar con logaritmos, ya que los cálculos y las respuestas a menudo incluyen decimales, la calculadora es una herramienta invaluable. Por lo general, todos los cálculos se efectuarán y almacenarán en una calculadora sin redondeo hasta la respuesta final. Aun con este convenio, puede haber ligeras variaciones como consecuencia de las diferencias en el proceso de redondeo entre varias calculadoras. De utilizarse una tabla en lugar de una calculadora, las respuestas pueden diferir un poco pero deben estar lo suficientemente cerca como para verificar la exactitud del trabajo.

En capítulos anteriores, los temas abordados hacían referencia a varios métodos para resolver ecuaciones que involucraban sumas, diferencias, productos, cocientes, potencias y raíces de expresiones algebraicas. En ninguna de estas ecuaciones la variable estaba presente en un exponente. Cuando una variable sí aparece en un exponente, como en la ecuación $2^x = 8$, las reglas para resolver ecuaciones hasta aquí consideradas son de poca o ninguna ayuda. En verdad, tendría que descubrirse la solución por inspección. En este caso, el problema no es demasiado difícil; probablemente se reconocería que cuando 2 se eleva a la tercera potencia, el resultado es 8. Así, la solución a la ecuación es

$$x = 3.$$

Como alternativa, podría darse la solución en palabras.

x es el exponente de 2 que da el número 8

La palabra *logaritmo* puede utilizarse en lugar de *exponente*, y la solución se escribe

x es el logaritmo de 8 que da el número 2.

Ya que 2 es la *base* en la expresión 2^x , la solución puede escribirse también en la forma

x es el logaritmo de 8 utilizando a 2 como la base

x es el logaritmo base 2 de 8.

Esta enunciación final por lo general se simboliza así:

$$x = \log_2 8.$$

Básicamente, se ha expuesto que

$$2^x = 8 \quad \text{y} \quad x = \log_2 8$$

son dos formas de la misma ecuación; a $2^x = 8$ se denomina **forma exponencial** y a $x = \log_2 8$ **forma logarítmica**. Es decir, son ecuaciones equivalentes, aunque la forma logarítmica tiene la cualidad deseable de que la variable x está "despejada". En este caso, una ecuación adicional equivalente es

$$x = 3.$$

Por ahora, sin embargo, no siempre es posible hacer esta simplificación adicional.

Definición de logaritmo

Sean a , x y y número reales, $a > 0$, $a \neq 1$, que satisfacen la ecuación exponencial

$$a^x = y.$$

Entonces x es el logaritmo base a de y , y la ecuación logarítmica equivalente es

$$x = \log_a y.$$

La restricción $a > 0$ es necesaria ya que si $a < 0$, entonces a^x no sería un número real para valores de x tales como $1/2$. Además, si $a = 1$, $a^x = 1$ para todos los valores de x .

EJEMPLO 1

Escribir cada ecuación en una forma equivalente.

- a) $9^x = d$ La forma logarítmica de esta ecuación es $x = \log_9 d$.
 b) $w = \log_3 7$ La forma exponencial de esta ecuación es $3^w = 7$.

Al convertir una ecuación de la forma exponencial a la logarítmica, o viceversa, recuérdese que en ambos casos la base se escribe abajo del nivel del logaritmo (exponente), como indica el siguiente diagrama.

$$a^x = y$$

$$x = \log_a y$$

Con frecuencia, las soluciones de las ecuaciones exponenciales simples pueden determinarse por inspección directa; las soluciones de las ecuaciones logarítmicas se encuentran mejor al convertirlas a la forma exponencial.

EJEMPLO 2

- a) Determinar el valor numérico de x en $x = \log_4 64$.
 Conviértase primero $x = \log_4 64$ a la forma exponencial.

$$4^x = 64$$

En este punto podría ser obvio que x debe ser 3 ya que $4^3 = 64$. Al escribir 64 como una potencia de 4, $64 = 4^3$, se tiene

$$4^x = 4^3.$$

En esta forma, es ahora evidente que x es 3 ya que las bases en ambos lados de la ecuación son 4, forzando a los exponentes en ambos lados a ser iguales.

- b) Determinar el valor numérico de x en $\log_x \frac{1}{8} = -3$.
 Conviértase a la forma exponencial.

$$x^{-3} = \frac{1}{8}$$

$$x^{-3} = 2^{-3}$$

Es obvio ahora que x es 2 ya que los exponentes en ambos lados de la ecuación son -3 , forzando a las bases en ambos lados a ser iguales.

Las propiedades de los exponenciales, utilizadas en los ejemplos 2 a) y 2 b), se presentan más adelante. Estas propiedades son intuitivamente obvias y se vuelven aún más manifiestas tras considerar las funciones exponenciales en la siguiente sección.

Propiedades de las formas exponenciales

Sean x y y números reales y a y b números reales pasivos con $a \neq 1$ y $b \neq 1$.

1. $a^x = a^y$ si y sólo si $x = y$.
2. $a^x = b^x$ si y sólo si $a = b$.

EJEMPLO 3

Resolver cada ecuación.

a) $3^{x-1} = 27$

Ya que $27 = 3^3$, $3^{x-1} = 3^3$. Por lo tanto,

$$x - 1 = 3$$

$$x = 4.$$

b) $(x - 1)^4 = 16$

Ya que $16 = 2^4$, $(x - 1)^4 = 2^4$. Por tanto,

$$x - 1 = 2$$

$$x = 3.$$

c) $\log_x 36 = 2$

Convertir a la forma exponencial.

$$x^2 = 36 = 6^2$$

$$x = 6$$

Obsérvese que $x \neq -6$ ya que la base de un logaritmo debe ser positiva.

d) $\log_3 x = 1$

e) $\log_3 1 = x$

$$3^x = 1$$

$$3^x = 3^0$$

$$x = 0$$

Las partes d) y e) del ejemplo 3 ilustran el siguiente teorema.

Propiedades de los logaritmos

Para cualquier base a ($a > 0$ y $a \neq 1$)

1. $\log_a a = 1$
2. $\log_a 1 = 0$.

La prueba de este teorema se muestra al cambiar a la forma exponencial ya que $\log_a a = 1$ es equivalente a $a^1 = a$ y $\log_a 1 = 0$ es equivalente a $a^0 = 1$.

Esta breve introducción a los exponenciales y los logaritmos ayudará a esclarecer el desarrollo formal de las funciones exponenciales y logarítmicas que se presentan en la siguiente sección.

5.1. Ejercicios

En los ejercicios 1-8, convertir cada una de las siguientes ecuaciones a la forma logarítmica.

- | | | | |
|-----------------|---------------|-----------------|------------------|
| 1. $2^3 = 8$ | 2. $u^5 = 25$ | 3. $5^v = 9$ | 4. $a^b = 7$ |
| 5. $a^{-3} = c$ | 6. $u^v = w$ | 7. $u^{-v} = w$ | 8. $w^{x+1} = z$ |

En los ejercicios 9-16, convertir cada una de las siguientes ecuaciones a la forma exponencial.

- | | | | |
|-------------------------------|--------------------------------|--------------------|---------------------|
| 9. $\log_3 9 = 2$ | 10. $\log_5 \frac{1}{25} = -2$ | 11. $\log_a b = 7$ | 12. $\log_a 64 = 3$ |
| 13. $\log_3 \frac{1}{27} = b$ | 14. $\log_b 8 = \frac{1}{3}$ | 15. $\log_a 6 = c$ | 16. $\log_a u = v$ |

Resolver cada ecuación en los ejercicios 17-36.

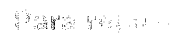
- | | | | |
|------------------------|-------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| 17. $3^y = 243$ | 18. $2^z = \frac{1}{8}$ | 19. $b^{-3} = \frac{1}{125}$ | 20. $c^3 = 216$ |
| 21. $25^x = 5$ | 22. $27^x = 3$ | 23. $a^{1/2} = 7$ | 24. $b^{1/3} = 6$ |
| 25. $c^{-1/2} = 6$ | 26. $x^{-1/3} = 2$ | 27. $\log_2 8 = y$ | 28. $\log_a 9 = 2$ |
| 29. $\log_3 x = 4$ | 30. $\log_7 x = -3$ | 31. $\log_a \frac{1}{27} = -3$ | 32. $\log_x 2 = \frac{1}{3}$ |
| 33. $\log_8 0.125 = w$ | 34. $\log_4 0.25 = x$ | 35. $2^{x^2} = 16$ | 36. $3^{x^2} = 81$ |

37. **Ingeniería.** Un ingeniero electricista utiliza la fórmula $D = 10 \log_{10} \frac{S}{S_0}$ para calcular la ganancia en un amplificador.

- ¿Cuál es el valor de D cuando S es 100 y S_0 es 10?
- ¿Cuál es el valor de D cuando S es 600 y S_0 es 6?

38. **Administración.** Un asesor financiero utiliza la fórmula $A = 100(1 + 0.05)^n$ para calcular el interés compuesto semestralmente.

- ¿Cuál es el valor de A cuando n es 2?
- ¿Cuál es el valor de A cuando n es 2.5?



39. Dada la función polinómica $P(x) = -3x^5 + x^3 + x^2 - 4x - 9$, determinar a) el número máximo de ceros reales (el número máximo de intersecciones con el eje x), b) el número máximo de puntos de inflexión, c) la intersección con el eje y , d) la dirección de la gráfica para valores positivos grandes de x y e) la dirección de la gráfica para valores negativos pequeños de x .

40. **Ecología.** El costo anual por remover un porcentaje x determinado de los contaminantes de una planta de energía

aumenta enormemente conforme el porcentaje se aproxima a 100%. La función racional $C(x) = \frac{1\,000x}{100-x}$ aproxima

el costo de esta operación para una planta particular en Arizona. Dibujar la gráfica de $C(x)$ para $0 \leq x < 100$, y encontrar el costo de remover 95% de los contaminantes.

Funciones exponenciales

Las funciones polinómicas tienen constantes utilizadas como exponentes y una variable como base. Esta sección considera las *funciones exponenciales* que tienen exponentes variables y una constante como base.

Función exponencial

Sea a un número real, $a > 0$ y $a \neq 1$. La función

$$f(x) = a^x$$

se denomina **función exponencial** con base a .

Evaluar una función exponencial cuando x es un entero n o un número racional $\frac{p}{q}$ no plantea problema alguno puesto que a^n y $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ ya se han definido. Aunque no se ha definido a^x para x irracional (tal como $\sqrt{2}$ o π), se supone que tales valores podrían aproximarse haciendo uso de métodos de aproximación con números racionales para x . Por ejemplo, ya que $\sqrt{2} \approx 1.414$, $a^{\sqrt{2}} \approx a^{1.414} = a^{1414/1000} = \sqrt[1000]{a^{1414}}$. Haciendo uso de aproximaciones cada vez más precisas de $\sqrt{2}$, podrían obtenerse aproximaciones cada vez más cercanas de $a^{\sqrt{2}}$. La noción de definir exponentes irracionales se trata más a fondo en cálculo, por ahora, supondremos que los exponentes irracionales sí tienen sentido y que todas las propiedades de los exponentes racionales, tales como las reglas para el producto, el cociente y las potencias, también se aplican a exponentes irracionales. Cuando se grafique una función exponencial tal como $f(x) = 2^x$, las suposiciones acerca de exponentes irracionales parecerán razonables.

EJEMPLO 1

Graficar la función $y = 2^x$.

Al seleccionar valores de x y al calcular los valores correspondientes de y , se obtiene una tabla de valores. Puede usarse 1.41 como una aproximación para $\sqrt{2}$. Con respecto a la gráfica de la figura 1, obsérvese que 2.7 es una aproximación para $2^{\sqrt{2}}$. En forma análoga, usando 3.14 como una aproximación para π , puede estimarse que 2^π es aproximadamente 8.8.

x	y
0	1
-1	1/2
1	2
-2	1/4
2	4
-3	1/8
3	8
-4	1/16

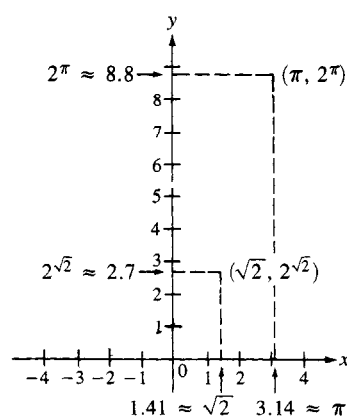


Figura 1

Con el objeto de comparar las funciones exponenciales, varias de ellas se graficarán en el mismo sistema de coordenadas. Esto ayudará a generalizar el comportamiento de estas funciones.

EJEMPLO 2

Graficar: $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 3^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = 10^x$, y $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$.

Construir primero una tabla de valores.

x	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4
$y = 2^x$	1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{4}$	4	$\frac{1}{8}$	8	$\frac{1}{16}$	16
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	1	2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{8}$	16	$\frac{1}{16}$
$y = 3^x$	1	$\frac{1}{3}$	3	$\frac{1}{9}$	9	$\frac{1}{27}$	27	$\frac{1}{81}$	81
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	1	3	$\frac{1}{3}$	9	$\frac{1}{9}$	27	$\frac{1}{27}$	81	$\frac{1}{81}$
$y = 10^x$	1	$\frac{1}{10}$	10	$\frac{1}{100}$	100	$\frac{1}{1\,000}$	1\,000	$\frac{1}{10\,000}$	10\,000
$y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$	1	10	$\frac{1}{10}$	100	$\frac{1}{100}$	1\,000	$\frac{1}{1\,000}$	10\,000	$\frac{1}{10\,000}$

La escala de las gráficas en la figura 2 no permite trazar todos los puntos que aparecen en la tabla, pero se incluyen los valores con el propósito de compararlos.

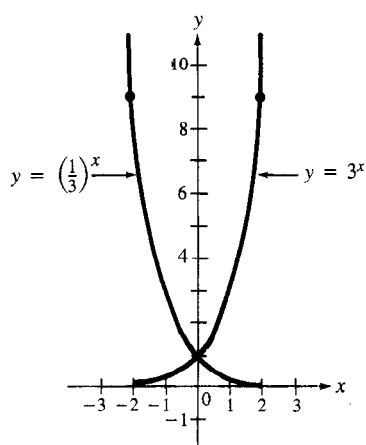


Figura 2. Funciones exponenciales.

Propiedades de las funciones exponenciales

Es posible hacer varias observaciones en vista del ejemplo 2.

1. Si $a > 1$, entonces $y = a^x$ aumenta al aumentar x y si $a < 1$, entonces $y = a^x$ disminuye al aumentar x . Es decir, $f(x) = a^x$ es una función creciente cuando $a > 1$, y una función decreciente cuando $a < 1$.
2. Las gráficas de $y = a^x$ y $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ son reflexiones una de la otra con respecto al eje y .
3. Las gráficas de $y = a^x$ y $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ pasan a través de $(0, 1)$ ya que $a^0 = 1$ para cualquier $a > 0$.
4. El dominio (los valores posibles de x) de cada función exponencial es el conjunto de todos los números reales.
5. La imagen (los valores posibles de y) de cada función exponencial es el conjunto de todos los números reales positivos.

Aproximación de exponenciales

Si una calculadora tiene la tecla y^x puede ser muy útil para el trabajo con funciones exponenciales, por ejemplo, supóngase que se desea aproximar $2^{\sqrt{5}}$. La secuencia de teclas a presionar en una calculadora es:

$$\text{ALG: } 2 \boxed{y^x} 5 \boxed{\sqrt{}} \boxed{=} \quad \text{RPN: } 2 \boxed{\text{ENTER}} 5 \boxed{\sqrt{}} \boxed{y^x}.$$

Si se sigue esta secuencia, la pantalla mostrará 4.7111, cifra exacta con cuatro lugares decimales. Ya que $\sqrt{5} \approx 2.2$, localizar este valor para x en la gráfica de $y = 2^x$ proporcionada en la figura 2 y observar que el valor de y es aproximadamente 4.7.

EJEMPLO 3

Utilizar una calculadora para aproximar cada número con una exactitud de cuatro lugares decimales

a) $(1.01)^{50}$

$$\text{ALG: } 1.01 \boxed{y^x} 50 \boxed{=} \quad \text{RPN: } 1.01 \boxed{\text{ENTER}} 50 \boxed{y^x}$$

Así, $(1.01)^{50} \approx 1.6446$.

b) $\pi^{\sqrt{11}}$

Así,

$$\text{ALG: } \boxed{\pi} \boxed{y^x} 11 \boxed{\sqrt{}} \boxed{=} \quad \text{RPN: } \boxed{\pi} \boxed{\text{ENTER}} 11 \boxed{\sqrt{}} \boxed{y^x}$$

$\pi^{\sqrt{11}} \approx 44.5512$.

Con frecuencia, en los problemas aplicados aparecen funciones exponenciales más complejas de la forma $f(x) = a^{p(x)}$, donde $p(x)$ es alguna función de x , y tienen gráficas interesantes como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4

Dibujar la gráfica de $f(x) = 2^{x^2}$.

Una tabla de valores es útil para graficar funciones de este tipo. Ya que $f(x) = f(-x)$, la gráfica es simétrica con respecto al eje y y se muestra en la figura 3.

x	$f(x)$
0	1
1	2
2	16
3	512

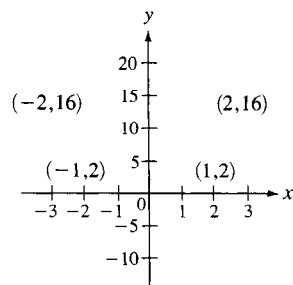


Figura 3

Funciones logarítmicas

Puesto que cada función exponencial $y = a^x$ ($a > 0$ y $a \neq 1$) es creciente o decreciente, debe tener una inversa. Para encontrar la ecuación de la inversa, intercambiar x y y y resolver el resultado para y . Comenzando con

$$y = a^x$$

intercambiar x y y , obteniéndose

$$x = a^y.$$

Para despejar en esta ecuación a y , conviértase a la forma logarítmica, $y = \log_a x$. Así, la inversa de la función exponencial $y = a^x$ es la **función logarítmica** definida por

Para graficar $y = \log_a x$, sólo es necesario graficar $x = a^y$. O, de manera alternativa, ya que las gráficas de las funciones inversas son simétricas con respecto a la recta $y = x$, podría graficarse $y = a^x$ y utilizarse para encontrar la gráfica de $y = \log_a x$.

EJEMPLO 5

Graficar $y = 2^x$ y $y = \log_2 x$ ($x = 2^y$) en el mismo sistema de coordenadas.

Las tablas de valores para estas funciones aparecen abajo y sus gráficas se ofrecen en la figura 4.

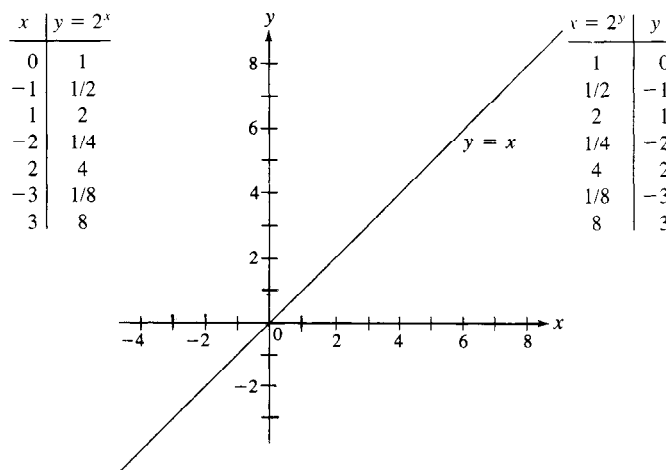


Figura 4

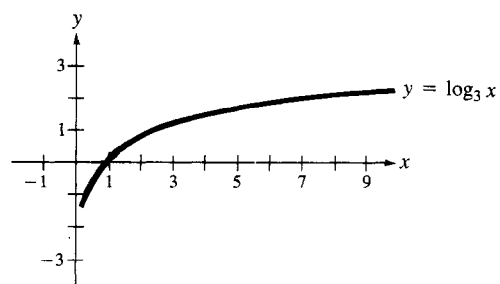


Figura 5. Funciones logarítmicas.

Las gráficas de las tres funciones logarítmicas $y = \log_4 x$, $y = \log_3 x$ y $y = \log_2 x$ se presentan en la figura 5. Si se está de acuerdo en restringir el análisis de las funciones logarítmicas a bases mayores que 1, estas gráficas conducen a las observaciones que a continuación se presentan.

Propiedades de las funciones logarítmicas

1. Si $a > 1$, entonces $y = \log_a x$ aumenta al aumentar x . Es decir, $f(x) = \log_a x$ es una función creciente cuando $a > 1$.
2. La gráfica de $y = \log_a x$ pasa a través de $(1, 0)$ para cada $a > 1$. Es decir, $\log_a 1 = 0$ para cada $a > 1$.
3. El dominio (los valores posibles de x) de cada función logarítmica es el conjunto de todos los números reales positivos.
4. La imagen (el conjunto de todos los valores posibles de y) de cada función logarítmica es el conjunto de todos los números reales.

Propiedades de las funciones inversas

El hecho de que las funciones logarítmicas y exponenciales sean inversas entre sí origina dos ecuaciones especiales. Recordar que la inversa de una función f se denota como f^{-1} y que $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$. Estas propiedades conducen al siguiente teorema.

Para cualquier base a , $a > 0$ y $a \neq 1$,

1. $\log_a a^x = x$, para cualquier número real x .
2. $a^{\log_a x} = x$, para cualquier número real $x > 0$.

Usemos el hecho de que $f(x) = a^x$ y $f^{-1}(x) = \log_a x$ son funciones inversas una de la otra para probar el teorema.

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $x = f^{-1}(f(x))$
 $= f^{-1}(a^x)$
 $= \log_a a^x$ | <ol style="list-style-type: none"> 2. $x = f(f^{-1}(x))$
 $= f(\log_a x)$
 $= a^{\log_a x}$ |
|---|---|

EJEMPLO 6

Simplificar:

- a) $\log_3 3^2 = 2$
- b) $\log_{100} 10^4 = \log_{100} (10^2)^2 = \log_{100} 100^2 = 2$
- c) $\log_{10} 0.01 = \log_{10} 10^{-2} = -2$
- d) $3^{\log_3 5} = 5$
- e) $4^{\log_4 (5x+2)} = 5x + 2$

Al igual que con las funciones exponenciales, por lo regular hay un interés sobre las funciones logarítmicas más complejas de la forma $f(x) = \log_a p(x)$. Recordar que $p(x)$ debe ser positiva para que tal función exista.

EJEMPLO 7

Dibujar la gráfica de $y = f(x) = \log_2 x^2$ para $x \neq 0$.

Ya que $f(-x) = f(x)$, la gráfica es simétrica con respecto al eje y . Una tabla de valores para $2^y = x^2$ es útil, y la gráfica se presenta en la figura 6.

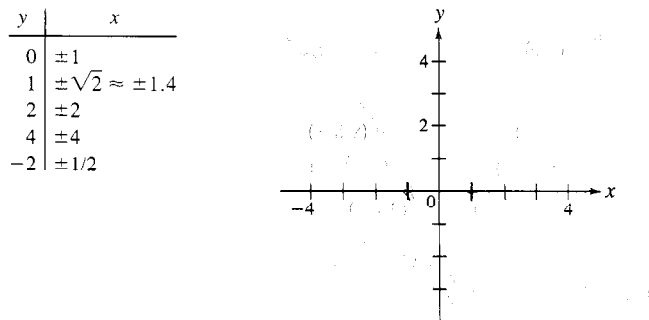


Figura 6

5.2. Ejercicios

En los ejercicios 1-18 trazar la gráfica de cada función.

1. $f(x) = 5^x$
2. $f(x) = 8^x$
3. $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$
4. $f(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^x$
5. $f(x) = -5^x$
6. $f(x) = -8^x$
7. $f(x) = 2 + 5^x$
8. $f(x) = 3^{x+1}$
9. $f(x) = 2^{x^2+1}$
10. $f(x) = 3^{x^2+1}$
11. $f(x) = 2^x - 2^{-x}$
12. $f(x) = \log_4 x$
13. $f(x) = \log_8 x$
14. $f(x) = 1 + \log_4 x$
15. $f(x) = \log_8 (-x)$ para $x < 0$
16. $f(x) = \log_2 (x + 1)$
17. $f(x) = \log_2 |x|$ para $x \neq 0$
18. $f(x) = |\log_2 x|$

En los ejercicios 19-24 simplificar cada expresión.

19. $\log_5 5^3$
20. $\log_{10} 1000$
21. $\log_{10} 0.001$
22. $7^{\log_7 1.5x}$
23. $e^{\log_e (x+7)}$
24. $\pi^{\log_\pi \sqrt{x}}$

En los ejercicios 25-32 utilizar una calculadora para aproximar cada número con una exactitud de cuatro lugares decimales.

25. $5^{\sqrt{3}}$
26. $-7^{\sqrt{6}}$
27. $-\pi^{\sqrt{3}}$
28. $(\sqrt{3})^\pi$
29. $6^{-\sqrt{2}}$
30. $9^{-\pi}$
31. $(1.02)^{60}$
32. $(1.02)^{-60}$

33. ¿A través de qué punto pasan las gráficas de todas las funciones exponenciales?
34. ¿A través de qué punto pasan las gráficas de todas las funciones logarítmicas?
35. ¿Cuál es el dominio de cada función exponencial?
36. ¿Cuál es la imagen de cada función exponencial?
37. ¿Cuál es el dominio de cada función logarítmica?
38. ¿Cuál es la imagen de cada función logarítmica?
39. ¿Cuál es la base de la función logarítmica $y = \log_a x$ si su gráfica pasa a través del punto $(3, 1)$?
40. ¿Cuál es la base de la función exponencial $y = a^x$ si su gráfica pasa a través del punto $\left(\frac{1}{2}, 8\right)$?
41. ¿Por qué se omite el 1 como base para una función logarítmica?
42. ¿Por qué se omite todo número negativo como base para una función logarítmica?

En los ejercicios 43-46 encontrar la inversa de cada función.

43. $f(x) = 2^{x+1} + 1$ 44. $f(x) = 3^{x-1} + 2$ 45. $f(x) = 2 \log_3 (x - 4)$ 46. $f(x) = 5 \log_2 (x + 3)$

47. **Biología.** El número de bacterias N en un cultivo está dado en términos del tiempo t , en horas, por la fórmula

$$N = (5\,000)2^t.$$

- a) ¿Cuántas bacterias están presentes al comenzar el experimento (cuando $t = 0$)?
 b) ¿Cuántas bacterias están presentes en 5 h?
 c) ¿Cuántas bacterias están presentes en 3.25 h?

48. **Física.** La presión atmosférica P sobre un objeto, en libras por pulgada cuadrada, puede aproximarse utilizando la fórmula $P = 14.7(2.7)^{-0.2x}$ donde x es la altura del objeto sobre el nivel del mar en millas. ¿Cuál es la presión del objeto a a) 1 milla, b) 5 millas y c) 8.5 millas de altura?

49. **Química.** Un isótopo radioactivo tiene una vida media a 4 años. Esto significa que en 4 años la edad de una cantidad determinada de isótopo se transformará en otra sustancia debido a la desintegración radioactiva espontánea. Si se permite que 50 gramos de este isótopo se desintegren en un reactor, la cantidad A que quedará al final de t años está dada por $A = 50\left(\frac{1}{2}\right)^{t/4}$. ¿Cuántos gramos quedarán al final de a) 2 años, b) 100 años y c) 5.5 años.

50. **Administración.** La cantidad A de dinero en una cuenta de ahorros al final de t años si la inversión original es 1 000 dólares a una tasa de interés anual del 10% compuesto trimestralmente, está dada por $A = 1\,000(1.025)^{4t}$. ¿Qué cantidad de dinero habrá en la cuenta al final de a) 1 año, b) 10 años y c) 3.5 años?

En los ejercicios 51-52 utilizar una calculadora y graficar cada función.

51. $f(x) = 1.4 + (2.5)^x$ 52. $f(x) = 3.8 + \log_{2.5} x$

En los ejercicios 53-58 resolver cada ecuación.

53. $\log_a 32 = 5$ 54. $\log_5 125 = y$ 55. $\log_{10} x = -2$
 56. $\log_7 7^{2x-3} = 5$ 57. $10^{\log_{10} (2x+5)} = 7$ 58. $\log_3 x^2 = 4$

Para preparar el material de la siguiente sección, repasar las propiedades de los exponentes. Responder cierto o falso en los ejercicios 59-62.

59. $a^m a^n = a^{m+n}$ 60. $(a^m)^n = a^{m+n}$
 61. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ($a \neq 0$) 62. $\left(\frac{a^m a^p}{a^q}\right)^k = a^{mk+pk-qk}$ ($a \neq 0$)

En esta sección se ofrece la demostración de varios teoremas importantes relacionados con las funciones logarítmicas que proporcionan herramientas valiosas para resolver ecuaciones logarítmicas. Recordar de la sección 5.1 que si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces

$$a^x = a^y \quad \text{si y sólo si} \quad x = y.$$

El siguiente teorema es el equivalente logarítmico de esto.

Sea a una base para logarar, $a > 0$ y $a \neq 1$, con x y y números reales positivos.

$$\log_a x = \log_a y \text{ si y sólo si } x = y.$$

Hay dos cosas por demostrar. Primero, si $x = y$, entonces es obvio que $\log_a x = \log_a y$ ya que $f(x) = \log_a x$ es una función. Recíprocamente si $\log_a x = \log_a y$, entonces $a^{\log_a x} = a^{\log_a y}$ por el teorema exponencial citado anteriormente. Por consiguiente, ya que $x = a^{\log_a x}$ y $y = a^{\log_a y}$, se tiene $x = y$.

El ejemplo que se presenta a continuación ilustra la utilidad de este teorema para resolver ciertas ecuaciones que involucran logaritmos.

EJEMPLO 1

Resolver: $\log_3 (4x + 5) = \log_3 x^2$

Haciendo uso del teorema anterior con $a = 3$, se tiene $4x + 5 = x^2$, la cual es una ecuación cuadrática en x .

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x + 1)(x - 5) = 0$$

$$\begin{array}{l} \text{o} \quad x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 5 = 0 \\ \quad \quad x = -1 \quad \quad \quad x = 5 \end{array}$$

Comprobación: $x = -1$: $\log_3 (4(-1) + 5) \stackrel{?}{=} \log_3 (-1)^2$

$$\log_3 1 = \log_3 1$$

$x = 5$: $\log_3 (4(5) + 5) \stackrel{?}{=} \log_3 5^2$

$$\log_3 25 = \log_3 25$$

Así, tanto -1 como 5 son soluciones.

Recuérdese que la palabra *logaritmo* significa *exponente*. El siguiente teorema presenta tres leyes de logaritmos que se basan en tres leyes familiares de exponentes. La demostración del teorema ayudará a ilustrar la equivalencia de logaritmos y exponentes.

Propiedades de los logaritmos

Para cualquier base a , $a > 0$ y $a \neq 1$, cualquier número real c , y números reales positivos x y y ,

1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos.
2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ El logaritmo de un cociente es la diferencia de los logaritmos.
3. $\log_a x^c = c \log_a x$. El logaritmo de un número a una potencia es la potencia por el logaritmo del número.

DEMOSTRACIÓN DE 1: Sea $u = \log_a x$ y $v = \log_a y$. Entonces, $a^u = x$ y $a^v = y$.

$$xy = a^u \cdot a^v$$

$$xy = a^{u+v}$$

De acuerdo con la definición de logaritmo, la última ecuación $xy = a^{u+v}$ se vuelve $\log_a xy = u + v$. Ya que $u = \log_a x$ y $v = \log_a y$, se tiene

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

En ocasiones, a esta ecuación se le denomina **regla del producto** para logaritmos.

$$\log_a (x + y) \neq \log_a x + \log_a y.$$

Si fuera una igualdad, se tendría $\log_a (x + y) = \log_a xy$, por lo que $x + y = x \cdot y$, lo cual obviamente es falso.

DEMOSTRACIÓN DE 2: Se procede como antes y sea $u = \log_a x$ y $v = \log_a y$. Entonces $a^u = x$ y $a^v = y$.

$$\frac{x}{y} = \frac{a^u}{a^v}$$

$$\frac{x}{y} = a^{u-v}$$

$$\log_a \frac{x}{y} = u - v = \log_a x - \log_a y.$$

Esta ecuación se denomina **regla del cociente** para logaritmos.

PRECAUCIÓN: $\log_a (x - y) \neq \log_a x - \log_a y$.

Si fuera una igualdad, $x - y$ sería igual a x/y .

DEMOSTRACIÓN DE 3: Sea $u = \log_a x$. Entonces $a^u = x$, y

$$x^c = (a^u)^c$$

$$x^c = a^{uc}$$

$$\log_a x^c = uc = cu = c \log_a x.$$

Esta ecuación se denomina **regla de la potencia** para logaritmos.

EJEMPLO 2

Utilizar las propiedades de los logaritmos para desarrollar las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_a \frac{x}{yz} &= \log_a x - \log_a yz \\ &= \log_a x - (\log_a y + \log_a z) \end{aligned}$$

$$= \log_a x - \log_a y - \log_a z$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \log_a \sqrt{\frac{uv}{w^2}} &= \log_a \left(\frac{uv}{w^2} \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \log_a \frac{uv}{w^2} \\ &= \frac{1}{2} (\log_a uv - \log_a w^2) \\ &= \frac{1}{2} (\log_a u + \log_a v - 2 \log_a w) \\ &= \frac{1}{2} \log_a u + \frac{1}{2} \log_a v - \log_a w \end{aligned}$$

EJEMPLO 3

$$\text{a) } \log_a x - \log_a y = \log_a x - \log_a y$$

$$= \log_a \frac{x}{y^2}$$

$$\text{b) } \log_a u + \log_a v = \log_a u + \log_a v$$

$$= \log_a u^{1/2} v^3$$

EJEMPLO 4

Suponer que $\log_a 2 = 0.6309$ y $\log_a 5 = 1.4650$. Aproximar el valor numérico de cada uno de los siguientes logaritmos.

$$\text{a) } \log_a \sqrt{20}$$

$$\begin{aligned} \log_a \sqrt{20} &= \log_a (2^2 \cdot 5)^{1/2} = \frac{1}{2} \log_a (2^2 \cdot 5) \\ &= \frac{1}{2} [\log_a 2^2 + \log_a 5] \\ &= \frac{1}{2} [2 \log_a 2 + \log_a 5] \\ &= \frac{1}{2} [2(0.6309) + 1.4650] \\ &= 1.3634 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \log_a \frac{5a}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\begin{aligned} \log_a \frac{5a}{\sqrt[3]{2}} &= \log_a 5a - \log_a \sqrt[3]{2} \\ &= \log_a 5 + \log_a a - \frac{1}{3} \log_a 2 \\ &= 1.4650 + 1 - \frac{1}{3}(0.6309) \\ &= 2.2547 \end{aligned}$$

El teorema final de esta sección se refiere a la relación entre logaritmos con diferentes bases. Considerar $\log_a x$ y $\log_b x$, y sea

$$u = \log_b x$$

$$b^u = x.$$

Tomar el logaritmo base a en ambos lados.

$$\begin{aligned}\log_a b^u &= \log_a x && \text{Si } b^u = x, \text{ entonces } \log_a b^u = \log_a x \\ u \log_a b &= \log_a x && \text{Si } b^u = x, \text{ entonces } \log_a b^u = \log_a x \\ (\log_b x)(\log_a b) &= \log_a x && \text{Si } b^{\log_b x} = x, \text{ entonces } \log_a b^{\log_b x} = \log_a x \\ \log_b x &= \frac{\log_a x}{\log_a b} && \text{Si } b^{\log_b x} = x, \text{ entonces } \log_a b^{\log_b x} = \log_a x\end{aligned}$$

Un caso especial de esta fórmula se genera cuando $x = a$.

$$\begin{aligned}\log_b x &= \frac{\log_a x}{\log_a b} \\ \log_b a &= \frac{\log_a a}{\log_a b} \\ \log_b a &= \frac{1}{\log_a b}\end{aligned}$$

Con lo anterior se ha probado lo siguiente.

Fórmula para la conversión de base

Si $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, y $x > 0$, entonces

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \quad \text{y} \quad \log_b a = \frac{1}{\log_a b}.$$

Obsérvese que la fórmula para la conversión de base establece que los logaritmos de base b son simplemente múltiplos de los logaritmos de base a donde el multiplicador es la constante $\frac{1}{\log_a b}$.

EJEMPLO 5

a) Encontrar el $\log_{16} 8$ cambiando a logaritmos base 2.

$$\log_{16} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 16} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^4} = \frac{3}{4}$$

Obsérvese que al cambiar a la forma exponencial, $\log_{16} 8 = \frac{3}{4}$ se transforma en $16^{3/4} = 8$, y, en verdad, $(\sqrt[4]{16})^3 = 8$.

b) Encontrar el $\log_9 3$ cambiando a logaritmos base 3.

$$\log_9 3 = \frac{1}{\log_3 9} = \frac{1}{\log_3 3^2} = \frac{1}{2}$$

Obsérvese que $9^{1/2} = \sqrt{9}$ en verdad sí es igual a 3.

5.3. Ejercicios

Resolver cada ecuación en los ejercicios 1-6.

1. $\log_2 (3x + 1) = \log_2 (5x - 7)$
2. $\log_5 (1 + x) = \log_5 (1 - x)$
3. $\log_5 x^2 = \log_5 (3x + 4)$
4. $\log_3 (x^2 + 4) = \log_3 4x$
5. $\frac{1}{3} \log_2 x^2 = \log_8 2x$
6. $\frac{1}{2} \log_3 2x = \log_9 (5x)$

En los ejercicios 7-24 evaluar cada logaritmo considerando que $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$, y $\log_{10} 5 = 0.6990$.

7. $\log_{10} 500$
8. $\log_{10} 25$
9. $\log_{10} 27$
10. $\log_{10} \frac{5}{2}$
11. $\log_{10} \frac{2}{5}$
12. $\log_{10} \frac{6}{5}$
13. $\log_{10} \frac{1}{9}$
14. $\log_{10} \sqrt{5}$
15. $\log_{10} \sqrt{6}$
16. $\log_{10} 3^7$
17. $\log_{10} \sqrt[7]{3}$
18. $\log_{10} \sqrt{150}$
19. $\log_5 3$
20. $\log_3 2$
21. $\frac{\log_{10} 2^7}{\log_{10} 5}$
22. $\frac{\log_{10} \sqrt[7]{5}}{\log_{10} \sqrt[3]{2}}$
23. $\log_{10} 1.8$
24. $\log_{10} 7.5$

En los ejercicios 25-36 utilizar las propiedades de los logaritmos para escribir cada logaritmo como una suma, diferencia o un múltiplo de logaritmos.

25. $\log_a xyz$
26. $\log_a x^2 y^3 z^4$
27. $\log_a \frac{xz^2}{y}$
28. $\log_a \left(\frac{xz}{y} \right)^2$
29. $\log_a \frac{y\sqrt{x}}{z^3}$
30. $\log_a \frac{(x+y)^2}{z}$
31. $\log_a z(x+1)^3$
32. $\log_a ax^2$
33. $\log_a x^2 \sqrt{\frac{y}{z}}$
34. $\log_a \frac{1}{ax^2}$
35. $\log_a \sqrt{x\sqrt{y}}$
36. $\log_a \sqrt{\frac{\sqrt{xy}}{z^2}}$

En los ejercicios 37-48 utilizar las propiedades de los logaritmos para escribir cada expresión con un solo logaritmo.

37. $\log_a x + \frac{1}{2} \log_a y$
38. $\log_a x - \frac{1}{2} \log_a y$
39. $3 \log_a x - 2 \log_a y$
40. $4 \log_a z + 5 \log_a yx$
41. $\frac{1}{2} \log_a x - 3 \log_a yz + 6 \log_a z$
42. $\frac{3}{2} \log_a z + \frac{1}{2} \log_a y$
43. $x \log_a y - 3 \log_a z$
44. $y \log_a z - z \log_a y$
45. $-\log_a (x-1) + \log_a (x^2 - 1)$
46. $2[\log_a x - \log_a (y+1) + \log_a z]$
47. $\frac{1}{2} \left[\log_a x - \log_a y - \frac{1}{2} \log_a z \right]$
48. $2 \log_a x - y \log_a z + \frac{1}{3} \log_a xy$

En los ejercicios 49-58 determinar si la ecuación dada es cierta o falsa.

49. $\log_a uv = \log_a u + \log_a v$
50. $\log_a uv = (\log_a u)(\log_a v)$
51. $\frac{\log_a u}{\log_a v} = \log_a \frac{u}{v}$
52. $\log_a (u + v) = \log_a uv$
53. $\log_a u - \log_a v = \log_a \frac{u}{v}$
54. $\log_a (u - v) = \log_a \frac{u}{v}$
55. $\log_a u^v = v \log_a u$
56. $\log_a au = 1 + \log_a u$
57. $\log_a \sqrt{u} = \sqrt{\log_a u}$
58. $\frac{1}{2} \log_a u = \sqrt{\log_a u}$

En los ejercicios 59-64 utilizar las fórmulas para la conversión de base para simplificar cada logaritmo con respecto a la base indicada.

59. $\log_{32} 8$; usar base 2
60. $\log_{32} 16$; usar base 2
61. $\log_{27} 3$; usar base 3
62. $\log_{27} 9$; usar base 3
63. $\log_9 27$; usar base 3
64. $\log_{25} 5$; usar base 5

65. Si $P = \log_2 (m + n)$, calcular el valor de P cuando $m = 8$ y $n = 8$, y demostrar que $\log_2 (m + n) \neq \log_2 m + \log_2 n$.
66. Si $M = \log_3 \frac{m}{n}$, calcular el valor de M cuando $m = 27$ y $n = 3$, y demostrar que $\log_3 \frac{m}{n} \neq \frac{\log_3 m}{\log_3 n}$.
67. Si $R = \log_3 mn$, calcular el valor de R cuando $m = 1$ y $n = 9$, y demostrar que $\log_3 mn \neq (\log_3 m)(\log_3 n)$.
68. Si $T = \log_2 (m - n)$, calcular el valor de T cuando $m = 8$ y $n = 4$, y demostrar que $\log_2 (m - n) \neq \log_2 m - \log_2 n$.
69. Expresar $\log_a x - \log_a y - z = 0$ en la forma exponencial sin usar logaritmos.
70. Expresar $\log_a x + \log_a y - z = 0$ en la forma exponencial sin usar logaritmos.

Graficar cada función.

71. $f(x) = 2^{x^2} + 2$

72. $f(x) = \log_3 |x|$

Simplificar cada expresión en los ejercicios 73-74.

73. $\log_\pi \pi^{3x+2}$

74. $10^{\log_{10} 5x^2}$

75. Evaluar 10^m si $m = \log_{10} 35$.

Logaritmos comunes

Recuérdese que cada número positivo, con excepción del número 1, puede utilizarse como una base para logaritmos. Sin embargo, dos bases logarítmicas ocurren con mayor frecuencia en aplicaciones de ciencia y matemáticas que en otras, la base 10 y la base e (e es un número irracional, aproximadamente 2.71828, el cual se analizará posteriormente en esta sección). Históricamente, puesto que el sistema numérico ordinario es de base 10, los logaritmos de base 10 fueron de uso común en computación. Como resultado, los logaritmos de base 10 se denominan **logaritmos comunes**. Por conveniencia, se omite el número 10 en la base de las expresiones logarítmicas comunes y se escribe, por ejemplo,

$$\log 427 \text{ en lugar de } \log_{10} 427.$$

Así, cuando un logaritmo se escribe sin la base, se entiende que la base es 10.

Antes de que los logaritmos comunes puedan utilizarse para resolver problemas, es necesario saber cómo calcular el valor aproximado del logaritmo de un número determinado. Previamente a la disponibilidad fácil de calculadoras, tablas parecidas a la tabla 1 del apéndice final de este libro se utilizaban para aproximar logaritmos. El apéndice A explica cómo utilizar la tabla de logaritmos comunes a quienes no deseen emplear una calculadora. La exposición presentada en esta sección y en todo el resto del capítulo presupone el uso de calculadoras. Recordar a cada momento que encontrar el valor del $\log 427$, por ejemplo, significa buscar el exponente de 10 que resulte en 427. Así, si $a = \log 427$, a es un exponente y, por consiguiente, $10^a = 427$. Con $10^2 = 100$, $10^3 = 1\,000$, y $100 < 427 < 1\,000$, se supondría que como

$$10^2 = 100 < 427 = 10^a < 1\,000 = 10^3,$$

a debe ser un número real que satisface $2 < a < 3$. Este número se encuentra en el ejemplo 1 a).

EJEMPLO 1

Utilizar una calculadora para encontrar los siguientes logaritmos comunes.

a) $\log 427$

La tecla rotulada **LOG** dará el resultado deseado.

$$\text{ALG \& RPN: } 427 \text{ [LOG]} \rightarrow \boxed{2.6304279}$$

b) $\log 0.00427$

$$\text{ALG \& RPN: } 0.000427 \text{ [LOG]} \rightarrow \boxed{-3.3695721}$$

c) $\log (-427)$

$$\text{ALG: } 427 \text{ [+/-] [LOG]} \rightarrow \boxed{\text{Error}} \quad \text{RPN: } 427 \text{ [CHS] [LOG]} \rightarrow \boxed{\text{Error} \quad 0}$$

En este caso, la pantalla mostrará *error* ya que los logaritmos de números negativos no están definidos.

d) $\log (0.000\,000\,004\,27)$

Puesto que la mayoría de las pantallas de las calculadoras sólo permiten ocho dígitos, los números muy pequeños o muy grandes deben introducirse en notación científica.

$$\begin{aligned} \text{ALG: } 4.27 \text{ [EE] } 9 \text{ [+/-] [LOG]} &\rightarrow \boxed{-8.3696 \quad 00} \\ \text{RPN: } 4.27 \text{ [EEX] } 9 \text{ [CHS] [LOG]} &\rightarrow \boxed{-8.3696 \quad 00} \end{aligned}$$

La pantalla muestra el logaritmo -8.3696 , exacto hasta cuatro lugares decimales.

Logaritmos con bases diferentes de 10

En la sección 5.3, se introdujo la fórmula para la conversión de base

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b},$$

la cual puede usarse en conjunción con una calculadora para encontrar logaritmos de cualquier base b al hacer $a = 10$.

EJEMPLO 2

Utilizar una calculadora y la fórmula para conversión de base en el fin de encontrar los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 59.4 = \frac{\log 59.4}{\log 2}$

Observar que el lado derecho de esta ecuación es un cociente de logaritmos y debe calcularse dividiendo, no restando.

$$\text{ALG: } 59.4 \text{ [LOG] } [\div] 2 \text{ [LOG] } [=] \rightarrow 5.8923910$$

$$\text{RPN: } 59.4 \text{ [LOG] [ENTER] } 2 \text{ [LOG] } [\div] \rightarrow 5.8923910$$

El dígito final en la pantalla puede variar ligeramente de calculadora a calculadora. Sin embargo,

$$\log_2 59.4 = 5.8924,$$

exacto hasta cuatro lugares decimales.

b) $\log_3 0.00845$

$$\log_3 0.00845 = \frac{\log 0.00845}{\log 3}$$

$$\text{ALG: } 0.00845 \text{ [LOG] } [\div] 3 \text{ [LOG] } [=] \rightarrow -4.3451078$$

$$\text{RPN: } 0.00845 \text{ [LOG] [ENTER] } 3 \text{ [LOG] } [\div] \rightarrow -4.3451078$$

Así, con una exactitud de cuatro lugares decimales,

$$\log_3 0.00845 = -4.3451.$$

Recuérdese siempre que un logaritmo es un exponente. En el ejemplo 2 a), se encuentra que $\log_2 59.4 \approx 5.8924$. En la forma exponencial, esto significa que $2^{5.8924} \approx 59.4$. Por supuesto, puede utilizarse la tecla y^x en una calculadora para comprobar este resultado.

$$\text{ALG: } 2 \text{ [y}^x\text{] } 5.8924 \text{ [=] } \rightarrow 59.400369$$

$$\text{RPN: } 2 \text{ [ENTER] } 5.8924 \text{ [y}^x\text{] } \rightarrow 59.4003695$$

De la misma manera, en el ejemplo 1 a), se encuentra que $\log 427 \approx 2.6304$. Por consiguiente, $10^{2.6304} \approx 427$.

$$\text{ALG: } 10 \text{ [y}^x\text{] } 2.6304 \text{ [=] } \rightarrow 426.97259$$

$$\text{RPN: } 10 \text{ [ENTER] } 2.6304 \text{ [y}^x\text{] } \rightarrow 426.9725940$$

Nótese que debido a errores de redondeo, la pantalla no muestra 427 sino una aproximación de él. Otra forma de obtener este resultado es presionando una tecla o un conjunto de teclas diferentes. Algunas calculadoras tienen una tecla 10^x mientras que otras utilizan dos teclas, INV y enseguida LOG . Ambas secuencias aparecen enseguida.

$$\text{ALG: } 2.6304 \text{ [INV] [LOG] } \rightarrow 426.97259$$

$$\text{RPN: } 2.6304 \text{ [10}^x\text{] } \rightarrow 426.9725940$$

Antilogaritmo

Puede usarse una de estas secuencias para encontrar un número a partir de su logaritmo (el proceso inverso al señalado previamente). A un número que tiene un logaritmo determinado se le denomina su **antilogaritmo** (**antilog**). En la ecuación

$$\log n = x,$$

x es un logaritmo de n y n es un antilogaritmo de x . En la forma exponencial,

EJEMPLO 3

Utilice una calculadora para encontrar los siguientes antilogaritmos.

a) $\log x = 0.5623$

Debe encontrarse x donde $x = 10^{0.5623}$.

ALG: 0.5623 $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{LOG}}$ \rightarrow $\boxed{3.6500600}$

RPN: 0.5623 $\boxed{10^x}$ \rightarrow $\boxed{3.6500600}$

Así, $x = 3.65$, exacto hasta tres cifras significativas.

b) $\log x = -3.4215$

ALG: 3.4215 $\boxed{+/-}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{LOG}}$ \rightarrow $\boxed{0.0003789}$

RPN: 3.4215 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{10^x}$ \rightarrow $\boxed{0.0003789}$

Así, $x = 0.000379$, exacto hasta tres cifras significativas.

Logaritmos naturales

El número e como base para logaritmos surge en forma natural en muchas aplicaciones, tales como crecimiento poblacional, interés continuamente compuesto y desintegración radioactiva espontánea. En consecuencia, los logaritmos de base e se denominan **logaritmos naturales**. El significado pleno de este número no puede comprenderse sin un estudio más avanzado. Una manera de definir e es encontrar el valor de

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

conforme n aumenta a través de valores cada vez más y más grandes. Para evaluar esta expresión, utilizar en una calculadora la siguiente secuencia.

ALG: n $\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{y^x}$ n $\boxed{=}$ \rightarrow $\boxed{\text{Pantalla}}$

RPN: n $\boxed{1/x}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ n $\boxed{y^x}$ \rightarrow $\boxed{\text{Pantalla}}$

La tabla de abajo muestra los resultados para valores crecientes de n .

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000
10	2.59374
100	2.70481
1000	2.71692
10,000	2.71815
100,000	2.71827
1,000,000	2.71828
\downarrow ∞	\downarrow e

El número e recibió tal designación en honor de Leonard Euler, prestigiado matemático del siglo XVIII. Tan importante es este número que por lo general a $f(x) = e^x$ se le llama función exponencial, distinguiéndola de todas las funciones exponenciales con otras bases a . Ya que los logaritmos de base e , logaritmos naturales, ocurren con mucha frecuencia en matemáticas, se utiliza una notación especial, $\ln x$, para ellos en lugar de $\log_e x$. De hecho, casi todas las calculadoras tienen una tecla $\ln x$ o LN junto a la tecla de logaritmos comunes LOG .

EJEMPLO 4

Utilizar una calculadora para encontrar los siguientes logaritmos naturales.

a) $\ln 53.6$

$$\text{ALG \& RPN: } 53.6 \text{ } \boxed{\ln x} \rightarrow \boxed{3.9815491}$$

Así, $\ln 53.6 = 3.9815$, exacto hasta cuatro lugares decimales.

b) $\ln 0.000\,000\,062\,5$

$$\text{ALG: } 6.25 \text{ } \boxed{\text{EE}} \text{ } 8 \text{ } \boxed{+/-} \text{ } \boxed{\ln x} \rightarrow \boxed{-1.6588} \text{ } 01$$

$$\text{RPN: } 6.25 \text{ } \boxed{\text{EEX}} \text{ } 8 \text{ } \boxed{\text{CHS}} \text{ } \boxed{\text{LN}} \rightarrow \boxed{-16.5880993}$$

Así, $\ln 0.000\,000\,062\,5 = -16.588$, exacto hasta tres lugares decimales.

El procedimiento para encontrar antilogaritmos que involucren logaritmos naturales utiliza ya sea la tecla e^x o las teclas INV y $\ln x$ de manera análoga a la expuesta para logaritmos comunes.

EJEMPLO 5

Utilizar una calculadora para encontrar los siguientes antilogaritmos.

a) $\ln x = 5.9002$

Debe encontrarse x donde $\ln x = 5.9002$.

$$\text{ALG: } 5.9002 \text{ } \boxed{\text{INV}} \text{ } \boxed{\ln x} \rightarrow \boxed{365.11048}$$

$$\text{RPN: } 5.9002 \text{ } \boxed{e^x} \rightarrow \boxed{365.1104827}$$

Así, $x = 365.1$, exacto hasta cuatro cifras significativas.

b) $\ln x = -2.1258$

$$\text{ALG: } 2.1258 \text{ } \boxed{+/-} \text{ } \boxed{\text{INV}} \text{ } \boxed{\ln x} \rightarrow \boxed{0.1193375}$$

$$\text{RPN: } 2.1258 \text{ } \boxed{\text{CHS}} \text{ } \boxed{e^x} \rightarrow \boxed{0.1193375}$$

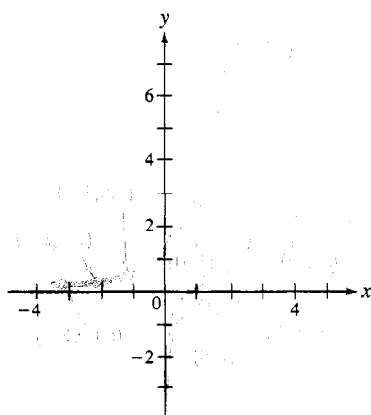
Así, $x = 0.1193$, exacto hasta cuatro lugares decimales.

EJEMPLO 6

Graficar las funciones mutuamente inversas $y = \ln x$ y $y = e^x$ en el mismo sistema de coordenadas.

Los valores representativos de cada función se proporcionan en las tablas junto a las gráficas mostradas en la figura 7.

x	$\ln x$
0.5	-0.7
1	0
2	0.7
3	1.1
4	1.4
5	1.6



x	e^x
-3	0.05
-2	0.1
-1	0.4
0	1
1	2.7
2	7.4

Figura 7

5.4. Ejercicios

En los ejercicios 1-10 encontrar cada logaritmo común, con una exactitud de cuatro lugares decimales.

1. $\log 625$
2. $\log 0.00311$
3. $\log 2.00046$
4. $\log 694\,000$
5. $\log 0.000\,066\,9$
6. $\log 71.00045$
7. $\log (5.12 \times 10^{11})$
8. $\log (3.39 \times 10^{-9})$
9. $\log 0.000\,000\,007\,41$
10. $\log 229\,000\,000$

Utilizar una calculadora y la fórmula para conversión de base con el propósito de encontrar cada logaritmo, con una exactitud de cuatro lugares decimales, en los ejercicios 11-16.

11. $\log_4 15.6$
12. $\log_{11} 0.566$
13. $\log_{3.5} 468$
14. $\log_{4.6} 2.63$
15. $\log_{\sqrt{2}} 348.2$
16. $\log_{\pi} e$

En los ejercicios 17-26 encontrar cada antilogaritmo común, con una exactitud de tres cifras significativas.

17. $\log x = 1.3565$
18. $\log x = 4.9907$
19. $\log x = -3.2117$
20. $\log x = -2.0075$
21. $\log x = 14.6531$
22. $\log x = 18.8309$
23. $\log x = -0.0035$
24. $\log x = -0.0007$
25. $\log x = -35.2264$
26. $\log x = 42.5761$

En los ejercicios 27-36 encontrar cada logaritmo natural, con una exactitud de cuatro lugares decimales.

27. $\ln 846$
28. $\ln 1.001$
29. $\ln 0.000\,525$
30. $\ln 605.34$
31. $\ln 0.000\,038\,7$
32. $\ln 215\,000\,000$
33. $\ln (2.66 \times 10^{15})$
34. $\ln (5.07 \times 10^{-12})$
35. $\ln \pi$
36. $\ln \sqrt{2}$

En los ejercicios 37-46 encontrar cada antilogaritmo natural, con una exactitud de tres cifras significativas.

37. $\ln x = 2.4308$
38. $\ln x = 7.4992$
39. $\ln x = -4.1553$
40. $\ln x = -3.0055$
41. $\ln x = 21.7439$
42. $\ln x = -11.6545$
43. $\ln x = -0.0070$
44. $\ln x = 0.0300$
45. $\ln x = -41.4239$
46. $\ln x = 38.8572$

En los ejercicios 47-52 dibujar la gráfica de cada función.

47. $y = e^{2x}$

48. $y = e^{x/2}$

49. $y = e^{-x}$

50. $y = \ln(x + 1)$

41. $y = \ln x^2$

52. $y = \ln |x|$

53. **Administración.** La ecuación de demanda para x unidades de un producto con respecto al precio por unidad, P , está dada por $P = 100 - 0.2e^{0.005x}$.

- a) Encontrar el precio si la demanda es de 100 unidades.
- b) Encontrar el precio si la demanda es de 1 000 unidades.
- c) Encontrar la demanda si el precio es de 80.00 dólares.
- d) Encontrar la demanda si el precio es de 60.00 dólares.

54. **Química.** En química, el **pH** (potencial de hidrógeno) de una sustancia se define como

$$\text{pH} = -\log [\text{H}^+],$$

donde $[\text{H}^+]$ es la concentración de iones hidrógeno, medida en moles por litro. La escala del pH de una solución varía de 0 a 14, siendo el pH del agua destilada igual a 7. Si el pH de una sustancia es menor que 7, ésta se denomina *ácido*; y si el pH de una sustancia es mayor que 7, se llama *base*.

- a) Encontrar el pH de cierta marca de café cuya $[\text{H}^+]$ es 3.89×10^{-7} mols por litro.
- b) Encontrar el pH de una muestra de agua de mar cuya $[\text{H}^+]$ es 3.15×10^{-9} mols por litro.
- c) Encontrar la concentración de iones hidrógeno del agua destilada.
- d) Encontrar la concentración de iones hidrógeno del agua de lluvia que tiene un pH de 5.6.

55. **Física.** La presión atmosférica P , medida en libras por pulgada cuadrada, a una altitud x , medida en millas, sobre el nivel del mar puede aproximarse mediante la fórmula

$$P = 14.7e^{-0.2x}.$$

- a) ¿Cuál es la presión atmosférica al nivel del mar?
- b) ¿Cuál es la presión atmosférica en el exterior de un avión de reacción que vuela a velocidad de crucero a una altitud de 6.25 mi?
- c) ¿A qué altitud la presión atmosférica será la mitad de la presión al nivel del mar?
- d) ¿A qué altitud la presión atmosférica será la cuarta parte de la presión al nivel del mar?

56. **Astronomía.** Las estrellas se clasifican por categorías según su brillantez en una escala medida en magnitudes; a la estrella más lánguida aun visible a simple vista se le asigna una magnitud de 6. Los telescopios están diseñados para observarse estrellas más allá de una magnitud de 6. Cada telescopio tiene una magnitud limitante denotada por L que depende del diámetro de pulgadas, d , de su lente. La fórmula que relaciona estas dos cantidades es

$$L = 8.8 + 2.2 \ln d.$$

- a) ¿Cuál es la magnitud limitante de un telescopio con una lente de 2 in?
- b) ¿Cuál es la magnitud limitante de un telescopio con una lente de 30 in?
- c) ¿Cuál es el diámetro de la lente de un telescopio cuya magnitud limitante es 10?
- d) ¿Cuál es el diámetro aproximado de la lente en el ojo humano?

57. **Medicina.** Cuando se introduce una droga al sistema circulatorio humano, la concentración de la droga disminuye conforme el hígado y los riñones la eliminan. Si una dosis inicial de 15 mg de una droga se toma por vía oral, la cantidad A que sigue estando en el sistema después de x horas puede aproximarse mediante la fórmula

$$A = 15e^{-0.3x}.$$

- a) ¿Qué cantidad de la droga queda en el sistema después de 3 horas?
- b) ¿Qué cantidad de la droga queda en el sistema después de 1 día?
- c) Para que la droga sea efectiva, al menos 5 mg deben permanecer en el sistema. ¿Cuánto tiempo será efectiva la droga?

d) ¿Cuál es la vida media de la droga (el tiempo en el que sólo la mitad de la dosis inicial queda en el sistema)?

58. **Psicología.** Con la finalidad de determinar la retención de conceptos aprendidos, se practicó un examen a un grupo de estudiantes y, a partir de esa fecha, se les reexaminó cada mes utilizando una prueba equivalente. Los resultados mostraron que el decrecimiento promedio en puntuación D satisfacía la fórmula

$$D = 80 - 12 \ln(x + 1),$$

donde x es el tiempo en meses.

- ¿Cuál fue la puntuación promedio inicial en el examen?
- ¿Cuál fue la puntuación promedio al final de 1 año?
- ¿Después de cuántos meses la puntuación promedio cayó por debajo de 60?
- ¿Después de cuántos meses la puntuación promedio cayó por debajo de 40?

Para repasar

Utilizar las propiedades de los logaritmos en los ejercicios 62-64 para escribir cada expresión con un solo logaritmo, diferencia o múltiplo de logaritmos.

59. $\ln \frac{e\sqrt{z}}{\sqrt[3]{x}}$

60. $\ln \sqrt{\frac{x\sqrt{z}}{y^4}}$

61. $\ln \sqrt{e\sqrt{y}}$

Utilizar las propiedades de los logaritmos en los ejercicios 62-64 para escribir cada expresión con un solo logaritmo.

62. $3 \ln xy + \frac{1}{2} \ln z$

63. $-\frac{1}{2} \ln(x + y) + \frac{1}{2} \ln(x^2 - y^2)$

64. $3 \ln x - \frac{1}{2} \ln y - 5 \ln z$

65. Expresar $2 \ln x + \ln y - 5 = 0$ en la forma exponencial sin usar logaritmos.

66. Resolver $\ln(3x - 2) = \ln x^2$.

En los ejercicios 67-68 dibujar la gráfica de cada función.

67. $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

68. $f(x) = \log_4(-x)$ para $x < 0$

Resolver cada ecuación en los ejercicios 69-70.

69. $7^x = 7^{2x+3}$

70. $\log_3 x = \log_3(x^2 - 2)$

5.5. ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Resolución de ecuaciones exponenciales

En las secciones anteriores se han resuelto varias ecuaciones simples que involucran exponenciales o logaritmos ya sea por inspección o utilizando la aplicación directa de uno de los dos teoremas

$$a^x = a^y \text{ si y sólo si } x = y$$

$$\log_a x = \log_a y \text{ si y sólo si } x = y.$$

Enseguida se desarrollan estos métodos para incluir ecuaciones más complejas. Iniciaremos considerando las **ecuaciones exponenciales** en las que la variable aparece en uno o más exponentes. En algunos casos, puede ser posible expresar ambos lados de una ecuación exponencial como potencias de una misma base; de ser así, es válido igualar los exponentes.

EJEMPLO 1

Resolver:

$$3^{5x} = 9^{x-6}$$

$$3^{5x} = 9^{x-6}$$

$$3^{5x} = (3^2)^{x-6}$$

$$3^{5x} = 3^{2(x-6)}$$

$$5x = 2(x - 6)$$

Los dos lados son potencias de la misma base, por lo que se puede igualar los exponentes.

$$5x = 2x - 12$$

$$3x = -12$$

$$x = -4$$

$$3^{5(-4)} \stackrel{?}{=} 9^{-4-6}$$

Comparación:

$$3^{-20} = 9^{-10} = 3^{-20}$$

$$3^{-20} = 3^{-20} \quad \text{Verdadero}$$

En algunas ecuaciones puede ser difícil expresar ambos lados como exponenciales con la misma base. Cuando esto ocurre, el procedimiento a seguir es tomar el logaritmo de ambos lados, utilizando una base adecuada, y aplicar la regla de la potencia para destituir a las variables de los exponentes.

EJEMPLO 2Resolver: $3^{2x} = 7^{x+5}$

$$3^{2x} = 7^{x+5}$$

$$\log 3^{2x} = \log 7^{x+5}$$

Se toma el logaritmo de ambos lados.

$$2x \log 3 = (x + 5) \log 7$$

Se usa la potencia.

$$2x \log 3 = x \log 7 + 5 \log 7$$

Se distribuye.

$$2x \log 3 - x \log 7 = 5 \log 7$$

Se agrupan los términos que contienen a x a la izquierda.

$$(2 \log 3 - \log 7)x = 5 \log 7$$

Se divide.

$$x = \frac{5 \log 7}{2 \log 3 - \log 7}$$

Se calcula con $(2 \log 3 - \log 7)$.

ALG: 2 \times 3 LOG = - 7 LOG = STO 5 \times 7 LOG = \div RCL = \rightarrow 38.714652

RPN: 3 LOG ENTER 2 \times 7 LOG - STO 7 LOG ENTER 5 \times RCL \div \rightarrow 38.714652

Así, $x \approx 38.7$, exacto hasta tres cifras significativas.

Para resolver una ecuación exponencial

1. Se intenta expresar cada lado como una potencia utilizando la misma base y se igualan los exponentes resultantes.
2. Si la anterior falla, se toma el logaritmo de cada lado y se usa la regla de la potencia para eliminar los exponentes variables.
3. Se resuelve la ecuación resultante y se comprueba la original.

Resolución de ecuaciones logarítmicas

Las ecuaciones que contienen logaritmos de expresiones que incluyen una variable se denominan ecuaciones logarítmicas. La resolución de éstas requiere un conocimiento completo de las propiedades básicas de los logaritmos.

PRECAUCIÓN. Siempre comprobar las soluciones posibles en la ecuación original y recordar que debe omitirse cualquier valor que resulte en el logaritmo de un número negativo.

EJEMPLO 3 Resolver: $\log_2(x+1) - \log_2(x-6) = 3$

Resolver: $\log_2(x+1) - \log_2(x-6) = 3$

$$\log_2(x+1) - \log_2(x-6) = 3$$

$$\log_2\left(\frac{x+1}{x-6}\right) = 3 \quad \text{La diferencia de los logaritmos es el logaritmo de la diferencia.}$$

$$\left(\frac{x+1}{x-6}\right) = 2^3 \quad \text{Convertir el logaritmo a exponencial.}$$

$$\left(\frac{x+1}{x-6}\right) = 8$$

$$(x+1) = 8(x-6) \quad \text{Eliminar los denominadores, multiplicando por } (x-6).$$

$$x+1 = 8x-48$$


$$-7x = -49$$

$$x = 7$$

Comprobación: $\log_2(x+1) - \log_2(x-6) \stackrel{?}{=} 3$

$$\log_2 8 - \log_2 1 \stackrel{?}{=} 3$$

$$3 - 0 = 3$$

La solución es 7. 

EJEMPLO 4

Resolver: $\ln(3x-1) + \ln(x+1) = \ln(4x+7)$

$$\ln(3x-1) + \ln(x+1) = \ln(4x+7)$$

$$\ln(3x-1)(x+1) = \ln(4x+7) \quad \ln a + \ln b = \ln ab$$

$$(3x-1)(x+1) = 4x+7 \quad \ln a = \ln b \text{ significa que } a = b$$

$$3x^2 + 2x - 1 = 4x + 7$$


$$3x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(3x+4)(x-2) = 0$$

$$3x+4=0 \quad \text{o} \quad x-2=0$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

$$x = 2$$

La única solución es 2 ya que $-\frac{4}{3}$ no comprueba. (¿Por qué?) 

EJEMPLO 5

Resolver: $\log_2 x + \log_3 x = 1$

$$\log_2 x + \log_3 x = 1 \quad \text{Estas expresiones no pueden combinarse ya que las bases son diferentes}$$

$$\frac{\log x}{\log 2} + \frac{\log x}{\log 3} = 1 \quad \text{Convertir a logaritmos comunes}$$

$$\log x \left[\frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} \right] = 1 \quad \text{Factorizar } \log x$$

$$\log x = \frac{1}{\frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3}} \quad \text{Despejar } \log x$$

$$\log x = 0.1845757 \quad \text{Evaluar utilizando una calculadora}$$

$$x \approx 1.53 \quad \text{Encontrar el antilogaritmo de 0.1845757 con una exactitud de tres cifras significativas}$$

Comprobar este resultado por sustitución, convirtiendo luego a logaritmos comunes.

Para resolver una ecuación logarítmica

1. Obtener una expresión logarítmica simple usando la misma base en un lado de la ecuación o escribir cada lado como un logaritmo usando la misma base.
2. Convertir el resultado a una ecuación exponencial, o usar el hecho de que $\log_a u = \log_a v$ implica $u = v$, y resolverla.
3. Comprobar todas las soluciones posibles en la ecuación original. (Los números negativos no tienen logaritmos.)

5.5. Ejercicios

Resolver cada ecuación en los ejercicios 1-48. Cuando sea apropiado, dar la respuesta con una exactitud de tres cifras significativas

- | | | | |
|---|--|----------------------------------|-----------------------------|
| 1. $4^x = 8$ | 2. $9^{2x} = 27$ | 3. $2^{5x} = 8^{x+5}$ | 4. $27^{x-4} = 9^{x+2}$ |
| 5. $2^{x^2} = 16^x$ | 6. $125^{2x-1} = 25^{x+8}$ | 7. $2^{3x} = 7$ | 8. $3^{x+2} = 4$ |
| 9. $5^{x+1} = 3^{2x}$ | 10. $7^{x+2} = 4^{3x}$ | 11. $(1.08)^x = 100$ | 12. $(1.12)^{x/2} = 1\,000$ |
| 13. $8^{\log_2 x} = 125$ | 14. $9^{\log_3 x} = 4$ | 15. $2^{x^2} 3^{x^2} = 6^{5x-6}$ | |
| 16. $3^{x^2} 5^{x^2} = 15^{4x+5}$ | 17. $7^{2x} 3^x = 10$ | 18. $2^{4x} 3^x = 100$ | |
| 19. $\log_2 (x+2) = 3$ | 20. $\log_5 (2x+1) = 2$ | 21. $\log_3 x + \log_3 9 = 5$ | |
| 22. $\log_2 (x+3) - \log_2 (x-6) = \log_2 (x-5)$ | 23. $\ln (x+1) + \ln (x-1) = \ln (4x+4)$ | | |
| 24. $\log_5 (x+2) + \log_5 (x-2) = \log_5 (2x-1)$ | 25. $\log_5 (2x-1) - \log_5 (x-5) = 1$ | | |
| 26. $\log_3 (2x+5) - \log_3 (x-1) = 2$ | 27. $\log_5 x + \log_7 x = 2$ | | |
| 28. $\log_3 x + \log_9 x = 5$ | 29. $\log_4 4x = \log_2 (x+1)$ | 30. $\log 3^x + \log 4^{2x} = 6$ | |
| 31. $(\log_5 x)^2 = 2 \log_5 x$ | 32. $(\ln x)^2 = 5 \ln x$ | 33. $\ln x^3 = (\ln x)^3$ | |
| 34. $(\log x)^2 = \log x^2$ | 35. $x^{\ln x} = e^2 x$ | 36. $2^{\log x} = 4x$ | |
| 37. $\log (\log x) = 1$ | 38. $\ln (\ln x) = 2$ | 39. $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1$ | |

40. $\frac{e^x - 3e^{-x}}{2} = 1$

41. $\log \sqrt{x} = \sqrt{\log x}$

42. $\ln \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{\ln x}$

43. $\ln |x| = 1$

44. $\log |x| = 2$

45. $|\log x| = 2$

46. $|\ln x| = 3$

47. $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 2$

48. $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$

Física. La ley de enfriamiento de Newton relaciona el tiempo t , en minutos, que requiere un objeto calentado a una temperatura T_0 para enfriarse a una temperatura T cuando se coloca en una área a temperatura constante T_c , la fórmula es

$$T = T_c + (T_0 - T_c)e^{-kt},$$

donde la constante K depende de la naturaleza del objeto considerado. Utilizar esta información en los ejercicios 49-54.

49. Una varilla de hierro, con una constante $k = 0.025$, se calienta a 250°F y se coloca en un cuarto con una temperatura constante de 70°F . ¿Cuál será la temperatura de la varilla después de 10 minutos?
50. Una bola de hierro, con una constante $k = 0.03$, se calienta a 320°F y se coloca en un cuarto con una temperatura constante de 75°F . ¿Cuál será la temperatura de la bola después de 5 minutos?
51. Un objeto en un cuarto a temperatura constante de 80°F se enfría de 400°F a 200°F en 15 minutos. Encontrar el valor de la constante k y úsese para determinar la temperatura del objeto después de 30 minutos.
52. Un objeto en un cuarto a temperatura constante de 70°F se enfría a 120°F a 100°F en 30 minutos. Encontrar el valor de la constante k y úsese para determinar la temperatura del objeto después de 1 hora.
53. Despeja t en la ley de enfriamiento de Newton.
54. **Criminología.** Cuando un médico forense que investiga la causa de un fallecimiento llegó al mediodía al lugar del homicidio descubrió que la temperatura del cuerpo de la víctima era 80°F . La habitación en la que se encontraba ésta tenía una temperatura de 70°F . Suponiendo que la constante k es 0.004, utilizar la fórmula del ejercicio 53 para determinar la hora aproximada de la muerte. [Sugerencias: la temperatura normal de una persona viva es de 98.6°F .]

Oceanografía. Cuando un rayo de luz pasa a través del agua, la intensidad de la luz I disminuye gradualmente de acuerdo con la profundidad del agua x en ft. La relación entre estas dos variables está dada por

$$I = I_0 e^{-kx},$$

donde I_0 es la intensidad de la luz en la superficie del agua y k es el coeficiente de extinción, el cual depende del agua particular bajo consideración. Utilizar esta fórmula en los ejercicios 55-56.

55. Si el coeficiente de extinción de Lake Louise es 0.05, ¿a qué profundidad, en ft, la intensidad de un rayo de luz se reducirá 50% de la intensidad en la superficie?
56. Si el coeficiente de extinción de la laguna azul es 0.009, ¿a qué profundidad, en ft, la intensidad de un rayo de luz se reducirá 10% de la intensidad en la superficie?

En los ejercicios 57-58 dibujar la gráfica de cada función.

57. $y = \ln(x^2 + 1)$

58. $y = e^{-0.5x}$

59. **Química.** Utilizar la ecuación del pH, $\text{pH} = -\log [\text{H}^+]$, para encontrar el pH de una bebida no alcohólica con una concentración de iones hidrógeno de 3.25×10^{-7} .
60. **Administración.** Utilizar la ecuación de la demanda $P = 250 - 0.3e^{0.007x}$ para encontrar el precio por unidad de un producto cuando la demanda es de 200 unidades.

Ya se ha hecho referencia a una diversidad de problemas aplicados que utilizan exponenciales o logaritmos. Esta sección versa sobre aplicaciones especiales en asuntos financieros y temas científicos relevantes.

Interés compuesto

Suponer que se efectúa un depósito de 5 000 dólares en una cuenta de ahorros que paga el 12% de interés anual. Al final de un año, el monto en la cuenta será

$$\$5\,000 + 0.12(\$5\,000) = (1.12)(\$5\,000) = \$5\,600.$$

Con el objeto de observar un modelo financiero, escribir 5 600 dólares como $(1.12)(5\,000)$ y destacar que al final del segundo año, el monto crecerá a

$$\begin{aligned} \$5\,600 + (0.12)(\$5\,600) &= (1.12)(\$5\,000) + (0.12)[(1.12)(\$5\,000)] \\ &= [1 + 0.12](1.12)(\$5\,000) \\ &= (1.12)^2(\$5\,000) = \$6\,272. \end{aligned}$$

Prosiguiendo de esta manera, después de t años, el valor de la cuenta será

$$5\,000 \text{ dólares } (1.12)^t.$$

En general, si un monto inicial P , llamado **principal**, se invierte durante t años a una tasa de interés anual r , compuesto anualmente, el monto A crecerá a

$$A = P(1 + r)^t.$$

Por ejemplo, después de 30 años, el monto original de 5 000 dólares crecería a

$$A = \$5\,000(1 + 0.12)^{30} = \$5\,000(1.12)^{30} = \$149\,799.61.$$

A continuación se exponen los pasos en la calculadora.

$$\begin{array}{ll} \text{ALG:} & 1.12 \boxed{y^x} 30 \boxed{=} \boxed{\times} 5\,000 \boxed{=} \rightarrow \boxed{149\,799.61} \\ \text{RPN:} & 1.12 \boxed{\text{ENTER}} 30 \boxed{y^x} 5\,000 \boxed{\times} \rightarrow \boxed{149\,799.61} \end{array}$$

Recordar que los valores en algunas calculadoras pueden diferir ligeramente.

Con frecuencia, los depósitos ganan interés por composición semestral (dos veces al año) o trimestral (cuatro veces al año). La tasa de interés por periodo se encuentra al dividir el interés anual entre el número de periodos de composición por año. Si se realiza un depósito de 5 000 dólares en una cuenta que paga 12% de interés compuesto semestralmente, el monto en la cuenta al final de un año (dos periodos de composición) es

$$A = \$5\,000(1 + 0.06)^2 = \$5\,000(1.06)^2 = \$5\,618.$$

Obsérvese que al componer semestralmente en lugar de anualmente, el valor de la cuenta ha aumentado 18 dólares. Si la composición fuera trimestral, el monto al final del año sería

$$A = \$5\,000(1 + 0.03)^4 = \$5\,000(1.03)^4 = \$5\,627.55.$$

En general, si se efectúa un depósito de un principal P en una cuenta a una tasa de interés anual r , compuesto k veces por año durante t años, el monto en la cuenta está dado por la siguiente fórmula.

Fórmula de interés compuesto

$$A = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} \quad (k \text{ periodos de composición por año})$$

Suponer ahora que el número k de periodos de composición se hace cada vez más y más grande, sin límite. El resultado se denomina composición continua. Escribir la fórmula del interés compuesto en términos de $\frac{k}{r}$ y sustituir $\frac{k}{r}$ por n .

$$A = P\left(1 + \frac{1}{\frac{k}{r}}\right)\left(\frac{k}{r}\right)^{rt} = P\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nrt} = P\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{rt}.$$

Ya que $n = \frac{k}{r}$ es una constante fija, al hacerse más grande k también se hace más grande n . Pero de acuerdo con el desarrollo del número e en la sección 5.4 se sabe que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ se aproxima a } e.$$

Así, para composición continua, se tiene la siguiente fórmula.

Fórmula de interés compuesto

$$A = Pe^{rt} \quad (\text{composición continua})$$

EJEMPLO 1

Administración

Si se realiza un depósito de 10 000 dólares en una cuenta que paga una tasa de interés anual de 12%, encontrar el monto de la cuenta al final de cinco años si la composición es **a)** trimestral y **b)** continua.

- a)** Ya que la composición es trimestral, $k = 4$. Sustituir P por 10 000, r por 0.12 y t por 5 en la fórmula de interés compuesto.

$$\begin{aligned} A &= P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} = 10\,000\left(1 + \frac{0.12}{4}\right)^{(4)(5)} \\ &= 10\,000(1.03)^{20} \\ &= \$18\,061.10 \end{aligned}$$

b) Para composición continua, sustituir P por 10 000, r por 0.12 y t por 5.

$$\begin{aligned} A &= Pe^{rt} = 10\,000e^{(0.12)(5)} \\ &= 10\,000e^{0.6} \\ &= \$18\,221.19 \end{aligned}$$

Observar que con la composición continua, la cuenta ganaría 160.09 dólares más durante el periodo de cinco años que con la composición trimestral.

Amortización de un préstamo

Cuando un banco otorga un préstamo de un monto P de dinero que se ha de reembolsar durante t años en pagos regulares iguales de p dólares k veces por año, esto se denomina **amortización** de un préstamo. Es decir, un préstamo se **amortiza** cuando una porción de cada pago se utiliza para pagar el interés y el resto para reducir el principal por pagar. Ya que cada pago reduce el principal, la porción de cada pago destinada para el interés decrecerá según se efectúen los pagos. Las fórmulas para el monto p de cada pago y el interés total I cargado aparecen abajo.

Fórmulas de amortización

$$p = \frac{Pr}{k \left[1 - \left(1 + \frac{r}{k} \right)^{-kt} \right]} \quad \text{y} \quad I = kp \left[t - \frac{1 - \left(1 + \frac{r}{k} \right)^{-kt}}{r} \right]$$

A continuación se resolverá el primer problema aplicado que se presenta en la introducción de este capítulo.

EJEMPLO 2

Consumo

Con la finalidad de comprar una casa nueva, una pareja de jóvenes pide un préstamo por 60 000 dólares a una tasa de interés anual de 12%. El monto se ha de reembolsar durante un periodo de 30 años mediante pagos mensuales iguales. ¿A cuánto asciende su pago mensual y cuál es el monto de interés total pagado por el préstamo durante el periodo?

Para encontrar el pago mensual, sustituir P por 60 000, k por 12, r por 0.12 y t por 30 en la primera fórmula de amortización.

$$\begin{aligned} p &= \frac{Pr}{k \left[1 - \left(1 + \frac{r}{k} \right)^{-kt} \right]} = \frac{(60\,000)(0.12)}{12 \left[1 - \left(1 + \frac{0.12}{12} \right)^{-12(30)} \right]} \\ &= 617.17 \end{aligned}$$

El pago mensual es de 617.17 dólares.

La secuencia empleada para calcular p se da abajo.

ALG: 12 \times 30 $=$ \div 0.12 \div 12 $+$ 1 $=$ y^x RCL $=$ \div 1 $=$ \times 12 $=$
 $\frac{1}{x}$ \times 60 000 \times 0.12 $=$ \rightarrow 617.16756

RPN: 12 ENTER 30 \times CHS STO 0.12 ENTER 12 \div 1 $+$ RCL y^x CHS 1 $+$ 12
 \times $\frac{1}{x}$ 60 000 \times 0.12 \times \rightarrow 617.16756

Así, el pago mensual es de 617.17 dólares. Para encontrar el interés total pagado, sustituir los mismos valores para k , r y t , junto con 617.17 para p en la segunda fórmula de amortización.

$$I = kp \left[t - \frac{1 - \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{-kt}}{r} \right]$$

$$= (12)(617.17) \left[30 - \frac{1 - \left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{-(12)(30)}}{0.12} \right]$$

$$= 162\,180.96$$

Durante 30 años, la pareja pagará 162 180.96 dólares de interés.

Crecimiento poblacional

La tasa de crecimiento de una población sobre la cual no influye la falta de alimentos, limitaciones en el espacio para vivir o depredadores puede aproximarse en forma exponencial. El modelo utilizado para describir el número N de organismos en términos de la población inicial I y el tiempo t está dado por la fórmula

$$N = Ie^{kt}$$

donde k se denomina la constante de crecimiento. En efecto, el crecimiento poblacional es otra aplicación de la composición continua, y se le llama **modelo Maltusiano** en honor de Thomas Malthus quien, en el siglo XVIII, hizo observaciones y predicciones importantes acerca de las poblaciones crecientes. El valor de k es el porcentaje de crecimiento por unidad de tiempo t .

EJEMPLO 3

Demografía

¿En cuánto tiempo se duplicará la población actual de los Estados Unidos si continúa creciendo a un tasa anual de 0.9%?

Si I es la población inicial de los Estados Unidos, debe encontrarse t cuando $N = 2I$ y $k = 0.009$ en la fórmula $N = Ie^{kt}$.

$$2I = Ie^{0.009t}$$

$$2 = e^{0.009t} \quad \text{dividir ambos lados por } I$$

$$\ln 2 = \ln e^{0.009t} \quad \text{tomar el logaritmo$$

$$\ln 2 = 0.009t \quad \text{usando la propiedad de los logaritmos$$

Así,

$$t = \frac{\ln 2}{0.009} \approx 77 \text{ años.}$$

EJEMPLO 4

Demografía

Suponer que la población de West, Texas, era de 385 habitantes en 1960 y de 510 en 1970. Si el crecimiento poblacional de West puede aproximarse mediante el modelo Maltusiano, encontrar el valor de k (con una exactitud de tres cifras decimales) y utilizando para determinar el número de habitantes que tendrá en el año 2000.

Cuando $t = 0$, la población inicial I es 385. Cuando $t = 10$, la población es 510. Con esta información puede encontrarse el valor de la constante de crecimiento k .

$$510 = 385e^{k(10)}$$

$$\left[\frac{510}{385} \right]^{1/10} = e^k$$

Así,

$$k = \ln \left[\frac{510}{385} \right]^{1/10} \approx 0.028.$$

Haciendo uso de este valor de k , puede calcularse la población cuando $t = 40$.

$$N = 385e^{(0.028)(40)} \approx 1\,180$$

En el año 2000, West tendrá una población de aproximadamente 1 180 habitantes.

Decaimiento radioactivo

Las sustancias radioactivas emiten radiación (partículas alfa, beta y rayos gama) a una tasa que depende de la cantidad de material radioactivo que queda en la sustancia. Al emitir radiación una sustancia, la estructura atómica de la sustancia se transforma gradualmente de modo que el uranio, por ejemplo, se transforma en torio, radio y, al final, en plomo. Ya que la tasa de transformación se reduce al disminuir la cantidad de material radioactivo presente, no es posible determinar teóricamente el tiempo requerido para que el material decaiga por completo. Sin embargo, sí es posible encontrar la **vida media** de una sustancia, el tiempo necesario para que la mitad de la sustancia decaiga. La cantidad A de material radioactivo que queda de una cantidad inicial I , en un tiempo t determinado, puede aproximarse mediante

donde k es una constante negativa determinada por la naturaleza particular del material.

EJEMPLO 5

Química

Los reactores nucleares utilizan estroncio 90 radioactivo como combustible. Si la desintegración radioactiva del estroncio 90 puede aproximarse mediante

$$A = Ie^{-0.025t},$$

determinar su vida media.

Se debe resolver la ecuación para t cuando $A = 0.5I$.

$$0.5I = Ie^{-0.025t}$$

$$0.5 = e^{-0.025t}$$

$$\ln 0.5 = \ln e^{-0.025t}$$

$$\ln 0.5 = -0.025t$$

$$\text{Así, } t = \frac{\ln 0.5}{-0.025} \approx 27.7 \text{ años.}$$

El carbono-14 (C^{14}) radioactivo, un isótopo presente en la atmósfera, es absorbido por todos los organismos vivos a través de la aspiración de dióxido de carbono. El nivel de carbono 14 en el organismo permanece relativamente constante mientras está con vida. Sin embargo, una vez que el organismo muere, el carbono 14 ya no se absorbe y empieza el proceso lento de decaimiento. Los arqueólogos utilizan la disminución de carbono 14 después de la muerte de un organismo para fechar artefactos muy antiguos mediante un proceso llamado **determinación de antigüedad por carbono**. La cantidad A de carbono 14 aún presente después de t años se aproxima mediante la fórmula

donde I es la cantidad original presente.

EJEMPLO 6

Arqueología

En 1980 se encontró una herramienta hecha de hueso en una zona arqueológica cerca de Page, Arizona. Se determinó que alrededor de 85% del carbono 14 original aún estaba presente. Aproximadamente, ¿cuándo fue fabricada la herramienta?

Ya que 85% del carbono 14 seguía presente, se debe despejar t de la siguiente ecuación.

$$0.85I = Ie^{-0.000125t}$$

$$0.85 = e^{-0.000125t}$$

$$\ln 0.85 = \ln e^{-0.000125t}$$

$$\ln 0.85 = -0.000125t$$

$$t = \frac{\ln 0.85}{-0.000125} \approx 1\,300 \text{ años}$$

La herramienta se fabricó alrededor de 1 300 años antes de 1980, es decir, en el año 680 de la Era Cristiana.

Magnitudes sísmicas

Durante años, los geólogos intentaron ponerse de acuerdo sobre una escala para medir la magnitud de un sismo. En la actualidad, la escala utilizada con mayor frecuencia se denomina **escala de Richter**, en honor del sismólogo estadounidense Charles Richter. Para establecer la escala, un sismo de referencia con un nivel

de cero se definió como cualquier temblor de tierra con una onda sísmica no más grande que 0.001 mm registrada en un sismógrafo colocado a 100 km del epicentro del sismo. La **magnitud** de un sismo está dada por

donde A es la medida de la onda sísmica del temblor de tierra y A_0 es la medida de la onda sísmica de un temblor de tierra con un nivel de cero con el mismo epicentro. La razón $\frac{A}{A_0}$ se denomina **intensidad** del sismo.

EJEMPLO 7

Geología

El sismo más fuerte que se ha registrado ocurrió en 1906 en América del sur y fue $10^{8.9}$ veces más fuerte que un sismo con un nivel de cero. ¿Cuál fue la magnitud de este sismo en la escala de Richter?

Ya que $A = 10^{8.9}A_0$,

$$\begin{aligned} M &= \log \frac{A}{A_0} = \log \frac{10^{8.9}A_0}{A_0} \\ &= \log 10^{8.9} = 8.9. \end{aligned}$$

La magnitud del sismo fue de 8.9 en la escala de Richter.

Intensidad del sonido

Poco después de que Alexander Graham Bell inventó el teléfono, se hizo evidente que era necesario algún medio para medir la intensidad de la señal. La unidad de medida se llamó *bel* en su honor. Una décima de un bel, o **decibel**, es aproximadamente la intensidad más baja de sonido que el oído humano puede detectar. Se ha determinado que el umbral de la audición humana se cruza cuando una onda sonora produce aproximadamente $S_0 = 10^{-12}$ watt/m². Esto, entonces, es el nivel nulo para decibeles. Si S es el número de watt/m² producido por una onda sonora particular, la intensidad del sonido en decibeles está dada por

Como marco de referencia, un murmullo mide alrededor de 20 decibeles un balazo mide alrededor de 100 decibeles y los sonidos que miden más de 125 decibeles pueden causar dolor.

A continuación se resolverá el segundo problema aplicado presentado en la introducción de este capítulo.

EJEMPLO 8

Audiología

Por lo general, los especialistas en audición están de acuerdo en que la exposición continua a un nivel de sonido superior a 90 decibeles por más de cinco horas diarias puede causar, a largo plazo, problemas de

audición. Si un estudiante escucha un estéreo portátil a través de audífonos que produce una intensidad de 2×10^{-3} watt/m² durante largos periodos diariamente, ¿hay un peligro potencial para su oído?

Debe encontrarse D cuando $S = 2 \times 10^{-3}$ watt/m² y $S_0 = 10^{-12}$ watt/m².

$$\begin{aligned} D &= 10 \log \frac{S}{S_0} = 10 \log \frac{2 \times 10^{-3}}{10^{-12}} \\ &= 10 \log (2 \times 10^9) \\ &\approx 93 \quad \text{decibeles} \end{aligned}$$

Así, hay peligro potencial de pérdida del oído si la exposición al sonido estereofónico es prolongada.

En varios ejemplos se hizo la conversión de una escala absoluta de medición a una escala logarítmica más manejable. Los números en una escala absoluta desde $1 = 10^0$ hasta $10\,000\,000\,000 = 10^{10}$ se correlacionan con los logaritmos comunes en una escala de 0 a 10.

5.6. Ejercicios

Administración. En los ejercicios 1-10 utilizar la fórmula de interés compuesto para k periodos de composición, la fórmula de interés compuesto para composición continua o una de las dos fórmulas de amortización para resolver cada problema.

- Suponer que se efectúa un depósito de 1 000 dólares en una cuenta que paga una tasa de interés anual de 9%. ¿Cuál es el valor de la cuenta al final de cuatro años si la composición es a) anual, b) semestral, c) trimestral, d) mensual, e) semanal (considere 52 semanas por año), f) diaria (considere 365 días por año) y g) continua?
- Repetir el ejercicio 1 si la tasa de interés es 10% y el número de años es cinco.
- ¿En cuánto tiempo se duplicará un monto de dinero si se invierte a una tasa de interés de 12% compuesto anualmente?
- ¿En cuánto tiempo se triplicará un monto de dinero si se invierte a una tasa de interés de 9% compuesto anualmente?
- ¿En cuánto tiempo se duplicará un monto de dinero si se invierte a una tasa de interés de 12% compuesto semestralmente?
- ¿En cuánto tiempo se triplicará un monto de dinero si se invierte a una tasa de interés de 9% compuesto semestralmente?
- ¿En cuánto tiempo se duplicará un monto de dinero si se invierte a una tasa de interés de 12% compuesta continuamente?
- ¿En cuánto tiempo se triplicará un monto de dinero si se invierte a una tasa de interés de 9% compuesto continuamente?
- Consumo.** Jaime Salinas compró una vagoneta y un vehículo de remolque para acampar. Para ello pidió un préstamo de 18 000 dólares a una tasa de interés anual de 12%, debe reembolsar el monto total durante cinco años en pagos mensuales iguales. ¿A cuánto asciende su pago mensual y cuál es el monto del interés total pagado durante el periodo sobre el préstamo?
- La familia López pidió un préstamo de 45 000 dólares para comprar una casa de vacaciones. Si el plazo del préstamo es de 20 años y la tasa de interés anual es de 10%, ¿a cuánto asciende su pago mensual y cuál es el monto del interés a pagar durante el periodo de 20 años?

En los ejercicios 11-18 utilizar el modelo Maltusiano $N = Ie^{kt}$ para resolver cada problema.

11. **Demografía.** La población de una ciudad está creciendo a una tasa anual de 2.1%. ¿En cuánto tiempo se duplicará la población?
12. **Demografía.** ¿En cuánto tiempo se triplicará la población de una pequeña nación antillana si su tasa de crecimiento anual es de 1.8%?
13. **Demografía.** La población de los Estados Unidos era de 237 millones en 1985. Si la tasa de crecimiento anual es aproximadamente de 0.9%, ¿cuál será su población en el año 2000?
14. **Biología.** Se estima que la población de roedores en un pueblo fronterizo es de 75 000 y que está decreciendo a una tasa anual de 12%. ¿Cuándo llegará la población a 1 millón?
15. **Ecología.** Se estima que una especie de antilope africano en peligro de extinción tiene una población de 8 000 y que está decreciendo a una tasa de 6.2% por año. ¿En cuántos años la población disminuirá a 2 000?
16. **Economía.** Cuando la autopista interestatal libre pasó a un lado de un pequeño poblado en Arizona, la población empezó a decrecer desde 12 000 residentes a una tasa anual de 4.1%. ¿En cuántos años la población será de 8 000?
17. **Demografía.** La población de Alpine, Colorado, era de 800 en 1960 y 1 150 en 1980. Suponiendo la misma tasa de crecimiento, encontrar el valor de k (con una exactitud de tres cifras decimales) y utilizarlo para predecir la población de Alpine en el año 2 000.
18. **Demografía.** Se calcula que la población del suroeste de Estados Unidos se duplique en 30 años. ¿Cuál será la tasa de crecimiento anual aproximada de esta región?

Química. Utilizar la fórmula de decaimiento radioactivo, $A = Ie^{kt}$, para resolver los ejercicios 19-26.

19. Cierta isótopo radioactivo decae de acuerdo con la ecuación $A = Ie^{-0.03t}$, donde t se mide en años. Determinar la vida media de este isótopo.
20. Determinar la vida media del carbono 14 si su decaimiento radioactivo está dada por la fórmula $A = Ie^{-0.000125t}$.
21. La vida media del radio radioactivo es de aproximadamente 1 650 años. ¿Cuántos años se requerirá para que una cantidad determinada de radio decae hasta tres cuartas partes de esa cantidad?
22. Un isótopo de torio tiene una vida media de aproximadamente 8.5 días. ¿En cuánto tiempo decaerá 75% de una cantidad determinada de ese isótopo?
23. **Arqueología.** Se descubre una máscara mortuoria de madera en un cementerio antiguo. Si aún tiene 55% del carbono-14 ($k = -0.000125$) que originalmente contenía, ¿cuál es la edad aproximada de la máscara?
24. **Arqueología.** Se descubrieron los restos momificados de una mujer en 1960 en una cueva en Texas. Si aproximadamente 73% del carbono-14 ($k = -0.000125$) original estaba todavía presente en la momia, ¿aproximadamente en qué año murió?
25. **Medicina.** Un isótopo radioactivo con una vida media de 3.2 horas se utiliza como indicador en una prueba médica. Si se inyectan 30 miligramos en el sistema a las 9:00 horas, ¿cuántos miligramos permanecerán en el sistema a las 18:00 horas del mismo día?
26. **Meteorología.** Un isótopo radioactivo se utiliza para proporcionar energía a una estación meteorológica en una localidad remota. Si la tasa de decaimiento reduce la energía 0.025% por día, ¿cuántos días la estación será funcional si se vuelve inoperante cuando la energía alcanza un nivel de 40% del aprovisionamiento original?

Geología. En los ejercicios 27-30 utilizar la fórmula para determinar la magnitud de un sismo, $M = \log \frac{A}{A_0}$.

27. En 1983, un sismo en California fue 2 511 890 veces más fuerte que un sismo de referencia con un nivel de cero. ¿Cuál fue la magnitud del sismo en California?

28. El sismo de San Francisco en 1906 fue 1.995×10^8 veces más fuerte que un sismo de referencia con un nivel de cero. ¿Cuál fue la magnitud del sismo de San Francisco?
29. Si la magnitud de un sismo fue 7.2 en la escala de Richter, ¿cuál fue la intensidad del sismo?
30. La magnitud de un sismo en México fue 7.8 en la escala de Richter. Catorce años después otro sismo midió 4.8 en la misma escala. ¿Cuántas veces fue más intenso el primer sismo que el segundo?

Audiología. En los ejercicios 31-36 utilizar la ecuación del sonido $D = 10 \log \frac{S}{S_0}$, donde $S_0 = 10^{-12}$ watt/m² es el umbral del oído humano.

31. Si el nivel de conversación en un restaurante produce 4.15×10^{-6} watt/m² de intensidad, ¿cuál es este nivel en decibeles?
32. Cuando despegua un avión de reacción, el ruido produce 0.5 watt/m² de intensidad. ¿Cuál es el nivel de decibeles de este ruido?
33. ¿Cuál es la intensidad en watt/m² de un ruido que registra 60 decibeles?
34. La intensidad de un sonido es 2.5×10^{-3} watt/m². Si se duplica la intensidad, ¿se duplica también el nivel en decibeles?
35. La intensidad de un sonido es 4.6×10^{-7} watt/m². Si la intensidad se multiplica por 100, ¿se multiplica también por 100 el nivel en decibeles?
36. Un sonido que mide 125 decibeles puede causar dolor al oído humano. ¿Cuál es la intensidad aproximada de tal sonido en watt/m²?

1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213, 2214, 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224, 2225, 2226, 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2249, 2250, 2251, 2252, 2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270, 2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279, 2280, 2281, 2282, 2283, 2284, 2285, 2286, 2287, 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297, 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314, 2315, 2316, 2317, 2318, 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325, 2326, 2327, 2328, 2329, 2330, 2331, 2332, 2333, 2334, 2335, 2336, 2337, 2338, 2339, 2340, 2341, 2342, 2343, 2344, 2345, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2351, 2352, 2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365, 2366, 2367, 2368, 2369, 2370, 2371, 2372, 2373, 2374, 2375, 2376, 2377, 2378, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2385, 2386, 2387, 2388, 2389, 2390, 2391, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 2397, 2398, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2412, 2413, 2414, 2415, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2421, 2422, 2423, 2424, 2425, 2426, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2436, 2437, 2438, 2439, 2440, 2441, 2442, 2443, 2444, 2445, 2446, 2447, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455, 2456, 2457, 2458, 2459, 2460, 2461, 2462, 2463, 2464, 2465, 2466, 2467, 2468, 2469, 2470, 2471, 2472, 2473, 2474, 2475, 2476, 2477, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2483, 2484, 2485, 2486, 2487, 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2520, 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529, 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558, 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564, 2565, 2566, 2567, 2568, 2569, 2570, 2571, 2572, 2573, 2574, 2575, 2576, 2577, 2578, 2579, 2580, 2581, 2582, 2583, 2584, 2585, 2586, 2587, 2588, 2589, 2590, 2591, 2592, 2593, 2594, 2595, 2596, 2597, 2598, 2599, 2600, 2601, 2602, 2603, 2604, 2605, 2606, 2607, 2608, 2609, 2610, 2611, 2612, 2613, 2614, 2615, 2616, 2617, 2618, 2619, 2620, 2621, 2622, 2623, 2624, 2625, 2626, 2627, 2628, 2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634, 2635, 2636, 2637, 2638, 2639, 2640, 2641, 2642, 2643, 2644, 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654, 2655, 2656, 2657, 2658, 2659, 2660, 2661, 2662, 2663, 2664, 2665, 2666, 2667, 2668, 2669, 2670, 2671, 2672, 2673, 2674, 2675, 2676, 2677, 2678, 2679, 26

Resolver cada ecuación en los ejercicios 37-40.

37. $5^{2x} = 7^{x+1}$
38. $\log_2(x+3) + \log_2(x-4) = 3$
39. $(\log x)^2 = \log x^5$
40. $|\ln x| = 5$

En los ejercicios 41-42 encontrar el valor de x con una exactitud de cuatro cifras decimales.

- 41.** $x = \log 4\,820\,000$ **42.** $x = \ln (-0.0045)$

En los ejercicios 43-44 encontrar el valor de x con una exactitud de tres cifras significativas.

- 43.** $\log x = -9.4994$
- 44.** $\ln x = 13.2317$
- 45.** Utilizar las propiedades de los logaritmos para escribir $\ln \frac{x\sqrt{y}}{z^4}$ como suma, diferencia o múltiplo de logaritmos.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 5

1. Si a es cualquier base para logaritmos, ¿cuál es el valor de a) $\log_a a$ y b) $\log_a 1$?
2. Convertir $2^x = 5$ a la forma logarítmica.
3. Convertir $\log_3 a = w$ a la forma exponencial.

Resolver cada ecuación en los ejercicios 4-5.

4. $\log_a 64 = 3$ 5. $125^x = 5$

6. Para cualquier base a y cualquier número real positivo x , simplificar $a^{\log_a x}$.

7. Para cualquier base a y cualquier número real x , simplificar $\log_a a^x$.

En los ejercicios 8-10 dibujar la gráfica de cada función.

8. $f(x) = -3^x$

9. $f(x) = e^{-x^2}$

10. $f(x) = \log_5(-x)$ for $x < 0$

En los ejercicios 11-12 utilizar una calculadora para aproximar cada número con una exactitud de cuatro cifras decimales.

11. $(\sqrt{5})^\pi$

12. $(1.02)^{-50}$

En los ejercicios 13-16 evaluar cada logaritmo dado que $\log_a 3 = 0.5283$ y $\log_a 7 = 0.9358$.

13. $\log_a 21$

14. $\log_a \frac{14}{6}$

15. $\log_a \left(\frac{7}{3}\right)^{3/2}$

16. $\log_3 7$

En los ejercicios 17-18 utilizar las propiedades de los logaritmos para escribir cada logaritmo como una suma, diferencia o múltiplo de logaritmos:

17. $\log_a \left(\frac{xy}{z}\right)^{2/3}$

18. $\log_a y^5 \sqrt[3]{\frac{x^2}{z^2}}$

En los ejercicios 19-20 utilizar las propiedades de los logaritmos para escribir cada expresión con un solo logaritmo.

19. $3 \log_a xy + \frac{1}{2} \log_a z$

20. $2 \log_a (x^2 - y^2) - \log_a (x + y)$

En los ejercicios 21-22 determinar si la ecuación dada es cierta o falsa.

21. $\log_a (u + v) = \log_a u + \log_a v$

22. $\log_a \frac{u}{a} = \log_a u - 1$

Encontrar cada logaritmo en los ejercicios 23-24.

23. $\ln (2.58 \times 10^{-7})$

24. $\log_2 0.0425$

Encontrar cada antilogaritmo en los ejercicios 25-26.

25. $\log x = -8.6219$

26. $\ln x = 41.6219$

Resolver cada ecuación en los ejercicios 27-34.

27. $81^{x-2} = 9^{x+5}$

28. $\log_2 (3x + 1) + \log_2 (x - 1) = \log_2 (10x + 14)$

29. $\log_3 (8x + 1) - \log_3 (x - 7) = 3$

30. $7^{x-5} = 3^{x+7}$

31. $(1.05)^x (1.02)^{2x} = 1\,000$

32. $\log_2 16^{2x+1} = 8$

33. $(\log_5 x)(\log_2 x) = \log x$

34. $\ln (\ln x) = 0$

35. **Biología.** El número de bacterias N en un cultivo está dado en términos del tiempo t , en horas, por $N = (3\,000)2^t$.

a) ¿Cuántas bacterias están presentes en seis horas? b) ¿En cuántas horas el número de bacterias llegará a 3 072 000?

36. **Física.** La presión atmosférica P , en libras por pulgada cuadrada, se aproxima mediante $P = 14.7e^{-0.2x}$, donde x es la altitud del objeto sobre el nivel del mar en millas. a) ¿cuál es la presión sobre un objeto a 6 millas de altura? b)

Una lectura de presión de 4.89 lb/in² se toma en la superficie de un avión. ¿A qué altitud está el avión?

37. **Administración.** La ecuación de demanda para x unidades de un producto con respecto al precio por unidad P está dada por $P = 1\,000 - 0.5e^{0.003x}$. a) Encontrar el precio si la demanda es de 500 unidades. b) Encontrar la demanda si el precio es 850 dólares.

38. **Química.** El pH de una sustancia está dado por $\text{pH} = -\log [H^+]$, donde $[H^+]$ es la concentración de iones hidrógeno en la solución. a) Encontrar el pH de una bebida mezclada con una concentración de iones hidrógeno de 2.75×10^{-7} mols por litro. b) Encontrar la concentración de iones hidrógeno del agua de un lago que tiene un pH de 5.1.

- 39. Astronomía.** La magnitud limitante L de un telescopio se relaciona con el diámetro d de la lente mediante $L = 8.8 + 2.2 \ln d$. a) ¿Cuál es la magnitud limitante de un telescopio con una lente de 3.5 in? b) ¿Cuál es el diámetro de la lente de un telescopio con una magnitud limitante de 13?
- 40. Medicina.** La cantidad de una droga que queda en el sistema circulatorio x horas después de haberse tomado una dosis de 15 mg se aproxima mediante $A = 15e^{-0.25x}$. a) ¿Qué cantidad de droga permanece en el sistema después de cuatro horas? b) Para que la droga sea efectiva, en el sistema debe haber al menos 10 mg de ella. ¿Cuánto tiempo será efectiva la dosis?
- 41. Psicología.** La fórmula $D = 75 - 15 \ln(x + 1)$ proporciona la disminución promedio de una calificación en un examen cuando la prueba se repitió en intervalos de un mes. a) ¿Cuál fue la calificación promedio seis meses después de haberse aplicado el primer examen? b) ¿Después de cuántos meses la calificación promedio cayó por debajo de 30?
- 42. Física.** Un objeto colocado en un cuarto a temperatura constante de 72°F se enfría de 130°F a 105°F en 10 minutos. Encontrar el valor de la constante k (con tres cifras decimales) en ley de enfriamiento de Newton, $T = T_c + (T_0 - T_c)e^{-kt}$, y utilizarlo para determinar la temperatura del objeto después de 30 minutos.
- 43. Oceanografía.** La intensidad I de un haz de luz disminuye al dirigirse a través del agua de acuerdo con la fórmula $I = I_0e^{-kx}$, donde I_0 es la intensidad de la luz en la superficie del agua y x es la profundidad en ft bajo la superficie. Si la intensidad de un haz de luz se reduce un 50% a 20 ft bajo la superficie, encontrar el coeficiente de extinción k de la luz en el agua.
- 44. Inversión.** Si se efectúa un depósito de 2 000 dólares en una cuenta que paga una tasa de interés anual de 14%, ¿a cuánto asciende el valor de la cuenta después de dos años si la composición es a) semestral, b) mensual, c) continua?
- 45. Inversión.** ¿En cuánto tiempo se cuadruplicará un monto de dinero si se invierte a una tasa de interés de 10% y la composición es continua?
- 46. Administración.** Si se otorga un préstamo de 30 000 dólares a una tasa de interés anual de 12% y debe reembolsarse durante 15 años en pagos mensuales iguales, ¿cuál es el monto de cada pago? ¿A cuánto asciende el interés total a pagar durante el periodo de 15 años?
- 47. Demografía.** Utilizar el modelo Maltusiano $N = Ie^{kt}$ con k calculada con tres cifras decimales, para determinar la población de Winter, Minnesota, en el año 2000, si en 1970 la población era de 25 000 habitantes y en 1980 de 28 000.
- 48. Química.** Utilizar la fórmula de decaimiento radioactivo, $A = Ie^{kt}$, para determinar la vida media de un isótopo radioactivo cuando t se mide en años y $k = -0.0046$.
- 49. Geología.** Un sismo registró una intensidad 2.65×10^5 veces más fuerte que un sismo de referencia con un nivel de cero. Utilizar la fórmula $M = \log \frac{A}{A_0}$ para determinar la magnitud del sismo en la escala de Richter.
- 50. Audiología.** El espectáculo de una banda de rock produce una intensidad de 5.5×10^{-2} watt/m² durante un concierto de cuatro horas. Si la banda toca diariamente, ¿hay un peligro potencial de pérdida del oído para los miembros de la banda?

La palabra trigonometría se deriva de palabras griegas que significan "medición de tres ángulos" o "medición del triángulo". Históricamente, la trigonometría se desarrolló como una herramienta para encontrar las medidas de las partes (lados o ángulos) de un triángulo, a partir de otras partes conocidas del mismo. Como resultado, la trigonometría se hizo indispensable en áreas tales como la navegación y la planimetría. Recientemente el estudio de la trigonometría se hizo indispensable en áreas tales como la navegación y la planimetría. Últimamente el estudio de la trigonometría ha tomado un camino diferente. Aunque las aplicaciones prácticas de los triángulos sigan siendo importantes, el enfoque de la trigonometría en términos de funciones de números reales ha ido aumentando su utilidad. Se ha encontrado un espectro más amplio de aplicaciones en la física, tales como el movimiento armónico y las órbitas de partículas atómicas. A continuación se mencionan dos tipos de problemas que pueden ser resueltos mediante la trigonometría.

Geología

Un geólogo, parado en la orilla del Gran Cañón en Arizona, observa del otro lado la capa de piedra arenosa de Coconino, una formación de aproxima-

damente 350 ft de profundidad. Si la capa de piedra arenosa, de la parte más alta a la base subtiende un ángulo de $00^{\circ}29'$ en relación con el ojo del geólogo, ¿cuál es la distancia aproximada de una orilla del cañón a la otra?

Silvicultura

Un pequeño incendio forestal se divisa al sur de una torre de vigilancia en Woody Mountain. Desde una segunda torre a 11 mi al este de la primera, el fuego se encuentra a $S51^{\circ}10' W$. ¿Qué tan lejos se encuentra el fuego de la primera torre en Woody Mountain?

El primero de estos problemas se puede resolver mediante una fórmula para la longitud de arco (véase el ejemplo 2 en la sección 6.2); y el segundo, usando las propiedades de un triángulo rectángulo (véase el ejemplo 4 en la sección 6.4).

El método que se ha tomado para el estudio de la trigonometría, incluye el tradicional enfoque con triángulos y con funciones de números reales. Se empieza con un análisis de ángulos y medidas angulares y se prosigue con las funciones trigonométricas de ángulos agudos. Se termina considerando las funciones trigonométricas de números reales, sus gráficas y varias identidades fundamentales.

6.1. ÁNGULOS Y MEDIDA ANGULAR

Ángulos

Un **ángulo** se genera al girar una semirrecta o rayo sobre su extremo, llamado **vértice** del ángulo (véase la figura 1). A la posición inicial de rayo, OA , se le llama **lado inicial** del ángulo y a la posición final del rayo, denominada por OB , se le llama **lado terminal**. El símbolo \angle representa a la palabra *ángulo*, y el ángulo es definido por $\angle AOB$.



Figura 1. Ángulo positivo.

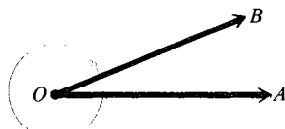


Figura 2. Ángulo negativo.

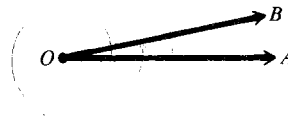


Figura 3. Ángulos coterminales.

Si la rotación del lado terminal de un ángulo se realiza en la dirección opuesta a las manecillas del reloj (como en la figura 1), el ángulo es **positivo**. Si la rotación del lado terminal se realiza en la dirección de las manecillas del reloj (como en la figura 2), el ángulo es **negativo**. En ambos casos una flecha indica la dirección de la rotación. También es posible que el lado terminal haga una rotación completa y continúe, como en la figura 3. Por tanto, las líneas OA y OB pueden ser los lados inicial y terminal de muchos ángulos diferentes, llamados **ángulos coterminales**.

Medición de grados

Si el lado inicial de un ángulo se coloca sobre el eje x (positivo) en un sistema de coordenadas cartesianas, con su vértice en el origen $(0, 0)$, dice-se del ángulo que está en **posición normal**. Entonces, si el lado inicial del ángulo en posición normal hace una revolución completa, de tal manera que quede el lado terminal alineado con el lado inicial, el ángulo que da como resultado tiene una medida de **360 grados**. El símbolo $^\circ$ se usa para representar grados. Un ángulo con medida de 180° se llama **ángulo llano**, y un ángulo con medida de 90° se llama **ángulo recto**. La figura 4 muestra estos ángulos en posición normal, junto con otros ángulos positivos y negativos.

Si un ángulo en posición normal mide entre 0° y 90° , su lado terminal está en el primer cuadrante. Si el ángulo mide entre 90° y 180° , su lado terminal está en el segundo cuadrante, y así sucesivamente. Si el lado terminal se encuentra sobre uno de los ejes de coordenadas, como los ángulos que miden 0° , 90° , 180° y -90° , el ángulo se llama **ángulo cuadrante**. Un ángulo que mide entre 0° y 90° es un ángulo **agudo**, y uno que mide entre 90° y 180° es **obtuso**. Dos ángulos agudos son **complementarios** si la suma de sus ángulos es de 90° , y dos ángulos positivos son **suplementarios** si sus ángulos suman 180° . Los ángulos de 35° y 55° son complementarios, y los de 35° y 145° son suplementarios.

EJEMPLO 1

Encontrar dos ángulos, uno positivo y otro negativo, que sean coterminales con un ángulo de 30° .

La figura 4 f) muestra que el ángulo positivo de 390° es coterminal con el de 30° . El ángulo de -330° también es coterminal con el de 30° . En realidad, para encontrar cualquier ángulo positivo coterminal con uno de 30° podemos sumarle a 30° cualquier múltiplo positivo de 360° . Igualmente, cualquier múltiplo negativo de 360° sumado a 30° dará como resultado un ángulo negativo coterminal. □

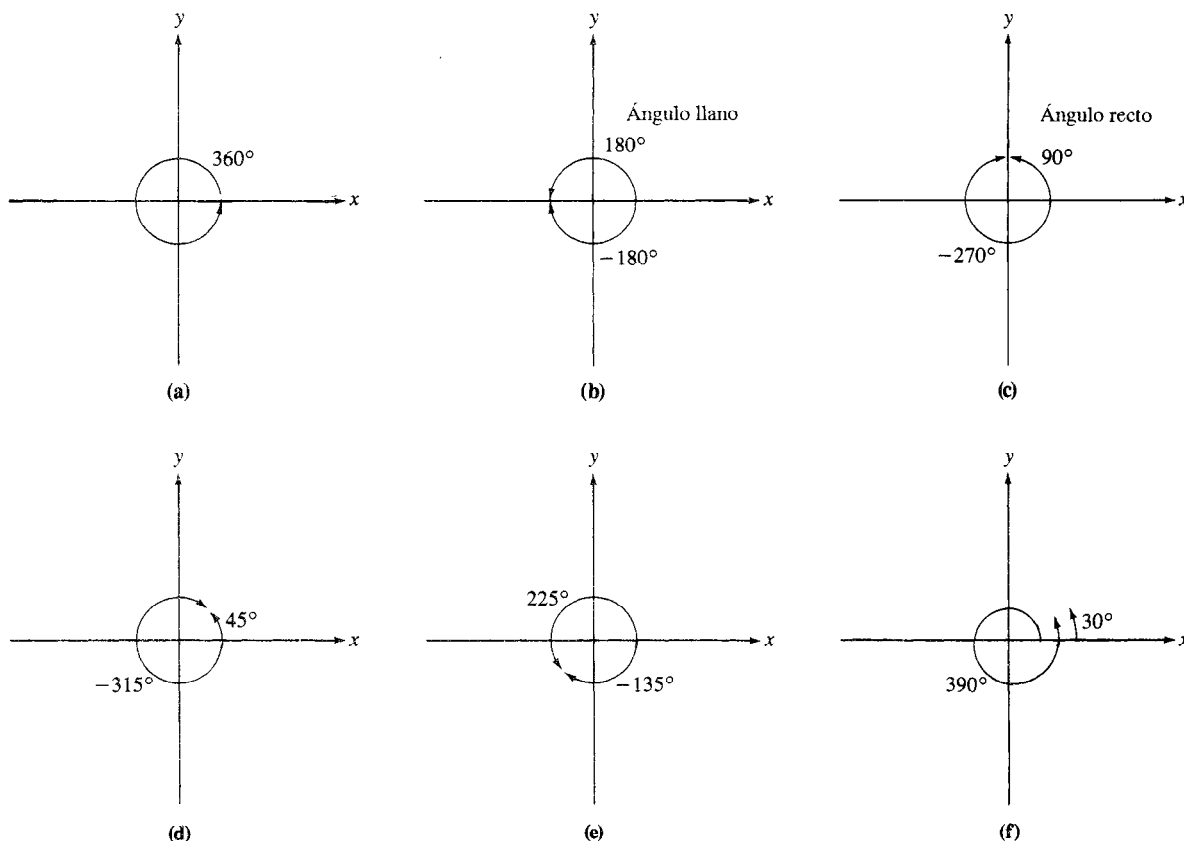


Figura 4. Ángulos en posición normal.

Cuando se requiere más precisión, 1 grado se puede dividir en 60 partes iguales, llamadas **minutos** (denotadas por $'$), y a su vez, un minuto se puede dividir en 60 partes iguales, llamadas **segundos** (denotadas por $''$). Por lo tanto, el ángulo $45^{\circ}15'35''$ mide 45 grados, 15 minutos y 35 segundos. Otra manera de obtener medidas más precisas es expresar el grado con cifras decimales. Como se verá, con el uso de calculadoras este método es a veces más conveniente.

EJEMPLO 2

- a) Expresar $45^{\circ}15'35''$ en grados y la cifra decimal del grado.

Ya que $15' = \frac{15}{60}^{\circ}$, dividiendo esto nos da 0.25. También como $35'' = \frac{35'}{60} = \frac{35^{\circ}}{3\,600}$, dividiendo nos da 0.0097222. Si a estas dos decimales le añadimos 45 nos da el valor requerido. Este valor puede ser obtenido con una calculadora, si empezamos con $35''$, y seguimos estos pasos:

$$\text{ALG: } 35 \div 3\,600 + 15 \div 60 + 45 = \rightarrow 45.259722$$

$$\text{RPN: } 35 \text{ [ENTER]} 3\,600 \div 15 \text{ [ENTER]} 60 \div + 45 + \rightarrow 45.259722$$

Entonces $45^{\circ}15'35'' = 45.26^{\circ}$, aproximado a dos decimales.

- b) Expresar 123.67° usando grados, minutos y segundos.
Para convertir 0.67° a minutos, multiplicamos por 60.

$$(60)(0.67') = 40.2'$$

Para convertir $0.2'$ a segundos, multiplicamos por 60.

$$(60)(0.2') = 12''$$

Entonces, $123.67^\circ = 123^\circ 40' 12''$.

Medida en radianes

Para resolver problemas que incluyan ángulos, lo adecuado es medir los ángulos en grados. Sin embargo, la mayoría de las aplicaciones modernas de trigonometría utilizan una forma alternativa llamada **medida en radianes**. Considérese un círculo con un radio de r con su centro en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas, como en la figura 5. Empezando en el punto A con coordenadas $(r, 0)$, marcar la longitud r al punto B en la dirección contraria a las manecillas del reloj. Una el punto B con el origen formando un ángulo θ (theta; las letras griegas como θ se usan comúnmente para abreviar ángulos como el $\angle AOB$). El **ángulo central** θ es opuesto o **subtendido** por el arco AB que tiene una longitud de r , y mide 1 **radián**. Esto se repite en la definición que se proporciona en el recuadro siguiente.

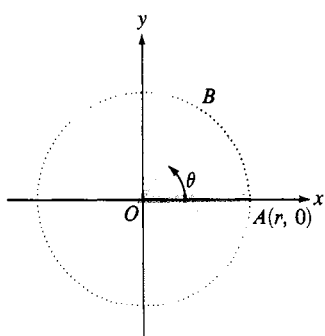


Figura 5. Ángulo con medida de 1 radián.

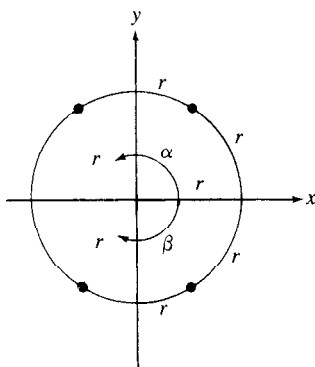


Figura 6. Ángulos que miden 2 y -2 radianes.

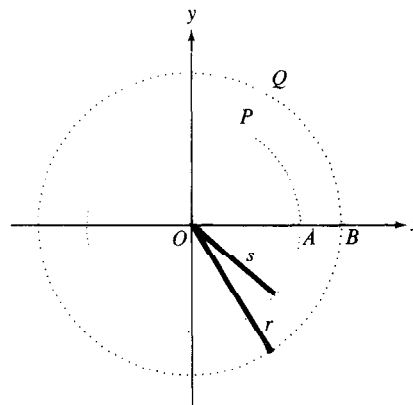


Figura 7. Medida en radianes: círculos diferentes.

Un ángulo con el vértice en el centro de un círculo subtendido por un arco del círculo que es igual en longitud al radio del círculo mide 1 **radián**.

Si dos veces la longitud del radio de un círculo está marcada en dirección levógira el ángulo que subtende el nuevo arco mide 2 radianes. Pero, si dos veces la longitud del radio están marcadas en la dirección de las manecillas del reloj, el ángulo resultante mide -2 radianes. un radián no tiene símbolo y la palabra radián se omite frecuentemente. Por lo tanto, cuando se hable de ángulos que midan 2 y -2 , nos referimos a 2 radianes y a -2 radianes. En la figura 6 se puede ver que $\alpha = 2$ y $\beta = -2$.

Un ángulo de 1 radián es independiente del tamaño del círculo que se use para medirlo. Supóngase que dos círculos concéntricos con radios de r y s están colocados con sus centros en el origen de un sistema de coordenadas como en la figura 7.

El círculo unitario

Puede observarse que el punto P , a s unidades del punto A y el punto Q , a r unidades del punto B , están sobre la misma recta que pasa por el punto O . Así pues, el $\angle POA$ y el $\angle QOB$ son el mismo ángulo con

medida de 1 radián. Por consiguiente, es conveniente enfocar la atención en un **círculo unitario**, un círculo con un radio iguala 1. En un círculo unitario la longitud de un arco es numéricamente igual al número de radianes en el ángulo subtendido por el arco. Ya que un círculo unitario tiene una circunferencia de 2π ($c = 2\pi r$ y $r = 1$), un ángulo que mida 360° subtiende a un arco con longitud de 2π dando como resultado que

Conversión entre grados y radianes

De la misma manera, un ángulo recto con medida de 180° determina un arco con una longitud π , que es igual a la mitad de la circunferencia del círculo. Lo cual da como resultado que

Resolviendo esta ecuación para 1° obtenemos que

y resolviendo para 1 radián tenemos que

Estos resultados se resumen a continuación.

Regla de conversión

1. Para convertir grados a radianes multiplique por $\frac{\pi}{180}$.
2. Para convertir radianes a grados multiplique por $\frac{180}{\pi}$.

EJEMPLO 3

Convertir los siguientes ángulos de radianes a grados.

$$\text{a) } \frac{\pi}{4} \text{ radianes} \qquad \frac{\pi}{4} \text{ radianes} = \frac{\cancel{\pi}}{4} = 45^\circ$$

$$\text{b) } -2\pi \text{ radianes} \qquad -2\pi \text{ radianes} = (-2\cancel{\pi}) = -360^\circ$$

$$\text{c) } 3 \text{ radianes} \qquad 3 \text{ radianes} = 3 = \frac{540^\circ}{\pi} \approx 171.89^\circ$$

EJEMPLO 4

Convertir los siguientes ángulos de grados a radianes.

a) 30° $30^\circ = 30 \cdot \frac{\pi}{180}$ radianes

b) 47° $47^\circ = 47 \cdot \frac{\pi}{180}$ radianes ≈ 0.820 radianes

c) $23^\circ 46' 55''$

Primero convertir $23^\circ 46' 55''$ a decimales.

ALG: $55 \div 3600 + 46 \div 60 + 23 = 23.781944$

RPN: $55 \text{ ENTER } 3600 \div 46 \text{ ENTER } 60 \div + 23 = 23.781944$

Después multiplicar por $\frac{\pi}{180}$.

ALG: $23.781944 \times \pi \div 180 = 0.4150732$

RPN: $23.781944 \pi \times 180 \div = 0.4150732$

Por consiguiente, $23^\circ 46' 55'' \approx 0.4151$ radianes.

6.1. Ejercicios

En los ejercicios 1-8, los ángulos dados, ¿son coterminales?

1. $45^\circ, -45^\circ$

2. $90^\circ, -270^\circ$

3. $\frac{\pi}{6}, \frac{-11\pi}{6}$

4. $\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$

5. $45^\circ, \frac{\pi}{4}$

6. $30^\circ, \frac{\pi}{6}$

7. $390^\circ, \frac{13\pi}{6}$

8. $420^\circ, \frac{-5\pi}{3}$

En los ejercicios 9-12 expresar cada ángulo en grados y decimales de grado, aproximando a centésimas.

9. $38^\circ 41' 13''$

10. $135^\circ 50' 25''$

11. $-52^\circ 35' 21''$

12. $-247^\circ 27' 52''$

En los ejercicios 13-16 expresar cada ángulo utilizando grados, minutos y segundos.

13. 85.42°

14. 135.65°

15. -48.18°

16. -390.76°

En los ejercicios 17-22 convertir cada ángulo de radianes a grados, aproximando a centésimas.

17. 3π

18. $\frac{-\pi}{2}$

19. 7

20. -3.5

21. -1.4236

22. 7.2113

En los ejercicios 23-26 convertir cada ángulo de radianes a grados, minutos y segundos.

23. 5

24. -3

25. -0.8525

26. 6.1135

En los ejercicios 27-32 convertir cada ángulo de grados a radianes (hasta cuatro cifras decimales cuando sea necesario).

27. 60°

28. 270°

29. -120°

30. -135°

31. 38.5°

32. -105.6°

En los ejercicios 33-36 convertir cada ángulo de grados, minutos y segundos a radianes, con una aproximación de cuatro decimales, cuando sea posible.

33. $55^{\circ}20'00''$

34. $-41^{\circ}10'00''$

35. $-110^{\circ}50'28''$

36. $250^{\circ}49'15''$

LONGITUD DE ARCO Y VELOCIDAD ANGULAR

En esta sección se desarrollan fórmulas para encontrar la longitud de un arco en un círculo y para determinar el cambio de un ángulo con respecto al tiempo. Estas fórmulas son de gran utilidad en una variedad de aplicaciones.

Longitud de un arco

Supóngase que s y t son dos arcos en un círculo de radio r que subtienden ángulos θ y ϕ (letra griega fi) respectivamente (véase la figura 8). Un teorema de la geometría plana enuncia que:

$$\frac{s}{t} = \frac{\theta}{\phi}$$

En donde θ y ϕ están medidos en radianes.

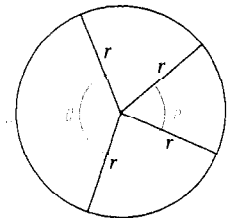


Figura 8. Comparación de arcos.

En el caso especial cuando ϕ mide 1 radián, entonces $t = r$. Sustituyendo tenemos que

$$\frac{s}{r} = \frac{\theta}{1},$$

simplificando, $s = r\theta$. Por tanto se acaba de establecer la siguiente fórmula.

Fórmula de la longitud de un arco

En un círculo de radio r , supongamos que un arco de longitud s , subtiende un ángulo central medido en radianes. Entonces,

$$s = r\theta.$$

PRECAUCIÓN. Cuando se utilice esta fórmula, recordar que θ tiene que estar medido en radianes. Si está en grados, se debe convertir a radianes antes de usar la fórmula.

EJEMPLO 1

Encontrar la longitud de un arco en un círculo cuyo radio sea de 2.3 ft que subtiende un ángulo central de $72^\circ 15'$.

Primero se convierte $15'$ a decimales. Puesto que $\frac{15}{60} = 0.25$, entonces $72^\circ 15' = 72.25^\circ$. Enseguida, se convierte de grados a radianes de acuerdo a los siguientes pasos:

$$\text{ALG: } 72.25 \times \pi \div 180 \rightarrow 1.2610004$$

$$\text{RPN: } 72.25 \text{ [ENTER] } \pi \times 180 \div \rightarrow 1.2610004$$

Ya que $s = r\theta$, se multiplica el número que aparece en la pantalla, θ por 2.3, r .

$$\text{ALG: } 1.2610004 \times 2.3 = \rightarrow 2.9003009$$

$$\text{RPN: } 1.2610004 \times 2.3 \rightarrow 2.9003009$$

La longitud aproximada del arco es de 2.9 ft.

La fórmula de la longitud del arco proporciona una herramienta para resolver el primer problema planteado en la introducción de este capítulo.

EJEMPLO 2

Geología

Un geólogo está parado en la orilla del Gran Cañón de Arizona. El geólogo observa la capa arenisca de Coconino al otro lado del cañón, una formación de aproximadamente 350 ft de altura. Si la capa arenisca, de la parte más alta a la parte más baja, subtiende un ángulo de $00^\circ 29'$ con el ojo del geólogo, ¿cuál es la distancia aproximada de una orilla del cañón a la otra?

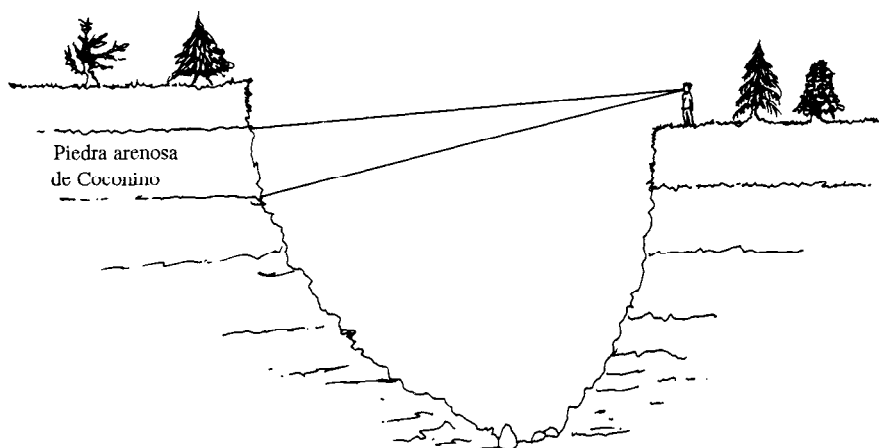


Figura 9

Ver la figura 9 (el dibujo no está a escala). Cuando el ángulo central de un círculo es muy pequeño, la longitud del arco y de la cuerda formada por el arco son casi iguales. En este caso la cuerda es la altura de la

formación arenisca de Coconino. Por consiguiente, para aproximarnos a la solución, se usa la fórmula de la longitud de arco $s = r\theta$. Se tiene que encontrar r cuando $s = 350$ ft y $\theta = 0.0084$ ($00^\circ 29' \approx 0.0084$ rad).

$$r = \frac{s}{\theta} = \frac{350}{0.0084} \approx 41\,667 \text{ ft}$$

Si se divide entre 5 280 para convertir a mi, se tiene que $r \approx 7.9$. El cañón es aproximadamente de 7.9 mi de lado a lado en este punto.

Velocidad lineal y velocidad angular

La fórmula de la longitud de arco puede ser utilizada para obtener una relación entre dos tipos de velocidad, la lineal y la angular. Si un punto se mueve con una **velocidad lineal** constante v durante un espacio de tiempo t , la distancia recorrida, s , está dada por $s = vt$, y la velocidad lineal por $v = s/t$. Si el punto se mueve en un círculo, el radio desde el punto al centro del círculo genera un ángulo θ , y al cambio de θ con respecto al tiempo se le llama **velocidad angular** del punto. Como la longitud del arco está dada por

$$s = r\theta,$$

dividiendo los dos lados de la ecuación entre t , tenemos que

$$\frac{s}{t} = \frac{r\theta}{t} = r \cdot \frac{\theta}{t}.$$

Sea $v = s/t$ (la velocidad lineal del punto), y $a = \theta/t$ (la velocidad angular del punto), se obtiene la siguiente fórmula:

Formula de la velocidad

La velocidad lineal de un punto en movimiento en un círculo de radio r está dada por

$$v = ra$$

en donde a es la velocidad angular, dada en radianes por unidad de tiempo.

Aunque la fórmula de velocidad angular parezca ser simple, debe tenerse cuidado de que todas las unidades de medida concuerden. Como v es distancia lineal por unidad de tiempo, la unidad lineal de v tiene que ser la misma que la unidad de r , y unidad de tiempo v tiene que ser la misma que la unidad de tiempo de a . Así pues, la velocidad angular dada en revoluciones por unidad de tiempo tiene que ser convertida a radianes por unidad de tiempo antes de usar la fórmula de velocidad angular. Puesto que 1 revolución es igual a 2π radianes, multiplicar por 2π .

EJEMPLO 3

Una rueda con un diámetro de 16 cm gira a 12 revoluciones por minuto (rpm). ¿Cuál es la velocidad lineal en cm/seg de un punto en la ceja de la rueda?

Recordar que hay que dividir el diámetro entre 2 para obtener el radio,

$$r = 8 \text{ cm},$$

y recordar también convertir 12 revoluciones por minuto a radianes por segundo.

$$\begin{aligned} a &= 12(2\pi) \text{ radianes por minuto} \\ &= 24\pi \text{ radianes por minuto} \\ &= \frac{24\pi}{60} \text{ radianes por segundo} \end{aligned}$$

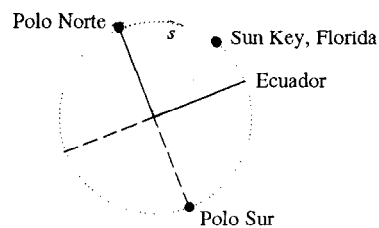
Sustituyendo se tiene

$$\begin{aligned} v = ra &= 8 \cdot \frac{24\pi}{60} \text{ cm/s} \\ &= 3.2\pi \text{ cm/s} \\ &\approx 10.1 \text{ cm/s} \end{aligned}$$

6.2. Ejercicios

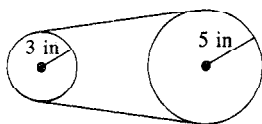
Resolver.

1. Encontrar la longitud del arco de un círculo cuyo radio mide 4.0 cm, el cual subtiende un ángulo central de $\frac{\pi}{3}$.
2. Encontrar la longitud del arco de un círculo cuyo radio mide 5.3 cm, el cual subtiende un ángulo central de 5 rad.
3. Encontrar la longitud del arco de un círculo cuyo diámetro mide 10.00 ft, el cual subtiende un ángulo central de $135^\circ 25'$.
4. Encontrar el radio de un círculo en el cual el ángulo central es de $48^\circ 00'$ y subtiende un arco de 90.00 in.
5. **Ingeniería.** La rueda de una locomotora tiene un diámetro de 5.00 ft. ¿Qué ángulo forma la rueda después de haber avanzado 4.45 ft? (Calcular aproximando al minuto más cercano).
6. **Física.** Si un péndulo con una longitud de 40.0 cm se mueve a $2^\circ 25'$ a cada lado de su posición vertical, ¿cuál es la longitud del arco producido cuando el extremo del péndulo se mueve?
7. **Geografía.** Suponiendo que la Tierra fuera una esfera perfecta con un radio de 4 000 mi, un corte transversal de la Tierra produce un círculo perfecto con un radio de 4 000 mi. Las líneas de latitud son círculos en la superficie de la Tierra que se forman al intersecar la Tierra con planos paralelos al ecuador. Cada línea de latitud se identifica por un ángulo entre 0° y 90° que depende del número de grados en que se encuentra al sur o al norte del ecuador. Por ejemplo, la latitud de Sun Key, Florida es de 28°N (ver la figura de abajo). ¿Qué tan lejos se encuentra Sun Key del polo norte?

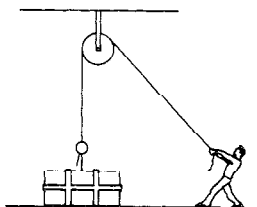


8. **Geografía.** Great Forks, Michigan, tiene una latitud de $44^\circ 10'\text{N}$. ¿Qué tan lejos está Great Forks del ecuador, del polo norte y del polo sur?
9. **Geografía.** Snow Peak, Montana, se encuentra a 3 450 mi del ecuador. Encuentre la latitud de Snow Peak (aproximar al minuto más cercano).

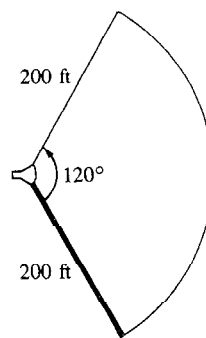
10. **Geografía.** Montreal, Canadá (latitud $45^\circ 40'N$) está al norte de Santiago de Chile (latitud de $35^\circ 20'S$). ¿Qué tan lejos se encuentra Santiago de Montreal?
11. **Recreación.** La llanta de una bicicleta que mide 30 in (de diámetro) recorre una milla. ¿Cuántas revoluciones da la llanta? (aproximar a la revolución más cercana)
12. **Recreación.** Las llantas del cochecito de un niño miden 14 in (de diámetro). Aproximando a la revolución más cercana, ¿cuántas revoluciones da la llanta cuando el cochecito recorre media milla?
13. **Ciencia forestal.** Desde el ojo de un guardabosque, un árbol a 1 000 ft de distancia subtende un ángulo de 2.5° . ¿Cuál es la altura aproximada del árbol?
14. **Astronomía.** Un astrónomo mide el ángulo subtendido por el ancho del sol y obtiene que es 0.5° . ¿Cuál es el diámetro aproximado del sol, si la distancia entre éste y la tierra es de 9.3×10^7 mi?
15. **Astronomía.** Supóngase que la tierra es estacionaria y que la luna se mueve en una órbita circular con un radio de 240,000 mi alrededor de la Tierra. ¿Qué distancia recorre la luna cuando una recta que la une con la Tierra produce un ángulo de 30° ?
16. **Ingeniería.** Una polea con un radio de 3 in está conectada a otra polea con un radio de 5 in por medio de una banda. Suponiendo que no se resbalan, ¿cuántas vueltas dará la polea más pequeña si la grande da una vuelta?



Ejercicio 16



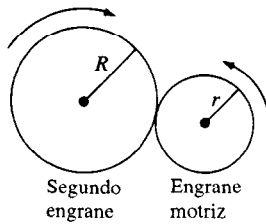
Ejercicio 17



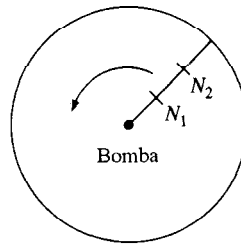
Ejercicio 20

17. **Ingeniería.** Un hombre tira de una cuerda de 15 ft de largo sobre una polea de 16 in de diámetro para levantar una jaula de metal. ¿Cuántas vueltas, aproximadamente, da la polea suponiendo que no se resbala la cuerda?
18. **Navegación.** La mayoría de las formas de navegación usan *millas náuticas* en vez de *millas* (5280 ft). Una milla náutica es la longitud de un arco en la superficie de la Tierra subtendido por un ángulo central de $1'$. Suponiendo que el radio de la Tierra es de 4 000 mi, ¿cuál es la longitud aproximada de una milla náutica en pies?
19. **Geometría.** A y B son dos puntos en un círculo con su centro en O y con un radio r . El sector AOB es la región definida por el arco \widehat{AB} y por los dos radios OA y OB . Si el ángulo central, $\angle AOB$, mide θ radianes, demostrar que el área de este sector está dada por $A = \frac{1}{2}r^2\theta$.
20. **Física.** Una lámpara de emergencia tiene un alcance de 200 ft y produce una luz en un ángulo de $\frac{2\pi}{3}$ rad. Aproximadamente, ¿cuántos pies cuadrados se iluminan?
21. **Ingeniería.** Una rueda con un diámetro de 30 in gira a 5 radianes por segundo. ¿Cuál es la velocidad lineal de un punto sobre la orilla de la rueda, en pies por segundo?
22. **Recreación.** Un niño sentado en el caballito exterior de un carrusel está a 15.0 ft del centro del mismo. Si el carrusel da vueltas a 12 rpm, ¿a qué velocidad, en pies por segundo, se mueve el niño?

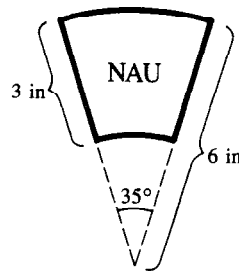
23. **Ingeniería.** Una rueda de 6.0 ft de diámetro da vueltas a 30 rpm. Encuentre, en pies por segundo, la velocidad de la banda que mueve a la rueda, suponiendo que ésta no se resbala.
24. **Ingeniería.** Una polea de 12 in de diámetro es conducida por una banda que se mueve a 2 000 ft/min. ¿Cuántas revoluciones por minuto da la polea?
25. **Geografía.** Encontrar la velocidad lineal generada por la rotación de la tierra de un punto cercano al río Amazonas que está ubicado en el ecuador. Considérese como el radio del ecuador 4 000 mi y exprese el resultado en mi por hora, aproximado a la mi más cercana.
26. **Ingeniería.** Un engrane de radio r mueve a un segundo engrane de radio R . Demuestre que la velocidad angular del segundo engrane es de r/R por la velocidad angular del primer engrane motriz. Ver la figura.



Ejercicio 26



Ejercicio 27



Ejercicio 28

27. **Agricultura.** El brazo es un sistema irrigador circular (ver dibujo) de una granja en Kansas da vueltas alrededor de una bomba completando una vuelta cada 5 horas. Si las distancias de la bomba a las dos salidas de agua N_1 y N_2 , son 50 yd y 75 yd, respectivamente, ¿cuál es la velocidad lineal de cada salida de agua en yardas por minuto?
28. **Manufactura.** Una compañía produce parches con un escudo para un equipo. Recibe un pedido de 500 parches para el club NAU. Si cada parche se hace como lo indica el dibujo, con un borde dorado cosido alrededor, ¿cuántos pies de borde dorado se necesitarán para cumplir con el pedido?

29. Convertir 4.5 radianes a grados, minutos y segundos.
30. Convertir $-85^\circ 42' 18''$ a radianes, aproximado a cuatro cifras decimales.

Triángulos rectángulos

En la sección 6.1 se desarrollan dos maneras diferentes para medir ángulos, grados y radianes. Ahora se puede definir seis funciones trigonométricas para un ángulo agudo de un triángulo rectángulo. Un **triángulo rectángulo**, es aquél que tiene un ángulo recto (90°); el lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa** del triángulo. Los dos ángulos restantes son ángulos agudos complementarios, y a los lados opuestos a estos ángulos se les llaman catetos del triángulo.

Comúnmente se distinguen los ángulos del triángulo con letras mayúsculas. Los lados del triángulo se distinguen con letras minúsculas correspondientes a la letra del ángulo opuesto al lado. Por ejemplo el triángulo rectángulo mostrado en la figura 10 tiene ángulos A , B y C y lados a , b y c . Se coincide (a no ser que se diga lo contrario) en que se identificará el ángulo recto del triángulo con la letra C (el símbolo \perp se usa para denotar un ángulo recto). El cateto opuesto a A es a , y el cateto **adyacente** a A es b .

B

$A + B = 90^\circ$
 $C = 90^\circ$
 c es la hipotenusa
 a es opuesto a A
 b es adyacente a A
 b es opuesto a B
 a es adyacente a B



Figura 10. Triángulo rectángulo.

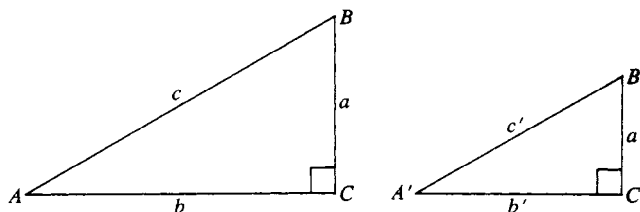


Figura 11. Triángulos rectángulos semejantes.

Triángulos rectángulos semejantes

Dos triángulos son semejantes si los ángulos de un triángulo son iguales a los ángulos correspondientes del otro triángulo. Como resultado, dos triángulos son semejantes si el ángulo agudo de uno de los triángulos es igual al ángulo agudo del otro triángulo. Un teorema en geometría del plano establece que si se trata de triángulos semejantes, los lados correspondientes a los triángulos son proporcionales. Supóngase que se tienen dos triángulos semejantes ABC y $A'B'C'$ como se muestra en la figura 11. Entonces $a/c = a'/c'$, $b/c = b'/c'$, $a/b = a'/b'$, $b/a = b'/a'$, $c/b = c'/b'$, $c/a = c'/a'$.

Las seis funciones trigonométricas

A las seis razones posibles entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo se les da un nombre en particular relativo al ángulo agudo A . Ya que las seis razones son independientes al tamaño del triángulo rectángulo que contiene a A , estas razones pueden ser usadas para definir seis **funciones trigonométricas** relacionadas con un ángulo del triángulo. Estas funciones son: **seno**, **coseno**, **tangente**, **cotangente**, **secante** y **cosecante**.

Las seis funciones trigonométricas

Sea A un ángulo agudo del triángulo rectángulo ABC (véase la figura 12).

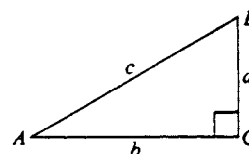


Figura 12

Nombre de la función	Abreviatura	Valor de la función para A
- seno	- sen	$\text{sen } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$
- coseno	- cos	$\text{cos } A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$
- tangente	- tan	$\text{tan } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$
- cotangente	- cot	$\text{cot } A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a}$
- secante	- sec	$\text{sec } A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{b}$
- cosecante	- csc	$\text{csc } A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{a}$

Ya que $\operatorname{sen} A = \frac{a}{c}$ y $\operatorname{csc} A = \frac{c}{a}$

$\operatorname{sen} A$ y $\operatorname{csc} A$ son recíprocas. O sea que,

$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{1}{\operatorname{csc} A}$$

y

$$\operatorname{csc} A = \frac{c}{a} = \frac{1}{\frac{a}{c}} = \frac{1}{\operatorname{sen} A}.$$

Así mismo, $\cos A = 1/\sec A$ y $\sec A = 1/\cos A$, y también $\tan A = 1/\cot A$ y $\cot A = 1/\tan A$. Así que,

seno y cosecante son recíprocas,
coseno y secante son recíprocas,
tangente y cotangente son recíprocas.

Ya que los lados de un triángulo pueden ser identificados con diferentes letras es mejor que se memoricen las razones usando los nombres en vez con las letras asociadas a los lados. Así que usando el ángulo agudo B del triángulo en la figura 12,

$$\operatorname{sen} B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{esc} B = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{b}$$

$$\cos B = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\sec B = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{a}$$

$$\tan B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{a}$$

$$\cot B = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{b}$$

Ya que $\frac{b}{c}$ es el seno de B así como el coseno de A , queda claro que las razones no se deben memorizar tomando en cuenta sólo las letras.

EJEMPLO 1

En un triángulo rectángulo ABC , $a = 1$ y $b = 3$. Determine seis razones trigonométricas para los ángulos A y B .

Primero hacer un dibujo que describa el problema como el de la figura 13. Se puede calcular la hipotenusa c si se usa el teorema de Pitágoras. Si se sustituye $a = 1$ y $b = 3$ en la ecuación

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2, \\ c^2 &= 1^2 + 3^2 \\ &= 1 + 9 = 10 \\ c &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

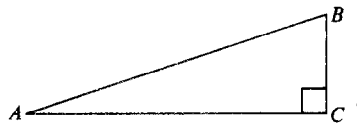


Figura 13

$$\operatorname{sen} A = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos A = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\tan A = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{1}{3}$$

$$\csc A = \frac{\text{hip}}{\text{op}} = \frac{\sqrt{10}}{1}$$

$$\sec A = \frac{\text{hip}}{\text{ady}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\cot A = \frac{\text{ady}}{\text{op}} = \frac{3}{1}$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\cos B = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\tan B = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{3}{1}$$

$$\csc B = \frac{\text{hip}}{\text{op}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\sec B = \frac{\text{hip}}{\text{ady}} = \frac{\sqrt{10}}{1}$$

$$\cot B = \frac{\text{ady}}{\text{op}} = \frac{1}{3}$$

EJEMPLO 2

Supóngase que θ es un ángulo agudo y que $\tan \theta = \frac{3}{4}$. Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de θ restantes.

Dibujar un triángulo rectángulo con la propiedad de que el lado opuesto a θ sea igual a 3 y el lado adyacente a θ sea igual a 4 como en la figura 14. Usando el teorema de Pitágoras,

$$(\text{hip})^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

$$\text{hip} = 5.$$

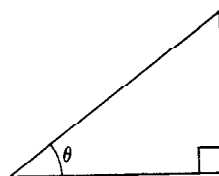


Figura 14

Las definiciones de las funciones trigonométricas dan

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{3}{5}$$

$$\csc \theta = \frac{5}{3}$$

$$\cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$\sec \theta = \frac{5}{4}$$

$$\tan \theta = \frac{3}{4}$$

$$\cot \theta = \frac{4}{3}.$$

Hay tres ángulos agudos especiales para los que sus funciones trigonométricas son fáciles de encontrar:

30° $\left(\frac{\pi}{6} \text{ radianes}\right)$, 45° $\left(\frac{\pi}{4} \text{ radianes}\right)$ y 60° $\left(\frac{\pi}{3} \text{ radianes}\right)$. Estos valores están en los dos siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3

Determinar los valores de las seis funciones trigonométricas para un ángulo de 45° .

Supóngase que hacemos el dibujo de un triángulo rectángulo con un ángulo agudo de 45° . Como el otro ángulo agudo es complementario a 45° , éste también es de 45° , lo que hace de este triángulo un triángulo

isósceles (que tiene dos lados iguales). Ya que el tamaño del triángulo no tiene importancia supongamos que los dos catetos del triángulo miden 1, como lo muestra la figura 15. Si se usa el teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned}1^2 + 1^2 &= c^2 \\2 &= c^2 \\ \sqrt{2} &= c.\end{aligned}$$

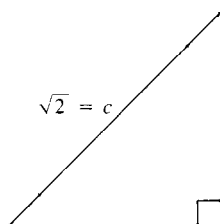


Figura 15

Por tanto,

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{csc} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sec 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

EJEMPLO 4

Determinar los valores de las seis funciones trigonométricas para los ángulos de 30° y de 60° .

Para tener un triángulo con ángulos agudos de 30° y 60° , se necesita empezar con un triángulo equilátero (que tiene todos los lados iguales) en donde cada lado mide 2 unidades de longitud. La mediana de uno de los vértices a el lado opuesto separa el triángulo en dos triángulos rectángulos con los ángulos agudos que se desean tener como lo muestra la figura 16.

La longitud de la mediana es de $\sqrt{3}$, que se puede obtener con el teorema de Pitágoras.

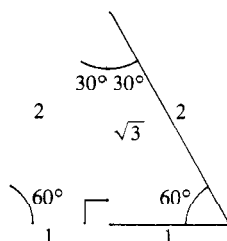


Figura 16

Considerando nada más el triángulo rectángulo que se muestra con color en la figura 16, se puede usar las definiciones de las seis funciones trigonométricas para concluir que

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$$

$$\operatorname{csc} 30^\circ = 2 = \sec 60^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{sen} 60^\circ$$

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \operatorname{csc} 60^\circ$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \cot 60^\circ$$

$$\cot 30^\circ = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$$

La razón por la cual el seno y coseno, secante y cosecante, y tangente y cotangente son definidas como cofunciones resulta bastante obvia en vista del ejemplo 4. El valor de una función trigonométrica de un ángulo agudo (tal como es 30°) es el mismo valor de la cofunción de su complemento (que es 60°).

A partir de las definiciones de las funciones y del hecho de que la hipotenusa de un triángulo rectángulo es más larga que cualquiera de sus lados, el teorema a continuación es obvio.

Sea θ un ángulo agudo. Entonces

1. $\sin \theta < 1$
2. $\cos \theta < 1$
3. $\csc \theta > 1$
4. $\sec \theta > 1$

Una manera de describir una función consiste en construir una tabla de valores. La tabla 2 (al final del libro) muestra los valores de seis funciones trigonométricas de ángulos que van desde el 0° a 90° en intervalos de $10'$. Antes de la existencia de las calculadoras estas tablas eran la manera más fácil de encontrar las funciones trigonométricas de ángulos que no fuesen 30° , 45° y 60° . Estas tablas son obsoletas desde el uso de las calculadoras y por tanto nuestra presentación está enfocada al uso de calculadoras. Para el estudiante que desee usar la tabla 2, el apéndice A incluye una pequeña introducción para el uso de estas tablas.

Para encontrar valores de funciones trigonométricas con una calculadora, póngala en el modo deseado ya sea en grados o en radianes. En varias calculadoras esto se resliza al oprimir la tecla $\boxed{\text{DRG}}$ varias veces hasta que uno esté en el modo deseado. Cerca de la parte inferior de la pantalla, aparecerá "DEG" para grados o "RAD" para radianes (no haga caso de "GRAD" y vuelva a apretar $\boxed{\text{DRG}}$ para regresar a "DEG"). Algunas calculadoras tienen por separado las teclas $\boxed{\text{DEG}}$ y $\boxed{\text{RAD}}$. Vea en el manual del usuario si su calculadora no tiene la tecla $\boxed{\text{DRG}}$. Además muchas calculadoras sólo trabajan con decimales y no con minutos y segundos. Las teclas $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$, $\boxed{\tan}$ se usan para obtener el seno, el coseno y tangentes de un ángulo (ya sea en el modo de grados o de radianes). Para encontrar la cosecante, la secante o la cotangente de un ángulo, use la tecla $\boxed{1/x}$ ya que

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \text{y} \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}.$$

El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento con más claridad.

EJEMPLO 5

Usar una calculadora para obtener cada uno de los valores de las funciones trigonométricas.

- a) $\sin 60^\circ$

Primero asegurarse que la calculadora esté en el modo de grados.

$$\text{ALG \& RPN: } 60 \boxed{\sin} \rightarrow \boxed{0.8660254}$$

Se obtiene una aproximación con siete puntos decimales del valor exacto, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, el cual se obtuvo en el ejemplo 4.

- b) $\cos 29^\circ 42'$

Primero se necesita convertir $29^\circ 42'$ a la forma decimal.

$$\text{ALG: } 42 \div 60 + 29 = \cos \rightarrow 0.8686315$$

$$\text{RPN: } 42 \text{ [ENTER] } 60 \div 29 + \cos \rightarrow 0.8686315$$

c) $\sec 71^\circ$

Primero se necesita encontrar $\cos 71$ y luego sacar su valor recíproco.

$$\text{ALG \& RPN: } 71 \cos \frac{1}{x} \rightarrow 3.0715535$$

Entonces, $\sec 71^\circ \approx 3.0715535$. Otra calculadora daría 3.0715534. Esto se debe a que unas calculadoras redondean los números en forma diferente a otras y no se debe de tomar en cuenta.

d) $\tan 0.8563$

Primero colocar la calculadora en el modo de radianes.

$$\text{ALG \& RPN: } 0.8563 \tan \rightarrow 1.1529009$$

De nueva cuenta, otra calculadora podría dar una respuesta un poco diferente.

Ya se sabe cómo encontrar el valor de una función trigonométrica dado un ángulo agudo, pero supóngase que se quiere invertir el proceso y encontrar un ángulo agudo dado por el valor de una función trigonométrica. El proceso es similar al método para encontrar antilogaritmos descrito en la sección 5.4. Algunas calculadoras usan la tecla $\boxed{\text{INV}}$ seguida por la tecla $\boxed{\text{sen}}$, $\boxed{\text{cos}}$, o $\boxed{\text{tan}}$ mientras que otras calculadoras usan la tecla $\boxed{\text{sen}^{-1}}$ o la $\boxed{\text{arcsin}}$ en lugar de las dos teclas $\boxed{\text{INV}}$ y $\boxed{\text{sen}}$. Así mismo existen otras teclas para las funciones coseno y tangente.

EJEMPLO 6

Usar una calculadora para encontrar cada uno de los ángulos agudos dado el valor de la función trigonométrica.

a) $\sin \theta = 0.5948$

Primero decidir si θ tiene que estar en grados o en radianes y luego seleccionar el modo adecuado.

Supóngase que primero encontraremos θ en grados. Los pasos a continuación darán el resultado que se desea.

$$\text{ALG \& RPN: } 0.5948 \boxed{\text{INV}} \boxed{\text{sen}} \rightarrow 36.498376$$

Así pues $\theta \approx 36^\circ 30'$. Si la calculadora se encuentra en el modo de radianes, los mismos pasos nos darán como resultado $\theta = 0.6370$, aproximado a cuatro cifras decimales.

b) $\csc \theta = 1.2011$

Manteniendo la calculadora en el modo de grados, el primer paso será usar la tecla $\boxed{1/x}$ para encontrar $\sin \theta$.

$$\text{ALG \& RPN: } 1.2011 \boxed{1/x} \boxed{\text{INV}} \boxed{\text{sen}} \rightarrow 56.363666$$

Así pues, $\theta = 56.363666^\circ = 56^\circ 21' 49''$

c) $\cot \theta = 3.5339$

En esta ocasión se encuentra θ en radianes.

$$\text{ALG \& RPN: } 3.5339 \left[\frac{1}{x} \right] \left[\text{INV} \right] \left[\tan \right] \rightarrow 0.2757639$$

Así pues, $\theta = 0.2758$, aproximado a cuatro cifras decimales.

6.3. Ejercicios

En los ejercicios 1-6 se dan dos lados del triángulo rectángulo ABC (en donde C es el ángulo recto). Determinar los valores de las seis funciones trigonométricas de los ángulos A y B .

1. $a = 5$ y $b = 12$

2. $a = 3$ y $b = 10$

3. $a = 7$ y $c = 15$

4. $b = 7$ y $c = 20$

5. $a = 0.6$ y $b = 0.8$

6. $a = \sqrt{5}$ y $b = \sqrt{11}$

En los ejercicios 7-12 θ es un ángulo agudo con el valor de la función trigonométrica dada. Dibujar el triángulo rectángulo adecuado y encontrar los valores de las seis funciones trigonométricas de θ y $90^\circ - \theta$.

7. $\sin \theta = \frac{5}{7}$

8. $\csc \theta = \frac{5}{2}$

9. $\sec \theta = 7$

10. $\cot \theta = 6$

11. $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$

12. $\sin \theta = \frac{\sqrt{105}}{21}$

13. Sin completar una calculadora, encontrar los valores de las funciones trigonométricas de 30° $\left(\frac{\pi}{6}\right)$,

45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ y 60° $\left(\frac{\pi}{3}\right)$, y completar la siguiente tabla.

Función	$30^\circ \left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45^\circ \left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60^\circ \left(\frac{\pi}{3}\right)$
seno			
coseno			
tangente			
cosecante			
secante			
cotangente			

Sin emplear una calculadora, evaluar cada una de las expresiones en los ejercicios 14-19.

14. $\sin 30^\circ + \cos 30^\circ$

15. $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ$

16. $(\sin 60^\circ)(\csc 60^\circ)$

17. $(\cos 45^\circ)(\sec 45^\circ)$

18. $(\tan 45^\circ)(\cot 45^\circ)$

19. $(\sin 45^\circ)(\cos 45^\circ)$

En los ejercicios 20-23 θ es un ángulo agudo. Determinar si el enunciado dado es verdadero o falso.

20. $0 < \cos \theta < 1$

21. $\csc \theta < 1$

22. $\sec \theta > 1$

23. Si $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, entonces $\tan \theta < 1$.

En los ejercicios 24-32 dibujar un triángulo rectángulo ABC con sus catetos correspondientes a y b y su hipotenusa c . Usando estos triángulos determinar si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas.

24. $\tan A = \cot B$

27. $\sin A \csc A = 1$

30. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

[Nota: $\sin^2 A$ representa $(\sin A)^2$]

25. $c = a \sin A$

28. $\cos B \sec B = 1$

31. $1 + \tan^2 B = \sec^2 B$

26. $a = b \tan A$

29. $\tan A \cot B = 1$

32. $1 + \cot^2 A = \csc^2 A$

En los ejercicios 33-44 usar una calculadora para encontrar cada uno de los valores de las funciones trigonométricas, aproximado a cuatro cifras decimales.

33. $\sin 65^\circ$

34. $\cos 5^\circ$

35. $\cot 72^\circ$

36. $\csc 18^\circ$

37. $\cos 42^\circ 38'$

38. $\tan 71^\circ 14'$

39. $\sec 0.7159$

40. $\sin 0.8439$

41. $\tan 1.4327$

42. $\cot 1.2305$

43. $\csc \frac{\pi}{5}$

44. $\sec \frac{\pi}{7}$

En los ejercicios 45-52 usar una calculadora para encontrar cada uno de los ángulos agudos dado los valores de las funciones trigonométricas. Aproximadamente el ángulo a la más cercana centésima parte del grado.

45. $\sin \theta = 0.8319$

46. $\cos \theta = 0.9758$

47. $\tan \theta = 4.0015$

48. $\csc \theta = 2.3541$

49. $\sec \theta = 3.2711$

50. $\cot \theta = 7.1559$

51. $\cos \theta = 0.5511$

52. $\sin \theta = 0.8995$

En los ejercicios 53-60 usar una calculadora para encontrar cada uno de los ángulos agudos dado el valor de las funciones trigonométricas. Expresar su resultado en radianes y aproximarlo a cuatro cifras decimales.

53. $\sin \theta = 0.5718$

54. $\cos \theta = 0.1295$

55. $\tan \theta = 3.1560$

56. $\csc \theta = 2.5619$

57. $\sec \theta = 4.4554$

58. $\cot \theta = 6.1397$

59. $\cos \theta = 0.8415$

60. $\sin \theta = 0.2219$

En los ejercicios 61-64 usar una calculadora para encontrar los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo dado, aproximado a cuatro cifras decimales.

61. $\theta = 47^\circ 13' 54''$

62. $\theta = 13^\circ 05' 27''$

63. $\theta = 82^\circ 31' 46''$

64. $\theta = 2^\circ 52' 27''$

En los ejercicios 65-66 usar una calculadora para encontrar los valores de las siguientes funciones trigonométricas, aproximando a cuatro cifras decimales.

a) $\sin^2 \theta$,

b) $\cos^2 \theta$,

c) $\tan^2 \theta$,

d) $\csc^2 \theta$,

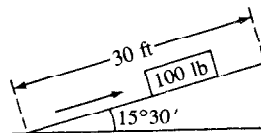
e) $\sec^2 \theta$,

f) $\cot^2 \theta$,

65. $\theta = 0.8563$

66. $\theta = 35^\circ 18' 58''$

67. Física. Una rampa con longitud de L pues tiene una inclinación de θ grados con respecto a la horizontal. El trabajo W , en pies-libras, que se necesita para mover un objeto que tiene un peso de P lb hacia arriba sobre la rampa está dado por $W = PL \sin \theta$. ¿Cuánto trabajo se produce al empujar hacia arriba un baúl que pesa 100 lb hacia arriba sobre una rampa que mide 30 ft y que tiene una inclinación de $15^\circ 30'$? Ver figura.



68. Astronomía. La rapidez R , en millas por segundo, a la cual la Tierra se mueve alrededor del sol se puede calcular aproximadamente por $R = L \cot 89.99^\circ$, en donde L es la velocidad de la luz, 186 000 mi/s aproximadamente. Encontrar cuál es la velocidad de la Tierra cuando se mueve alrededor del sol.

69. Encontrar la longitud del arco sobre un círculo que tiene un radio de 2.3 ft y que subtiende un ángulo central de $72^\circ 50'$.

70. Encontrar el número de grados (a la más cercana centésima) del ángulo central que subtiende un arco de 6 in en un círculo con un diámetro de 8 ft.
71. **Aeronáutica.** La hélice de un avión es de 7 ft de diámetro. Si la velocidad de la hélice es de 45 rad/s, ¿cuál es la velocidad lineal, en ft/s, de la punta de la hélice?

Resolución de triángulos rectángulos

Las seis partes de cualquier triángulo (tres ángulos y tres lados) frecuentemente pueden ser calculadas cuando se conocen las medidas de unas de estas partes. Este proceso se llama **resolución del triángulo**. Un triángulo rectángulo se puede *resolver* cuando se conocen las medidas de dos de sus lados o cuando se conocen uno de sus lados y uno de sus ángulos agudos. Conocer simplemente los ángulos del triángulo no es suficiente para resolver el triángulo, ya que cualquier triángulo semejante tendrá los mismos ángulos, pero muy posiblemente, lados diferentes.

EJEMPLO 1

Resolver el triángulo rectángulo en el cual $a = 3$ y $b = 7$.

Primero dibujar con precisión un triángulo con sus lados y ángulos marcados como se demuestra en la figura 17. Ya que C siempre es el ángulo de 90° , se tiene que encontrar A , B y c .

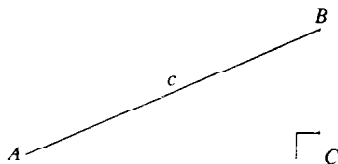


Figura 17

Para encontrar A : $\tan A = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{3}{7}$

ALG: $3 \div 7 = \boxed{\text{INV}} \boxed{\tan} \rightarrow \boxed{23.198591}$

RPN: $3 \boxed{\text{ENTER}} 7 \boxed{\div} \boxed{\text{INV}} \boxed{\tan} \rightarrow \boxed{23.198591}$

Aproximado al grado más cercano, $A = 23^\circ$.

Para encontrar B : $B = 90^\circ - A = 90^\circ - 23^\circ = 67^\circ$

El ángulo B también se puede encontrar si se usa, por ejemplo, $\tan B = 7/3$, $B = 67^\circ$ (aproximado al grado más cercano). Obviamente es más fácil encontrar B si se sabe que los ángulos A y B son complementarios. Pero, si se comete un error al encontrar A , cuando use el valor de A para encontrar B el resultado también será erróneo. Para encontrar c : se puede encontrar c según el teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ &= 3^2 + 7^2 = 58 \\ c &= \sqrt{58} \approx 7.6 \end{aligned}$$

La precisión de las respuestas

El ejemplo 1 ilustra el procedimiento para resolver un triángulo rectángulo. También señala una situación que requiere de algún convenio antes de proseguir. Decir que el valor de c es de 7.6 (aproximado a la décima más cercana), parece ser un poco sin sentido ya que los valores de a y de b fueron dados aproximando al número entero más cercano solamente. Si, por ejemplo, estos números fueran medidas aproximadas, se estaría diciendo que ¡el valor que se calcula es más preciso que los valores que se usan para calcularlo!

Un problema parecido se presenta para los valores de los ángulos agudos. Si se toman en cuenta los lados del triángulo del cual se van a calcular los ángulos. ¿Qué nivel de precisión se necesita para el ángulo (aproximado al grado más cercano, o al minuto más cercano o al segundo más cercano)? En el ejemplo, los ángulos A y B fueron aproximados al grado más cercano. Se pudo haber aproximado los ángulos con más precisión pero, ¿hubiera tenido sentido en vista de las medidas dadas de los lados? Para ser consistente, nos ajustaremos a la siguiente regla.

1. Todos los lados serán redondeados al mismo número de cifras decimales que la medida menos precisa.
2. Los ángulos serán dados en grados y minutos de acuerdo con la siguiente tabla.

Colocación decimal en un lado	Ejemplos	Aproximación del ángulo	Ejemplos
0	6 cm	grados	23°
1	4.3 ft	$10'$ o 0.1°	$41^\circ 20'$ o 41.3°
2	7.41 m	$1'$ o 0.01°	$48^\circ 25'$ o 48.42°

EJEMPLO 2

Resolver el triángulo rectángulo para el cual $c = 8.12$ y $B = 72^\circ 35'$.

Necesitamos encontrar a , b y A . En la figura 18 se muestra el dibujo de este triángulo.

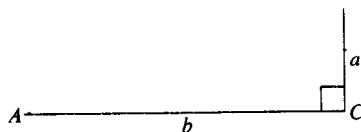


Figura 18

$$\begin{aligned}
 \text{Para encontrar } A: A &= 90^\circ 00' - B \\
 &= 90^\circ 00' - 72^\circ 35' \\
 &= 17^\circ 25'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Para encontrar } a: \cos B &= \frac{a}{c} \\
 \cos 72^\circ 35' &= \frac{a}{8.12}
 \end{aligned}$$

$$\text{Así, } a = (8.12)\cos 72^\circ 35' = 2.43.$$

$$\begin{aligned}
 \text{ALG: } & 35 \div 60 + 72 = \text{STO} \cos \times 8.12 = \rightarrow 2.4304651 \\
 \text{RPN: } & 35 \text{ ENTER } 60 \div 72 + \text{STO} \cos 8.12 \times \rightarrow 2.4304651
 \end{aligned}$$

Para encontrar b : $\text{sen } 72^\circ 35' = \frac{b}{8.12}$

Así, $b = (8.12) \text{sen } 72^\circ 35' = 7.75$.

ALG: $\boxed{\text{RCL}} \boxed{\text{sen}} \boxed{\times} 8.12 \boxed{=} \rightarrow \boxed{7.7477248}$

RPN: $\boxed{\text{RCL}} \boxed{\text{sen}} 8.12 \boxed{\times} \rightarrow \boxed{7.7477248}$

Cuando se encontró a en el ejemplo 2, el paso de la calculadora $\boxed{\text{STO}}$ almacenó el ángulo $72^\circ 35'$ en la memoria. Para encontrar b este valor se recuperó de la memoria con la tecla $\boxed{\text{RCL}}$.

Aplicaciones de los triángulos rectángulos

A continuación se investiga una variedad de problemas con aplicaciones en los cuales, en cierta forma, todos consisten en encontrar las partes desconocidas de un triángulo. En la mayoría de los casos se verá un proceso al que se le podría llamar *medida indirecta*: encontrar cierta longitud, distancia o ángulo sin usar ningún instrumento para medir como una cinta métrica o un transportador.

Si una persona tiene que ver hacia arriba a un objeto, como en la figura 19, al ángulo que se forma entre la línea de visión y la horizontal se le llama **ángulo de elevación**. Si una persona tiene que ver un objeto hacia abajo, como en la figura 20, al ángulo que se forma entre la línea de visión y la horizontal se le llama **ángulo de depresión**.

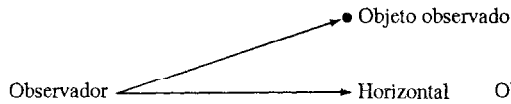


Figura 19. Ángulo de elevación.

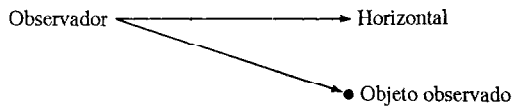


Figura 20. Ángulo de depresión.

EJEMPLO 3

La sombra de un edificio se extiende 200 ft cuando el ángulo de elevación, visto desde el final de la sombra, es de $23^\circ 10'$. Encuentre la altura de edificio. ¿Cuál es el ángulo de elevación del sol?

En la figura 21, A es el ángulo de elevación de la parte superior del edificio y también el ángulo de elevación del sol. Se tiene que encontrar el lado a (la altura del edificio).

$$\tan A = \frac{a}{b}$$

$$\tan 23^\circ 10' = \frac{a}{200}$$

$$a = (200)\tan 23^\circ 10' \approx 85.58$$

La altura del edificio es de aproximadamente 86 ft.

Un método para describir una dirección desde un punto determinado consiste en usar la noción de *orientación*. La **orientación** de un objeto desde un punto O es el ángulo agudo que se produce entre la recta norte-sur y la recta que une al objeto con el punto O . Para dar una orientación, primero se escribe la letra N o S, luego el ángulo de desviación ya sea al norte o al sur y luego la letra E u O.

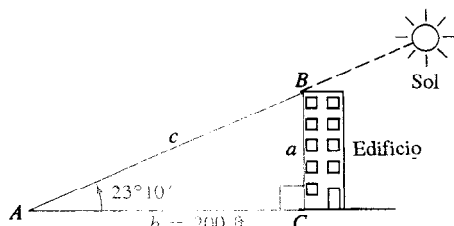


Figura 21

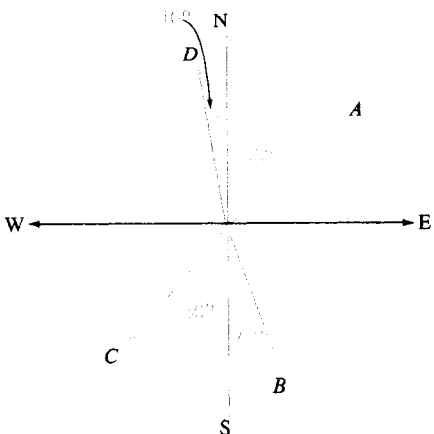


Figura 22. Orientación.

En la figura 22 la orientación del punto A desde O es N50° E, la orientación del punto B desde O es S20° E, la orientación del punto C desde O es S40° O y la orientación del punto D desde O es N10°O. Recordar que se tiene que empezar en la dirección de la primera letra (N o S) y formar el ángulo en dirección de la segunda letra (E u O).
Ahora se resolverá el segundo problema planteado en la introducción de este capítulo.

EJEMPLO 4

Silvicultura

Un pequeño incendio forestal se divisa al sur de una torre de vigilancia en Woody Mountain. Desde una segunda torre a 11.0 mi al este de la primera, la orientación del fuego es S51° 10'O. ¿Qué tan lejos se encuentra el fuego de la torre en Woody Mountain?
La figura 23 muestra la información del problema planteado. Nótese que S51° 10'O corresponde al $\angle CBF$ que es de S51°10', y el $\angle FAB$ es un ángulo recto. En el triángulo ABF, $\angle ABF = 38^{\circ}50'$ ya que éste es complementario al $\angle CBF$. La longitud de AF nos da la distancia entre el incendio y la torre de vigilancia en Woody Mountain.

$$\tan 38^{\circ}50' = \frac{AF}{11.0}$$
$$AF = (11.0)\tan 38^{\circ}50' \approx 8.9$$

Por lo tanto, el incendio está aproximadamente a 8.9 millas de la torre de vigilancia en Woody Mountain.

En **navegación aérea** o **naval**, la dirección se describe usando un solo ángulo medido en la dirección de las manecillas del reloj desde el norte. Así, una dirección hacia el este tendrá un ángulo de 90°, hacia el sur tendría un ángulo de 180°, hacia el oeste tendría un ángulo de 270° y hacia el norte tendría un ángulo de 0°.
En la figura 24, A se encuentra a 39°, B se encuentra a 115°, C se encuentra a 240° y D se encuentra a 300°. La relación entre la dirección en navegación y la orientación de cada punto se muestra en la siguiente tabla.

Dirección náutica	Orientación
39°	N39°E
115°	S65°E (180° - 115° = 65°)
240°	S60°O (240° - 180° = 60°)
300°	N60°O (360° - 300° = 60°)

Suponer que las ondas irradian hacia afuera de manera circular y que el barco se mueve en línea recta de A a B a C , como lo muestra la figura 27. Para cuando el barco llegue a C , la onda que se originó en B se habrá desplazado b unidades y la onda que se originó en A se habrá desplazado a unidades. Ya que la velocidad del barco, v_b , es constante, la velocidad de la onda, v_w , también es constante, por lo que los puntos C , D y E se encuentran en la misma línea recta por lo que las ondas forman una línea recta que intersecan en un ángulo θ .

Si t es el tiempo de desplazamiento de A a C , aplicando la fórmula de la distancia, $d = rt$, tenemos que

$$AE = v_w \cdot t \quad \text{y} \quad AC = v_b \cdot t.$$

Ya que el triángulo AEC es un triángulo rectángulo y el $\angle ACE = \frac{\theta}{2}$,

$$\text{sen } \frac{\theta}{2} = \frac{AE}{AC} = \frac{v_w \cdot t}{v_b \cdot t} = \frac{v_w}{v_b}.$$

EJEMPLO 6

Navegación

Un bote se mueve a una velocidad de 30.0 mph de tal manera que las ondas de proa se desplazan a 14.0 mph. Encontrar el ángulo formado por las ondas.

Se tiene que $v_b = 30.0$ mph y que $v_w = 14.0$ mph por lo que

$$\begin{aligned} \text{sen } \frac{\theta}{2} &= \frac{v_w}{v_b} = \frac{14}{30} = 0.4666667 \\ \frac{\theta}{2} &\approx 27^\circ 50' \end{aligned}$$

Así pues, el ángulo que se forma por las ondas es de $55^\circ 40'$.

EJEMPLO 7

Navegación

Un bote se mueve a una velocidad de 40.0 km/h y genera ondas de proa que forman un ángulo de $65^\circ 00'$. Encontrar la velocidad de las ondas.

Tenemos que $v_b = 40$ km/hr y $\theta = 65^\circ 00'$.

$$\begin{aligned} \text{sen } \frac{65^\circ 00'}{2} &= \frac{v_w}{40} \\ \text{sen } 32^\circ 30' &= \frac{v_w}{40} \\ 40 \text{ sen } 32^\circ 30' &= v_w \\ 21.5 &\approx v_w \end{aligned}$$

Así pues, la velocidad de las ondas de proa es de 21.5 km/h aproximadamente.

De la misma manera, un avión que vuele más rápido que la velocidad del sonido genera ondas sonoras que forman un cono hacia atrás del avión. Cuando el cono interseca la superficie terrestre, la línea de intersección es casi una hipérbola, como lo muestra la figura 26. Es aquí donde se escucha una explosión sónica. Así como en el problema del bote, si θ es el ángulo del cono, v_a es la velocidad del avión y v_s es la velocidad de la onda de sonido, entonces

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{v_s}{v_a}.$$

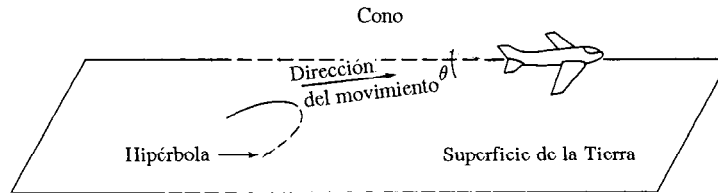


Figura 28

Todos hemos tenido la experiencia de sumergir un objeto recto en el agua, como lo es un palo o un lápiz, y hemos visto cómo el objeto parece que se dobla en el punto donde interseca a la superficie del agua. Este fenómeno se debe a la refracción de las ondas de luz y puede ser descrito con una simple ecuación que incluye el seno de dos ángulos. Supóngase que a es la velocidad de la luz en el aire, w es la velocidad de la luz en el agua, los ángulos A y W son como los de la figura 29 de la página siguiente, y las ondas de luz viajan del punto p al punto Q . René Descartes (1596-1605) demostró que

$$\frac{a}{w} = \frac{\sin A}{\sin W}.$$

Mediante el uso del concepto del **índice de refracción**, la razón de la velocidad de la luz en el vacío con respecto a la velocidad de la luz en una sustancia dada (tal como el aire o el agua), Willebrod Snell (1569-1626) demostró más tarde que I_a es el índice de refracción en el aire e I_w es el índice de refracción en el agua, entonces

$$\frac{I_w}{I_a} = \frac{\sin A}{\sin W}.$$

EJEMPLO 8

Supóngase que el índice de refracción del agua es 1.3 y el del aire es 1.0003. Si una linterna alumbró a un lago de tal manera que el ángulo A sea $21^\circ 40'$ (figura 29), encontrar el ángulo W .

Se tiene que $I_w = 1.3$, $I_a = 1.0003$, y $A = 21^\circ 40'$. Substituir estos valores y despeje W .

$$\begin{aligned} \frac{1.3}{1.0003} &= \frac{\sin 21^\circ 40'}{\sin W} \\ \sin W &= \frac{1.0003 \sin 21^\circ 40'}{1.3} \\ \sin W &= 0.2840899 \\ W &\approx 16^\circ 30' \end{aligned}$$

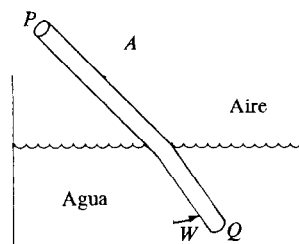


Figura 29

6.4. Ejercicios

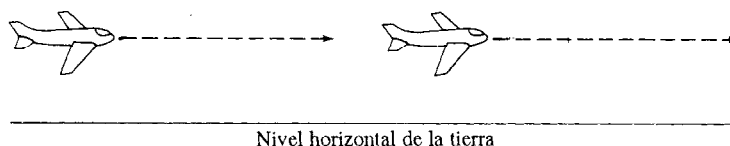
En los ejercicios 1-12 resolver cada uno de los triángulos rectángulos usando las partes dadas. Recordar que $C = 90^\circ$.

- | | | |
|---|--------------------------------------|--|
| 1. $a = 19$ y $b = 48$ | 2. $a = 4.3$ y $b = 6.1$ | 3. $a = 9.2$ y $c = 10.1$ |
| 4. $b = 7$ y $c = 15$ | 5. $A = 26^\circ 40'$ y $c = 12.0$ | 6. $A = 62^\circ 10'$ y $b = 7.25$ |
| 7. $b = 3.2$ y $B = 10^\circ 50'$ | 8. $c = 16.55$ y $B = 12^\circ 45'$ | 9. $A = 22^\circ 30'$ y $B = 67^\circ 30'$ |
| 10. $B = 41^\circ 20'$ y $A = 48^\circ 40'$ | 11. $c = 21.85$ y $B = 81^\circ 42'$ | 12. $a = 19.25$ y $A = 26^\circ 34'$ |

Resolver.

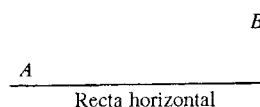
13. Cuando el ángulo de elevación del sol es $48^\circ 50'$, un poste hace una sombra con una longitud de 40.0 ft. ¿Cuál es la altura del poste?
14. **Geología.** Desde un punto en el gran cañón que se encuentra a 3 millas de la base de la piedra caliza de Redwall, pero en el mismo plano horizontal, un geólogo divisa la parte más alta de Redwall a un ángulo de elevación de $2^\circ 10'$. Desde este punto, ¿cuántos pies de altura mide la formación de piedra caliza de Redwall?
15. **Agrimensura.** Dos edificios están en lados opuestos de una calle con una separación de 70.0 ft. Desde la azotea de uno de los edificios, que mide 80.0 ft, el ángulo de elevación a la azotea del otro edificio es de $37^\circ 30'$. ¿Qué tan alto es el otro edificio?
16. **Agrimensura.** El ángulo de elevación a la punta de la Torre del Diablo desde un punto que se encuentra a 1 200 ft de la base de la torre, es de $35^\circ 50'$. ¿Qué tan alta es la torre?
17. **Navegación.** Una torre mide 30 m (sobre el nivel de un río) y se encuentra a 15 m de la orilla del río. Desde la punta de la torre, el ángulo de depresión a la orilla opuesta del río es de $15^\circ 40'$. Encontrar la anchura del río.
18. **Recreación.** Desde la torre Butte se ven dos barcos sobre el lago Powell en la misma línea recta que la torre. Los ángulos de depresión de los dos barcos son $12^\circ 30'$ y $26^\circ 10'$. Si la torre Butte está a 1 580 ft sobre el nivel del lago, ¿qué distancia hay entre los dos barcos?
19. **Silvicultura.** Desde lo alto de una torre de 100 ft de altura, el ángulo de depresión de un pequeño incendio es de $5^\circ 40'$. ¿Qué tan lejos se encuentra el incendio de la base de la torre?
20. **Agrimensura.** Un globo se encuentra a 1 375 ft directamente arriba de un punto en el piso. El ángulo de depresión (desde el globo) de una casa al norte del punto es $24^\circ 30'$, mientras que el ángulo de depresión de otra casa al sur del punto es $42^\circ 10'$. ¿Cuál es la distancia entre las dos casas?
21. **Silvicultura.** El puesto de vigilancia B se encuentra a 8.0 mi al sur del puesto de vigilancia A . Del puesto B se divisa un incendio. Si el incendio está al este de A y tiene una orientación $N31^\circ 40'E$ de B , ¿qué tan lejos se encuentra el incendio de B ?
22. **Geografía.** Phoenix está a 140.0 mi al sur de Flagstaff, y Winslow está a 60.0 mi al este de Flagstaff. ¿Cuál es la orientación de Winslow desde Phoenix y la orientación de Phoenix desde Winslow?
23. **Aeronáutica.** Un avión despegue de un aeropuerto y vuela 200 km en una dirección de 140° . ¿Qué tan al este y al sur se encuentra el avión del aeropuerto en este momento?
24. **Navegación.** Un barco navega 30.0 mi en una dirección de $322^\circ 20'$. ¿Qué tan al norte y al oeste ha navegado el barco?

Otros dos ángulos que están relacionados a la navegación aérea son el **ángulo de ascenso** (el ángulo entre una dirección hacia arriba y la horizontal) y el **ángulo de descenso** (el ángulo entre una dirección hacia abajo y la horizontal). La figura muestra estos conceptos.



25. **Aeronáutica.** A una altitud de 2 500 ft, el motor de un avión pequeño se descompone. El avión necesita llegar a una pista de aterrizaje a 3 mi de distancia. ¿Qué ángulo de descenso es necesario para que llegue a la pista?
26. **Aeronáutica.** La velocidad del viento en un avión es de 600 mph y el ángulo de ascenso del avión es de $12^\circ 20'$. ¿Cuál es la velocidad del avión con respecto al piso? (La velocidad con respecto al piso es la velocidad horizontal).
27. **Aeronáutica.** A una altura de 2.0 mi, un avión tiene un ángulo de descenso de $5^\circ 30'$. ¿Qué tan lejos viajará el avión antes de llegar al piso?

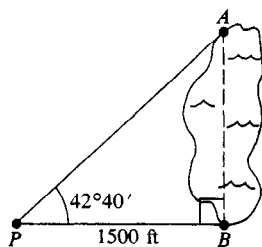
El ángulo agudo que se produce entre una línea recta y la horizontal, como lo muestra la figura, se llama *ángulo de inclinación* de la recta.



28. **Ingeniería.** El túnel de un tren que pasa a través de una montaña tiene 2 000 m de longitud. Si el ángulo de inclinación de las vías es de $2^\circ 10'$, ¿cuál es el cambio en la elevación de un extremo del túnel al otro?
29. **Consumismo.** Si la distancia entre los dos niveles del Centro Comercial Metro Center es de 16.8 ft y el ángulo de inclinación de la escalera eléctrica es de $32^\circ 10'$, ¿qué distancia recorre una persona cuando va del primer nivel al segundo?
30. **Recreación.** La silla-elevador de una estación de esquí tiene, en promedio, un ángulo de inclinación de $17^\circ 30'$, con una elevación vertical de 800 m. ¿Cuál es la longitud aproximada del viaje hasta la cima?
31. **Navegación.** Navegando a una velocidad constante, un barco produce ondas de proa que se desplazan a razón de 8.25 km/h. Si el ángulo entre las ondas es de $42^\circ 40'$, encuentre a qué velocidad va el barco.
32. **Recreación.** Una lancha de motor, desplazándose en línea recta a una velocidad de 25.0 mph genera ondas de proa que va a 10.0 mph. ¿Cuál es el ángulo entre las ondas?
33. **Aeronáutica.** Una onda sonora producida por un avión que viaja a velocidad supersónica se desplaza a 820 mph. Si el ángulo del cono sónico es de $78^\circ 40'$, ¿qué tan rápido vuela el avión?
34. **Aeronáutica.** Si una nave vuela a Mach 2 (dos veces la velocidad del sonido), ¿cuál será el ángulo del cono sónico?
Sugerencia: $v_a = 2v_s$

En los ejercicios 35-38 utilizar 1.3 como el índice de refracción del agua, 1.0003 como el índice de refracción del aire, y como referencia, la figura 29.

35. **Física.** Si la luz penetra en la superficie del agua de un estanque de tal manera que $A = 35^\circ 50'$ encontrar W .
36. **Oceanografía.** La linterna subacuática de un bozo alumbra hacia la superficie de tal manera que $W = 50^\circ 00'$. Encontrar A .
37. Repita el ejercicio 36 con $W = 50^\circ 10'$.
38. Repita el ejercicio 36 con $W = 50^\circ 20'$. Explique qué pasa en este caso y en los que W es aún más grande.
39. **Agrimensura.** Dos puntos, A y B están, como se muestra en la figura, en los lados opuestos de un lado. Un agrimensor parado en el punto P , a 1 500 ft de B , mide el $\angle APB$ y obtiene $42^\circ 40'$. ¿Qué tan lejos está A de B ?



- 40. Meteorología.** Un rayo de luz es dirigido por un faro hacia una nube que está situada exactamente arriba de éste. Desde un punto que se encuentra a 200 m del faro el ángulo de elevación al punto en el que la luz pega en la nube es de $80^{\circ}20'$. ¿A qué altura se encuentra la nube?
- 41. Navegación.** Un bote pequeño parte de una isla y navega durante dos horas hacia el norte a una velocidad promedio de 28.0 mph, después cambia su curso, hacia el este, navegando durante una hora a la misma velocidad hasta que encalla en un arrecife. Si un barco de rescate navega desde la isla, qué curso debe seguir para alcanzar al bote accidentado? ¿Cuánto tiempo le llevará llegar al bote si navega a 30.0 mph? (aproximar al minuto más cercano).
- 42.** Un chofer de camión viaja hacia el oeste sobre un terreno plano a una elevación de 5 000 ft. Cuando se aproxima a las Montañas Rocallosas a una velocidad de 60 mph observa que en un intervalo de 15 minutos el ángulo de elevación de una cima cambia de $2^{\circ}00'$ a $3^{\circ}00'$. ¿Cuál es la elevación aproximada de la cima?

Utilizar una calculadora en los ejercicios 43-44 para encontrar a) $\sin \theta$, b) $\cos \theta$, c) $\tan \theta$, d) $\csc \theta$, f) $\cot \theta$, g) $\sec^2 \theta$, h) $\sec^2 \theta$, aproximado a 4 decimales.

43. $\theta = 1.2535$

44. $\theta = 62^{\circ}41'25''$

Utilizar una calculadora en los ejercicios 45-46 para encontrar cada ángulo con el valor de la función trigonométrica dada: a) a la centésima de grado más cercana, b) en radianes con cuatro decimales de exactitud c) en grados, minutos y segundos.

45. $\sin \theta = 0.2569$

46. $\cot \theta = 4.1558$

Resolver.

- 47. Recreación.** El diámetro de la rueda de un trailer es de 16 in. Cuando el trailer es arrastrado por una grúa a 60 mph, ¿cuántas revoluciones gira la rueda en un segundo?
- 48.** Para pasar a la siguiente sección, definir una función cuyo dominio sea el conjunto de números reales.

El círculo unitario

Hasta ahora se han tomado en cuenta las funciones trigonométricas de los ángulos agudos medidos en grados o radianes. Ahora se hace extensivo el desarrollo de las funciones trigonométricas a funciones de números reales. Para llevar a cabo esto, se utilizará el círculo unitario, es decir, un círculo centrado en el origen (0, 0) de un sistema de coordenadas cartesianas cuyo radio tiene una longitud de una unidad. La ecuación del círculo unitario es

Nótese que ni x ni y pueden ser más grandes que 1 o menores que -1 para que (x, y) pueda satisfacer la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

Cuando x se reemplaza por $-x$, cuando y se reemplaza por $-y$, y cuando x y y son reemplazados simultáneamente por $-x$ y $-y$, la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ no sufre ningún cambio. En consecuencia, la gráfica de $x^2 + y^2 = 1$ es simétrica con respecto al eje y , al eje x y al origen. Supóngase que un punto del círculo unitario tiene coordenadas (a, b) . En vista de que la gráfica es simétrica respecto al eje y , el punto $(-a, b)$ debe aparecer también en la gráfica. ya que la gráfica es simétrica respecto al eje x , el punto $(a, -b)$ debe aparecer también en la gráfica. En vista de que la gráfica es simétrica respecto al origen, el punto $(-a, -b)$ debe también aparecer en la gráfica. Vea la figura 30.

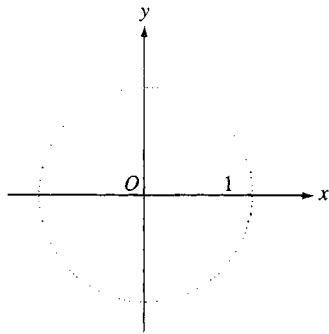


Figura 30. Círculo unitario.

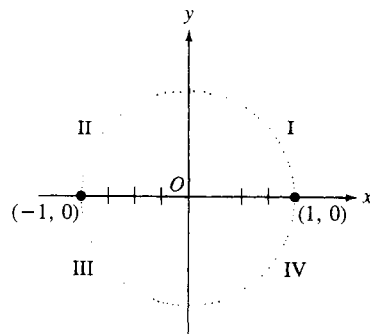


Figura 31

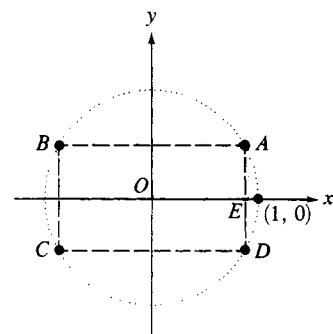


Figura 32

EJEMPLO 1

Determinar las coordenadas de tres puntos en el círculo unitario que sean simétricas al punto P , con coordenada x igual a $1/4$, sobre el círculo en el primer (I) cuadrante.

Primero se determina la coordenada y de P sobre el círculo unitario de la figura 31, substituyendo $x = 1/4$ en la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4}\right)^2 + y^2 &= 1 \\ y^2 &= 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \\ y &= \pm \frac{\sqrt{15}}{4} \end{aligned}$$

P tiene coordenadas $(1/4, \sqrt{15}/4)$, y los tres puntos que son simétricos a P son $Q(-1/4, \sqrt{15}/4)$, $R(-1/4, -\sqrt{15}/4)$, y $S(1/4, -\sqrt{15}/4)$ en los cuadrantes II, III y IV, respectivamente. Esto quiere decir que P es simétrica a Q respecto al eje y , a R respecto al origen y a S respecto al eje x .

EJEMPLO 2

Determinar las coordenadas de los puntos B , C y D en el círculo unitario de la figura 32.

Para determinar las coordenadas de B , C y D debemos encontrar primero las coordenadas de A , que son OE (coordenada x) y EA (coordenada y). En el triángulo rectángulo AOE , $OA = 1$ (OA es el radio del círculo unitario) y en vista de que EA es el lado opuesto al ángulo de 30° del triángulo AOE , EA debe ser $1/2$ (la mitad de la hipotenusa). Según el teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned}
 (OE)^2 + (EA)^2 &= 1^2 \\
 (OE)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= 1 \\
 (OE)^2 &= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\
 OE &= \frac{\sqrt{3}}{2}.
 \end{aligned}$$

Así pues, las coordenadas de A son $(\sqrt{3}/2, 1/2)$. Debido a las diversas simetrías, las coordenadas de B son $(-\sqrt{3}/2, 1/2)$, las coordenadas de C son $(-\sqrt{3}/2, -1/2)$, y las coordenadas de D son $(\sqrt{3}/2, -1/2)$.

Distancias en el círculo unitario

Recordar que la fórmula de una circunferencia, c , de un círculo es:

en donde d es el diámetro. Para el círculo unitario, el radio r es 1 de tal manera que $d = 2r = 2$. Así, la circunferencia del círculo unitario es de 2π unidades.

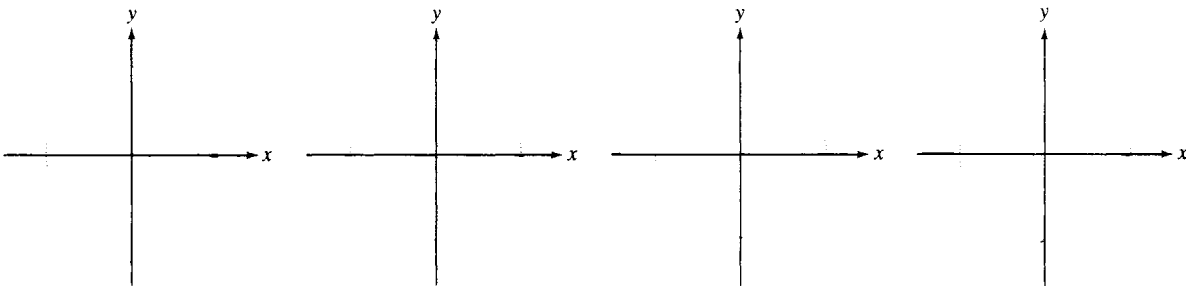


Figura 33. Distancias sobre el círculo unitario.

Si un punto empieza en la posición A (ver figura 33) y se mueve en dirección contraria a las manecillas del reloj alrededor del círculo y se detiene otra vez en A , ha recorrido una distancia de 2π unidades. Si el punto se mueve en dirección contraria a las manecillas del reloj desde la posición A a la posición C , ha recorrido π unidades. Un punto que se mueve en dirección contraria a las manecillas del reloj desde la posición A a la posición B recorre $\pi/2$ unidades. Si un punto se mueve en la dirección de las manecillas del reloj desde la posición A a la posición D , se dice que la distancia recorrida es $-\pi/2$ unidades. El signo *menos* indica la **dirección**. Una distancia positiva corresponde al movimiento en dirección contraria a las manecillas del reloj y una distancia negativa corresponde a la dirección de las manecillas del reloj. Por lo tanto, si decimos que un punto se mueve π unidades (de A) en el círculo unitario, éste se mueve de A a C en dirección contraria a las manecillas del reloj. Si decimos que un punto se mueve $-\pi$ unidades (de A) en el círculo unitario, éste se mueve de A a C en dirección de las manecillas del reloj. En todo nuestro trabajo supondremos que el punto de partida es A $(1, 0)$.

EJEMPLO 3

- a) Si un punto A $(1, 0)$ se mueve una octava parte del círculo en dirección contraria a las manecillas del reloj y se detiene en el punto B , entonces ha recorrido una distancia de $(1/8)(2\pi) = \pi/4$ unidades.

Cuando el punto se mueve una octava parte del círculo en dirección de las manecillas del reloj y se detiene en el punto C, entonces ha recorrido una distancia de $-\pi/4$ ver figura 34).

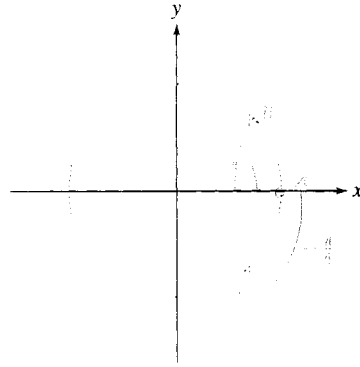


Figura 34

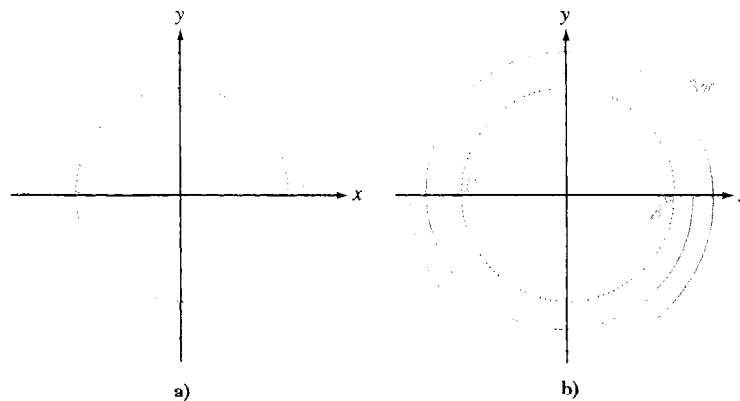


Figura 35

- b) Si un punto da una vuelta completa y luego da otra media vuelta, entonces se mueve una distancia total de $2\pi + (1/2)(2\pi) = 2\pi + \pi = 3\pi$ unidades (en dirección contraria a las manecillas del reloj), como lo muestra la figura 35 a), o $(-2\pi) + (-\pi) = -3\pi$ unidades (en dirección de las manecillas del reloj), como lo muestra la figura 35 b).

Cómo determinar la posición de un punto sobre el círculo unitario

Se han considerado los casos especiales de **distancias sobre el círculo unitario**. En los ejemplos se ha expresado qué tanto se ha movido un punto (en dirección contraria o en dirección a las manecillas del reloj), con una fracción, y se ha encontrado la posición en la cual el punto P se detiene. Cualquier número real puede determinar un punto sobre el círculo unitario.

Para determinar un punto sobre un círculo unitario

Sea t un número real. Empezando en $(1, 0)$, muévase $|t|$ unidades alrededor del círculo en dirección contraria a las manecillas del reloj si t es positivo y en dirección de las manecillas del reloj si t es negativo. Una vez que la distancia esté determinada el punto terminal se identifica por el número t .

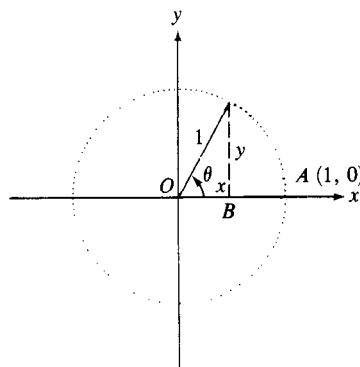
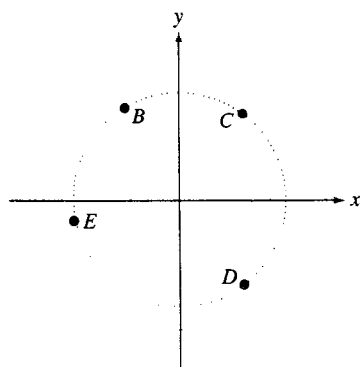


Figura 36. Puntos sobre el círculo unitario. **Figura 37.** Funciones trigonométricas del número real t .

Cuando las distancias sobre un círculo unitario son determinadas por números reales, los "agradables" números reales resultan ser partes fraccionarias de π ya que la circunferencia del círculo es de 2π . Si se usan números enteros para determinar puntos sobre un círculo unitario, los puntos no son tan "agradables". Por ejemplo, en la figura 36, -3 determina al punto E , que se encuentra muy cerca de $(-1, 0)$, el punto correspondiente a $-\pi$.

Funciones trigonométricas de un número real

Ya que cada número real t corresponde a una posición única sobre el círculo unitario, se pueden definir las funciones trigonométricas de un número real.

Funciones trigonométricas del número real t

Sea t cualquier número real y $T(x, y)$ el punto sobre el círculo unitario que se identifica con t .

1. La coordenada y de $T(x, y)$ es el **seno** de t ; esto es:

$$\text{sen } t = y.$$

2. La coordenada x de $T(x, y)$ es el **coseno** de t ; es decir:

$$\text{cos } t = x.$$

3. La **tangente** de t , dada por $\tan t = \frac{y}{x}$, se define para todos los números reales t para los cuales $x \neq 0$.

4. La **cotangente** de t , dada por $\cot t = \frac{x}{y}$, se define para todos los números reales t para los cuales $y \neq 0$.

5. La **secante** de t , dada por $\sec t = \frac{1}{x}$, se define para todos los números reales t para los cuales $x \neq 0$.

6. La **cosecante** de t , dada por $\csc t = \frac{1}{y}$, se define para todos los números reales t para los cuales $y \neq 0$.

Estas definiciones generalizan las definiciones de las funciones trigonométricas para un ángulo agudo señaladas en la sección 6.3. En el triángulo rectángulo OTB de la figura 37, nótese que si un ángulo θ se mide en radianes, entonces $\theta = t$, y

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{1} = y = \operatorname{sen} t$$

$$\cos \theta = \frac{x}{1} = x = \cos t$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \tan t \quad (x \neq 0)$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \cot t \quad (y \neq 0)$$

$$\sec \theta = \frac{1}{x} = \sec t \quad (x \neq 0)$$

$$\csc \theta = \frac{1}{y} = \csc t \quad (y \neq 0).$$

Así pues, las funciones trigonométricas del número real t coinciden con las funciones trigonométricas del ángulo θ con medida radián t .

EJEMPLO 4

Usar los círculos de la figura 38 y calcular los valores de las seis funciones trigonométricas para los valores de t que aparecen a) hasta f).

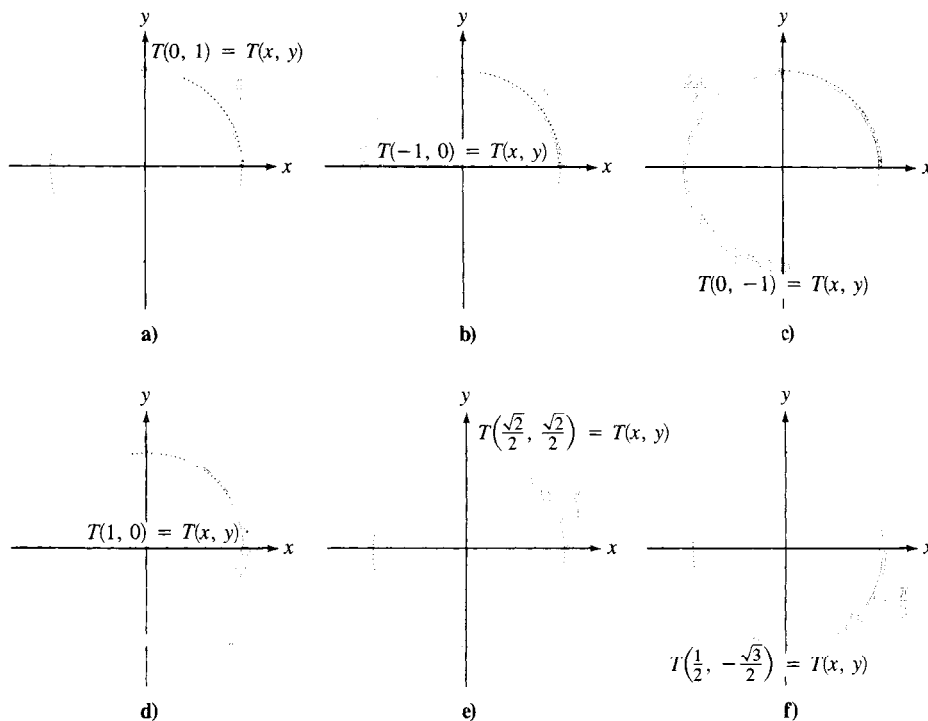


Figura 38

a) $t = \frac{\pi}{2}$ (además $\frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \dots$ y $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, \dots$)

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = y = 1$$

$$\csc \frac{\pi}{2} = \frac{1}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = x = 0$$

$$\sec \frac{\pi}{2} = \frac{1}{x} = \frac{1}{0} \quad \text{no se define}$$

$$\tan \frac{\pi}{2} = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} \quad \text{no se define} \quad \cot \frac{\pi}{2} = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$$

b) $t = \pi$ (además $3\pi, 5\pi, \dots$ y $-\pi, -3\pi, -5\pi, \dots$)

$$\operatorname{sen} \pi = y = 0 \quad \csc \pi = \frac{1}{y} = \frac{1}{0} \quad \text{no se define}$$

$$\cos \pi = x = -1 \quad \sec \pi = \frac{1}{x} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\tan \pi = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0 \quad \cot \pi = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} \quad \text{no se define}$$

c) $t = \frac{3\pi}{2}$ (además $\frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \dots$ y $-\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{9\pi}{2}, \dots$)

$$\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = y = -1 \quad \csc \frac{3\pi}{2} = \frac{1}{y} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\cos \frac{3\pi}{2} = x = 0 \quad \sec \frac{3\pi}{2} = \frac{1}{x} = \frac{1}{0} \quad \text{no se define}$$

$$\tan \frac{3\pi}{2} = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} \quad \text{no se define} \quad \cot \frac{3\pi}{2} = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$$

d) $t = 2\pi$ (además $0, 4\pi, 6\pi, \dots$ y $-2\pi, -4\pi, -6\pi, \dots$)

$$\operatorname{sen} 2\pi = y = 0 \quad \csc 2\pi = \frac{1}{y} = \frac{1}{0} \quad \text{no se define}$$

$$\cos 2\pi = x = 1 \quad \sec 2\pi = \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan 2\pi = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0 \quad \cot 2\pi = \frac{x}{y} = \frac{1}{0} \quad \text{no se define}$$

e) $t = \frac{\pi}{4}$ (además $\frac{9\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \dots$ y $-\frac{7\pi}{4}, -\frac{15\pi}{4}, -\frac{23\pi}{4}, \dots$)

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = y = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \csc \frac{\pi}{4} = \frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sec \frac{\pi}{4} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \quad \cot \frac{\pi}{4} = \frac{x}{y} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

f) $t = -\frac{\pi}{3}$ (además $-\frac{7\pi}{3}, -\frac{13\pi}{3}, \dots$ y $\frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \frac{17\pi}{3}, \dots$)

$$\operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{3}\right) = y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \csc \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{y} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) = x = \frac{1}{2} \quad \sec \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \quad \cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Los signos de las funciones trigonométricas

Considerar que las coordenadas de los puntos en un círculo unitario tiene signo de acuerdo con los cuadrantes en que se localizan:

$$\text{I: } (+, +), \quad \text{II: } (-, +), \quad \text{III: } (-, -), \quad \text{IV: } (+, -).$$

Con esta información se sabe que los signos de las funciones trigonométricas del número real t dependen del cuadrante donde se encuentre el punto $T(x, y)$ determinado por t .

Regla de los signos de las funciones trigonométricas

Cuadrante	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t
I	+	+	+	+	+	−
II	+	−	−	−	−	+
III	−	−	+	+	−	−
IV	−	+	−	−	+	−

Evaluación de funciones trigonométricas

Es fácil encontrar el valor de las funciones trigonométricas para cualquier número real t con una calculadora que esté en el modo de radianes. Simplemente teclee los números reales y oprima la tecla de la función adecuada o, si se usan las relaciones recíprocas, oprima la función adecuada y luego la tecla $\boxed{1/x}$. El ejemplo que se presenta a continuación ilustra este procedimiento.

EJEMPLO 5

Encontrar cada uno de los valores de las funciones trigonométricas indicadas.

a) sen 5

Para encontrar el seno del número real 5 se efectúa lo siguiente:

$$\text{ALG \& RPN: } 5 \boxed{\text{sen}} \rightarrow \boxed{-0.9589243}$$

Por tanto, $\text{sen } 5 = -0.9589$, aproximado a cuatro cifras decimales. Recordar que la calculadora deberá estar en radianes y *no* en grados.

b) tan (−27)

$$\text{ALG \& RPN: } 27 \boxed{+/-} \boxed{\text{tan}} \rightarrow \boxed{3.2737038}$$

Por tanto, $\tan(-27) = 3.2737$, aproximado a cuatro cifras decimales. Recordar que diferentes tipos de calculadoras pueden dar diferentes valores y que algunas calculadoras usan la tecla $\boxed{\text{CHS}}$ en vez de $\boxed{+/-}$. Por ejemplo, otra calculadora daría como resultado 3.2737134. Las dos respuestas se aproximan a 3.2737.

c) $\cot 0$

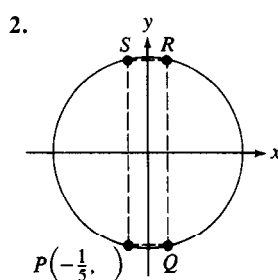
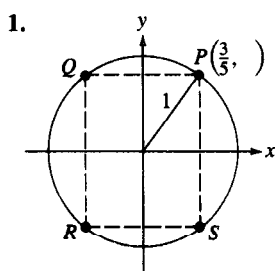
ALG & RPN: $0 \boxed{\tan} \boxed{1/x} \rightarrow \boxed{\text{Error}}$

Nótese que el mensaje de error se muestra en la pantalla porque $\cot 0$ está indeterminado. Cuando

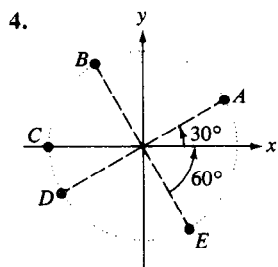
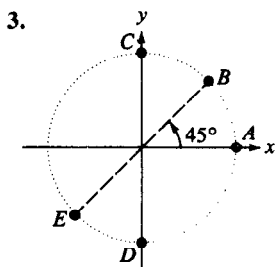
$t = 0$, $T(x, y) = (1, 0)$, y como $y = 0$, $\cot t = \frac{x}{y}$ está indeterminado. \square

6.5. Ejercicios

En los ejercicios 1-2 encontrar las coordenadas de los cuatro puntos P , Q , R y S que se muestran en la figura.



En los ejercicios 3-4 encontrar las coordenadas de los puntos A , B , C , D y E de la figura.

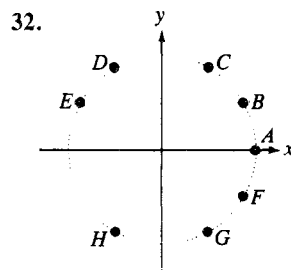
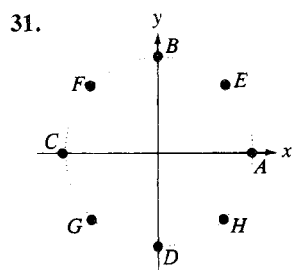


5. ¿Cuál es la circunferencia de un círculo unitario?
6. ¿Cuáles son las coordenadas del punto inicial que se usa para determinar las distancias y direcciones en un círculo unitario?
7. Si se describe una distancia positiva en un círculo unitario, ¿en que dirección del círculo unitario se mueve uno?
8. Si se describe una distancia negativa en un círculo unitario, ¿en que dirección del círculo unitario se mueve uno?
9. Si el número real s determina al punto $T(a, b)$ en el círculo unitario, cuáles son las coordenadas del punto determinado por a) $-s$, b) $\pi - s$, c) $\pi + s$, d) $s - \pi$, e) $s + \frac{\pi}{2}$, y f) $s - \frac{\pi}{2}$?
10. Si el número real s determina al punto $T(-a, -b)$ en el círculo unitario, cuáles son las coordenadas del punto determinado por a) $-s$, b) $\pi - s$, c) $\pi + s$, d) $s - \pi$, e) $s + \frac{\pi}{2}$, y f) $s - \frac{\pi}{2}$?

En los ejercicios 11-30 encontrar las coordenadas del punto en el círculo unitario dado por el número real.

- | | | | |
|-----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|
| 11. $\frac{\pi}{2}$ | 12. π | 13. $-\frac{\pi}{2}$ | 14. $-\pi$ |
| 15. $-\frac{3\pi}{2}$ | 16. $\frac{3\pi}{2}$ | 17. 2π | 18. -2π |
| 19. $\frac{\pi}{4}$ | 20. $\frac{3\pi}{4}$ | 21. $\frac{5\pi}{4}$ | 22. $\frac{7\pi}{4}$ |
| 23. $\frac{\pi}{3}$ | 24. $\frac{2\pi}{3}$ | 25. $\frac{4\pi}{3}$ | 26. $\frac{5\pi}{3}$ |
| 27. $\frac{\pi}{6}$ | 28. $\frac{5\pi}{6}$ | 29. $\frac{7\pi}{6}$ | 30. $\frac{11\pi}{6}$ |

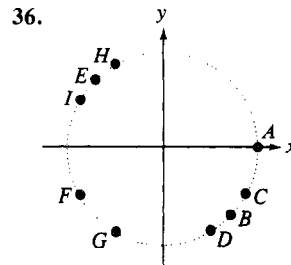
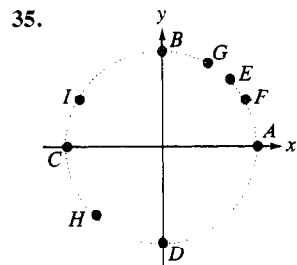
En los ejercicios 31-32 determinar cuál es la menor distancia que se necesita mover un punto en dirección levógira sobre el círculo unitario si éste se mueve desde el punto A al punto a) A, b) B, c) C, d) D, e) E, f) F, g) G y h) H.



33. Repetir el ejercicio 31 con el punto moviéndose en dirección de las manecillas del reloj.

34. Repetir el ejercicio 32 con el punto moviéndose en dirección de las manecillas del reloj.

En los ejercicios 35-36 dar los dos números reales entre -2π y 2π , inclusive, que determinan a los puntos a) A, b) B, c) C, d) D, e) E, f) F, g) G, h) H, i) I.



En los ejercicios 37-52 utilizar el círculo unitario (sin valores de calculadora) y encontrar a) $\sin t$, b) $\cos t$, c) $\tan t$, d) $\csc t$, e) $\sec t$ y f) $\cot t$, para el valor dado del número real t .

- | | | | |
|----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 37. $-\frac{\pi}{2}$ | 38. $-\pi$ | 39. $-\frac{3\pi}{2}$ | 40. 0 |
| 41. $\frac{9\pi}{4}$ | 42. $-\frac{3\pi}{4}$ | 43. $\frac{5\pi}{4}$ | 44. $-\frac{\pi}{4}$ |
| 45. $\frac{\pi}{3}$ | 46. $-\frac{2\pi}{3}$ | 47. $-\frac{4\pi}{3}$ | 48. $\frac{5\pi}{3}$ |
| 49. $\frac{\pi}{6}$ | 50. $\frac{5\pi}{6}$ | 51. $-\frac{\pi}{6}$ | 52. $-\frac{5\pi}{6}$ |

En los ejercicios 53-56 supóngase que t determina un punto en el cuadrante dado. ¿Cuáles de los seis valores de las funciones trigonométricas son positivos en dicho cuadrante?

53. I

54. II

55. III

56. IV

En los ejercicios 57-64 utilizar una calculadora (en el modo de radianes) para encontrar a) $\sin t$, b) $\cos t$, c) $\tan t$, d) $\csc t$, e) $\sec t$, f) $\cot t$, dado el valor del número real t . Aproximar a cuatro cifras decimales.

57. $t = 7$

58. $t = -3$

59. $t = -12.5$

60. $t = 38.2$

61. $t = \pi$

62. $t = \frac{\pi}{2}$

63. $t = -\frac{\pi}{4}$

64. $t = \frac{\pi}{3}$

Para repaso

65. Resolver el triángulo rectángulo en el cual $B = 54^\circ 27'$ y $a = 9.5$ usando las partes dadas en lugar de usar las partes calculadas. Recuerde que $C = 90^\circ$.

Resuelva:

66. **Aeronáutica.** Un avión que vuela a una altura de 5 mi pasa por encima de un observador. Un minuto más tarde, el ángulo de elevación del avión es $29^\circ 30'$. Aproximadamente ¿qué tan rápido vuela el avión?
67. **Navegación.** Un barco navega durante 2 horas a una velocidad de 28.0 mph con dirección $148^\circ 40'$. ¿Qué tan al sur ha navegado el barco?
68. **Navegación.** Un bote viaja a una velocidad constante y produce ondas de proa que se mueven a 7.75 mph. Si el ángulo entre las ondas es de $52^\circ 40'$, utilice la fórmula de ondas de proa $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{v_w}{v_b}$ para encontrar la velocidad del bote.

En los ejercicios 69-70, como preparación para la siguiente sección, determinar los valores de x para los cuales la función se incrementa y para los cuales la función disminuye.

69. $f(x) = (x - 1)^2 - 3$

70. $f(x) = -|x + 2| + 5$

6.6. GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Funciones periódicas

En los capítulos anteriores el estudio de varios tipos de funciones incluía el encontrar sus gráficas. En esta sección se considera las gráficas de las seis funciones trigonométricas, comenzando con las funciones seno y coseno. Recordar que un número real t determina a un punto T en el círculo unitario y que tiene coordenadas $(\cos t, \sin t)$. Ya que el círculo unitario tiene una circunferencia de 2π , el punto determinado por $t + 2\pi$ es el mismo punto determinado por t , así pues,

$$\cos(t + 2\pi) = \cos t \quad \text{y} \quad \sin(t + 2\pi) = \sin t,$$

para cada número real t . Por tanto, los valores de las funciones seno y coseno se repiten de manera cíclica a intervalos de distancia 2π lo que hace a estas funciones *periódicas* con un *periodo* de 2π de acuerdo con la definición de la página siguiente.

Una función es **periódica** si existe un número real positivo p tal que

$$f(t + p) = f(t)$$

para cada número real t en el dominio de f . Al número p más pequeño para el que una función f es periódica se le llama el **periodo** de f .

Para graficar una función periódica con un periodo p , se puede tomar en cuenta un intervalo de longitud p , graficar los puntos en ese intervalo, y como la gráfica es periódica, obtener el resto de la gráfica. Para las funciones seno y coseno se toman en cuenta el intervalo $[0, 2\pi]$.

Gráficas de las funciones seno y coseno

Supóngase que se hace una tabla combinada para los valores con las funciones seno y coseno,

$$y = \text{sen } x \quad \text{y} \quad y = \text{cos } x.$$

Una calculadora puesta en el modo de radianes nos facilita encontrar los valores. Nótese que x y y son usadas como variables que definen a estas funciones y *no* como coordenadas de un punto en el círculo unitario que es determinado por un número real t .

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\text{sen } x$	0	0.7	1	0.7	0	-0.7	-1	-0.7	0
$\text{cos } x$	1	0.7	0	-0.7	-1	-0.7	0	0.7	1

Queda claro que los valores de las funciones seno y coseno se repiten.

Cuando x varía entre	$\text{sen } x$	$\text{cos } x$
0 a $\frac{\pi}{2}$	aumenta de 0 a 1	disminuye de 1 a 0
$\frac{\pi}{2}$ a π	disminuye de 1 a 0	disminuye de 0 a -1
π a $\frac{3\pi}{2}$	disminuye de 0 a -1	aumenta de -1 a 0
$\frac{3\pi}{2}$ a 2π	aumenta de -1 a 0	aumenta de 0 a 1

La tabla de valores de las funciones seno y coseno no incluye valores enteros de x (excepto por 0). En su lugar, la tabla contiene los valores "agradables" relativos a estas funciones que son fracciones de π .

La gráfica de $y = \text{sen } x$ en la figura 39 muestra en color los nueve puntos de la tabla. La extensión de la gráfica se muestra en negro. Ya que la función seno es periódica con periodo de 2π , sabemos que la gráfica se extiende en las dos direcciones como lo muestra la figura. El intervalo $[0, 2\pi]$ es un periodo o ciclo de la función seno.

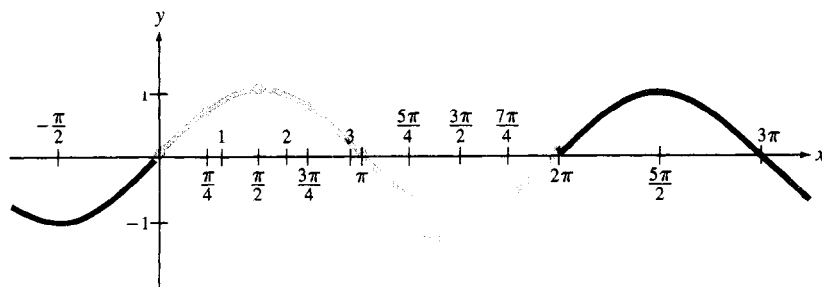


Figura 39

Las mismas observaciones se aplican a la gráfica de la función de coseno que aparece en la figura 40. Si se sabe que las funciones de seno y coseno son periódicas, se puede dibujar sus gráficas rápidamente si se grafican sólo los puntos determinados por los números reales $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2},$ y 2π .

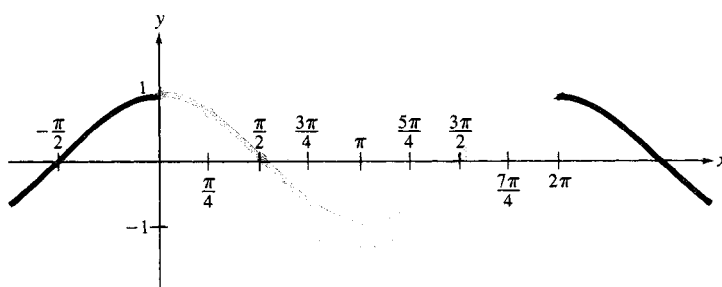


Figura 40

Gráficas de las funciones trigonométricas restantes

A diferencia de las funciones seno y coseno que están definidas para todos los números reales, las cuatro funciones restantes no son definidas para algunos números reales. Por ejemplo, si el número real t determina al punto $T(x, y)$ en el círculo unitario,

$$\tan t = \frac{y}{x} \quad \text{y} \quad \sec t = \frac{1}{x}.$$

Estas dos funciones no están definidas cuando $x = 0$, o sea, cuando $T(x, y)$ se encuentra sobre el eje y . Por tanto, los valores

$$\pm \frac{\pi}{2}, \quad \pm \frac{3\pi}{2}, \quad \pm \frac{5\pi}{2}, \quad \pm \frac{9\pi}{2}, \dots$$

no se incluyen en los dominios de las funciones tangente y secante. Así mismo, ya que

$$\cot t = \frac{x}{y} \quad \text{y} \quad \csc t = \frac{1}{y},$$

estas dos funciones no están definidas cuando $y = 0$, o sea, cuando $T(x, y)$ se encuentra sobre el eje x . Por tanto, los valores

$$0, \quad \pm \pi, \quad \pm 2\pi, \quad \pm 3\pi, \quad \pm 4\pi, \dots$$

no se incluyen en los dominios de las funciones cotangente y cosecante.

Conforme t varía de 0 a $\pi/2$, $\tan t$ comienza en cero y empieza a crecer y crecer hasta que el valor de t es casi $\pi/2$ (x se acerca a 0 y y se acerca a 1). Se dice que $\tan t$ **crece sin límite**, o tiende a $+\infty$ conforme que t tiende a $\pi/2$. Así mismo, conforme t tiende a $\pi/2$ a partir mayores que a $\pi/2$ ($\tan t = y/x$ es negativo ya que $y > 0$ y $x < 0$), $\tan t$ **decrece sin límite**, o tiende a $-\infty$. Por tanto, conforme t varía de 0 a $\pi/2$, $\tan t$ varía de 0 a $+\infty$, y, cuando t varía de $\pi/2$ a π , $\tan t$ varía de $-\infty$ a 0 . La variación de $\tan t$ conforme t varía de 0 a 2π se resume en la tabla siguiente.

Cuando t varía de	$\tan t$
0 a $\frac{\pi}{2}$	aumenta de 0 a $+\infty$
$\frac{\pi}{2}$ a π	aumenta de $-\infty$ a 0
π a $\frac{3\pi}{2}$	aumenta de 0 a $+\infty$
$\frac{3\pi}{2}$ a 2π	aumenta de $-\infty$ a 0

Por lo tanto, conforme t varía de $\pi/2$ a $3\pi/2$, $\tan t$ varía en todo el conjunto de números reales. Después en el próximo intervalo de $3\pi/2$ a $5\pi/2$, $\tan t$ vuelve a variar en todo el conjunto de números reales. En realidad, en cualquier intervalo con una longitud de π unidades, la función tangente se comporta de la misma manera. Esto significa que la función tangente es periódica con un periodo de π . El comportamiento de esta función se comprende mejor cuando se analiza su gráfica.

La tabla que se muestra a continuación representa los valores para la función tangente.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\tan x$	0	0.6	1	1.7	no definida	-1.7	-1	-0.6	0	1	no definida	-1	0

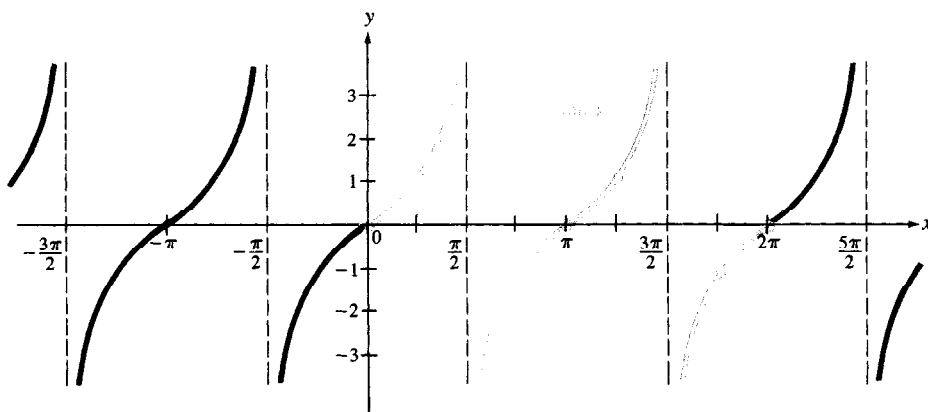


Figura 41

En la gráfica de la función tangente de la figura 41, las líneas punteadas, llamadas **asíntotas verticales**, son líneas que se acercan a la gráfica pero nunca la intersecan. Los valores de x para que estas líneas existan

son cuando $\tan x$ no está definida ($\pm \pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \dots$). La sección de la gráfica correspondiente a la tabla está en color. La extensión de la gráfica está en negro. Ya que la gráfica es periódica, la gráfica se extiende hacia la derecha y hacia la izquierda repetidamente con la misma forma que tiene entre $\pi/2$ y $3\pi/2$.

La gráfica de la función cotangente se puede determinar si se usa la identidad $\cot x = 1/\tan x$. Para secante y cosecante usamos $\sec x = 1/\cos x$ y $\csc x = 1/\sin x$. La tabla de valores para las funciones secante y cosecante se forma usando estas identidades y las gráficas se muestran en las figuras 42, 43 y 44.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$\cot x$	no definida	0.6	0	-0.6	no definida	0.6	0	-0.6	no definida
$\sec x$	1	2	no definida	-2	-1	-2	no definida	2	1
$\csc x$	no definida	1.2	1	1.2	no definida	-1.2	-1	-1.2	no definida

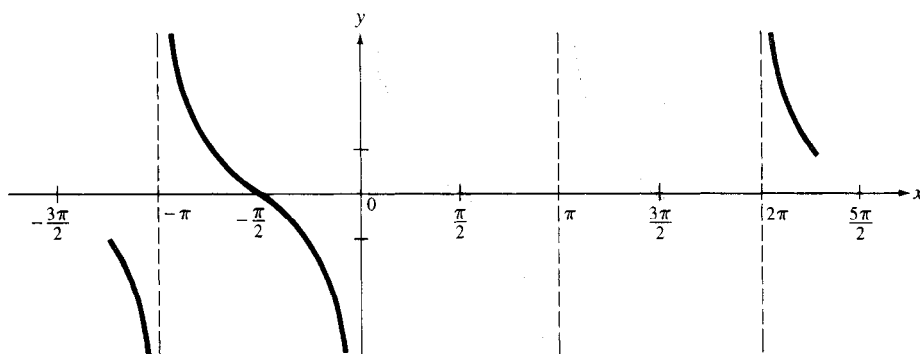


Figura 42

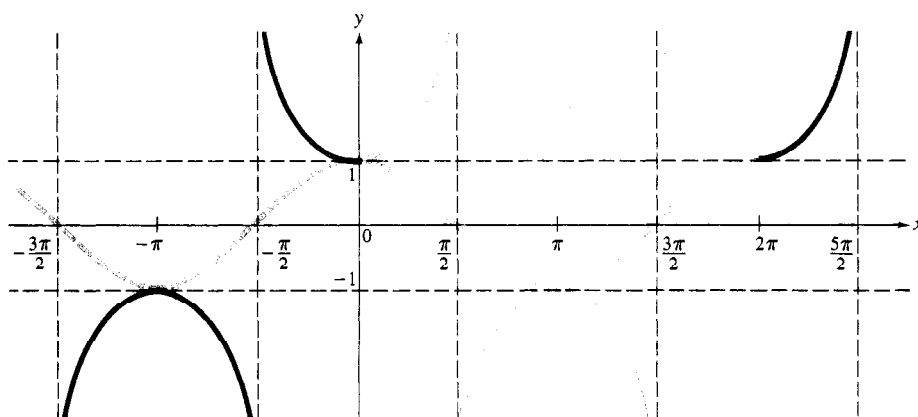


Figura 43

Recordar que la función secante es recíproca a la función coseno. Si se grafican $y = \cos x$ y $y = \sec x$ en el mismo conjunto de coordenadas (como en la figura 43) entonces se puede observar la relación recíproca. Nótese que cuando el coseno se anula (como en $-\pi/2$ y $3\pi/2$), la secante no está definida, cuando coseno tiene valores de 1 o -1 (como en 0 o π), la secante tiene estos mismos valores y conforme coseno disminuye de 1 a 0, su recíproca se incrementa de 1 a ∞ .

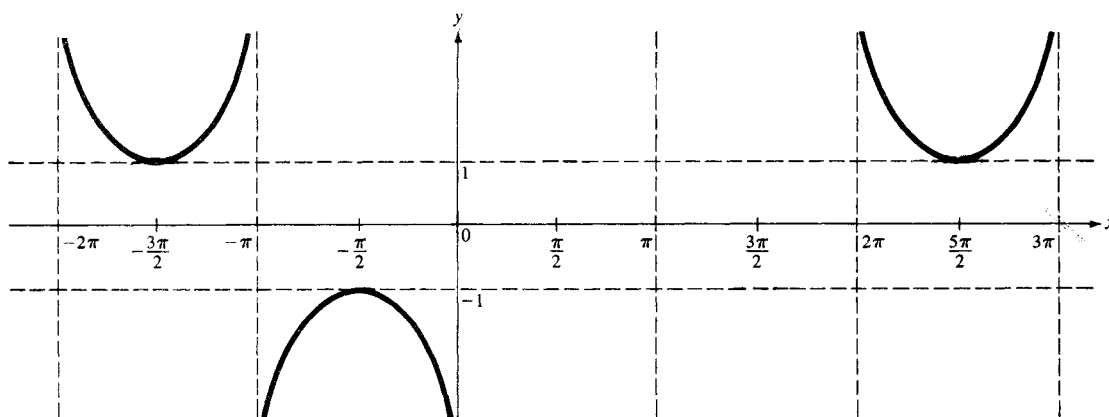


Figura 44

Ya que la función cosecante es recíproca a la función seno, enfatizamos esta relación representando gráficamente $y = \sin x$ y $y = \csc x$ en el mismo conjunto de coordenadas en la figura 44.

Graficación de las variaciones de las funciones trigonométricas

Las variaciones de las seis funciones trigonométricas pueden ser graficadas con la información que ya se tiene. Ya se conoce la gráfica de $y = f(x)$ así que la gráfica de $y = f(x) + D$ puede ser dibujada rápidamente si se mueve la gráfica de $y = f(x)$, $|D|$ unidades hacia arriba, si $D > 0$ o $|D|$ unidades hacia abajo si $D < 0$.

EJEMPLO 1

Graficar las funciones $y = \sin x - 3$ y $y = \sin x + 1$ comenzando con la gráfica de $y = \sin x$ como principio.

Nótese que $\sin x - 3 \neq \sin(x - 3)$. Para graficar $y = \sin x - 3$, traslade la gráfica de $\sin x$ tres unidades hacia abajo, y para graficar $y = \sin x + 1$, traslade la gráfica de $\sin x$ una unidad hacia arriba (véase la figura 45).

Si se conoce la gráfica de la función $y = f(x)$ entonces la gráfica de $y = Af(x)$ puede ser dibujada si se multiplica por la constante A cada valor de y , en $y = f(x)$. Si $A > 1$, la gráfica de $y = Af(x)$ será una versión "estirada" de la gráfica de $y = f(x)$. Si $0 < A < 1$, la gráfica de $y = Af(x)$ será una versión comprimida de $y = f(x)$. Si $A < 0$, entonces $-A > 0$ y la gráfica de $y = Af(x)$ será una reflexión de $y = -Af(x)$ sobre el eje x .

EJEMPLO 2

Graficar las funciones $y = 2 \sin x$ y $y = -3 \sin x$ comenzando con la gráfica de $y = \sin x$.

Puede ser útil construir una tabla de valores para estas dos funciones (véase la figura 46).

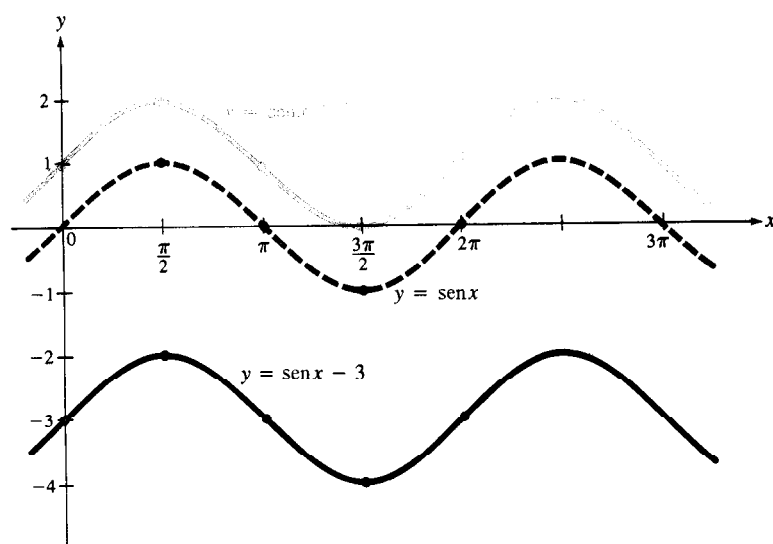


Figura 45

x	$\text{sen } x$	$2 \text{ sen } x$	$-3 \text{ sen } x$
0	0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	0.707	1.414	-2.121
$\frac{\pi}{2}$	1	2	-3
$\frac{3\pi}{4}$	0.707	1.414	-2.121
π	0	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-2	3
2π	0	0	0

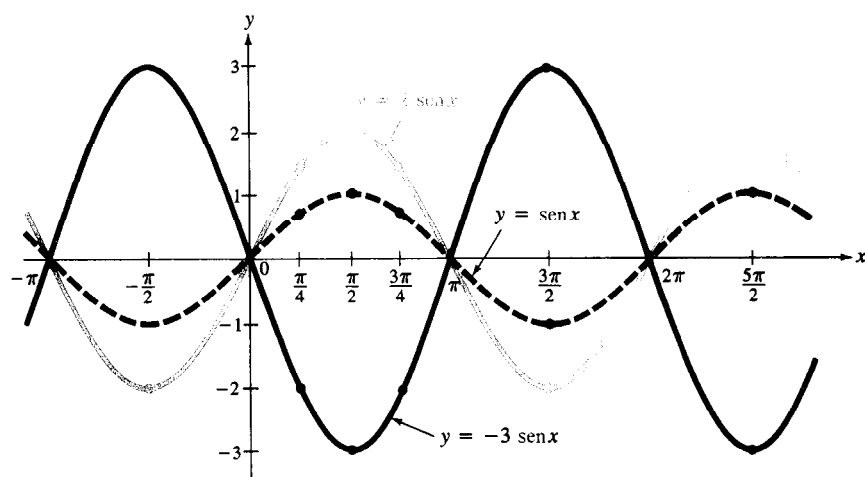


Figura 46

Amplitud del seno y del coseno

Al número $|A|$ en las funciones

$$y = A \text{ sen } x \text{ y } y = A \text{ cos } x$$

se le llama **amplitud** de la función.

Ya que $y = \text{sen } x = 1 \cdot \text{sen } x$ y $y = \text{cos } x = 1 \cdot \text{cos } x$, la amplitud de las funciones seno y coseno es 1. Intuitivamente, vemos que la amplitud de una función indica qué tanto suben o bajan los valores de la función. La amplitud de $y = 2 \text{ sen } x$ es 2 y la amplitud de $y = -3 \text{ sen } x$ es 3.

A continuación se estudian las gráficas de funciones trigonométricas en donde la variable x es multiplicada por una constante B .

EJEMPLO 3

Graficar las funciones $y = \sin 2x$ y $y = \sin \frac{1}{2}x$ y compararlas con la gráfica de $y = \sin x$.

Tómese en cuenta la tabla de valores a la izquierda. La figura 47 muestra las gráficas de las dos funciones.

x	$\sin 2x$	$\sin \frac{1}{2}x$
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	1	0.707
$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\frac{3\pi}{4}$	-1	0.707
π	0	0
$\frac{5\pi}{4}$	1	-0.707
$\frac{3\pi}{2}$	0	-1
$\frac{7\pi}{4}$	-1	-0.707
2π	0	0

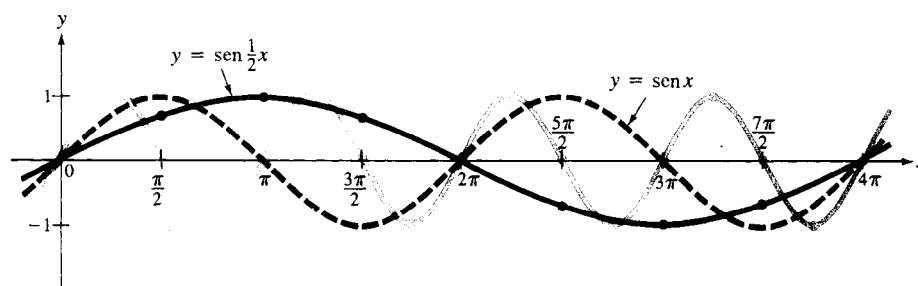


Figura 47

Del ejemplo 3 se puede ver que en las funciones de la forma

$$y = \sin Bx, \quad B > 0,$$

la amplitud es la misma que en $y = \sin x$, pero el periodo disminuye si $B > 1$ y aumenta si $B < 1$. Por ejemplo, cuando $B = 2$, el periodo de $y = \sin 2x$ es π , mientras que cuando $B = \frac{1}{2}$ el periodo de $y = \sin \frac{1}{2}x$ es 4π . Éstos son casos especiales del teorema siguiente.

Periodo del seno y del coseno

El **periodo** de las funciones

$$y = \sin Bx \text{ y } y = \cos Bx, \quad B > 0,$$

es $\frac{2\pi}{B}$.

Las gráficas de las funciones de la forma

$$y = A \operatorname{sen} Bx \text{ y } y = A \cos Bx$$

se pueden obtener si se consideran los planteamientos anteriores acerca de la amplitud y del periodo.

EJEMPLO 4

Graficar la función $y = 4 \cos \frac{1}{3}x$ y compararla con la gráfica de $y = \cos x$.

La amplitud de $y = 4 \cos \frac{1}{3}x$ es $|A| = |4| = 4$, y el periodo es $\frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{1/3} = 6\pi$. Por tanto, para graficar la función debemos tomar en cuenta los valores de x en el intervalo $[0, 6\pi]$. Ver figura 48. Nótese que la función coseno empieza en el punto más alto del periodo, llega a su parte más baja a la mitad del camino de su periodo y vale 0 en un cuarto y tres cuartos del camino de su periodo. Esto es cierto para cualquier longitud de periodo.

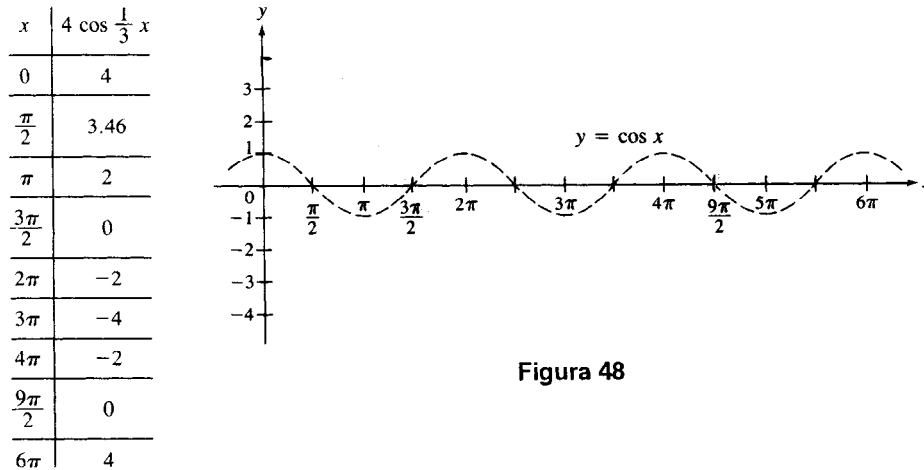


Figura 48

6.6. Ejercicios

En los ejercicios 1-6 dibujar la gráfica de la función dada.

1. $y = \operatorname{sen} x - 2$

2. $y = \cos x - 2$

3. $y = \cos x + 3$

4. $y = \operatorname{sen} x + 3$

5. $y = \tan x + 1$

6. $y = \tan x - 2$

En los ejercicios 7-30 a) dar la amplitud, b) dé el periodo y c) dibujar la gráfica de cada una de las funciones.

7. $y = 3 \operatorname{sen} x$

8. $y = 3 \cos x$

9. $y = -2 \cos x$

10. $y = -2 \csc x$

11. $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$

12. $y = \frac{1}{2} \cos x$

13. $y = -\frac{1}{2} \cos x$

14. $y = -\frac{1}{2} \sec x$

15. $y = \operatorname{sen} 4x$

16. $y = \cos 4x$

17. $y = \cos \frac{1}{3}x$

18. $y = \operatorname{sen} \frac{1}{3}x$

19. $y = 3 \tan x$

20. $y = \frac{1}{4} \cot x$

21. $y = -\frac{1}{4} \tan x$

22. $y = -3 \tan x$

23. $y = \tan \frac{1}{2}x$

24. $y = \tan 2x$

25. $y = 3 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$

26. $y = 3 \cos \frac{1}{2}x$

27. $y = 4 \cos 3x$

28. $y = 4 \operatorname{sen} 3x$

29. $y = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{3}x$

30. $y = -2 \cos \frac{1}{3}x$

Para cada una de las funciones de los ejercicios 31-36 dar a) el dominio de la función y b) el condominio de la función.

31. $y = \sin x$

32. $y = \cos x$

33. $y = \tan x$

34. $y = \cot x$

35. $y = \sec x$

36. $y = \csc x$

Recordar que una función f es par si $f(-x) = f(x)$, y es impar si $f(-x) = -f(x)$. Utilizar esta información para resolver ejercicios 37-42.

37. Demostrar que la función coseno es par.

38. Demostrar que la función seno es impar.

39. Demostrar que la función secante es par.

40. Demostrar que la función cosecante es impar.

41. Demostrar que la función tangente es impar.

42. Demostrar que la función cotangente es impar.

43. Demostrar que la función seno tiene un periodo de 2π .

44. Demostrar que la función coseno tiene un periodo de 2π .

En los ejercicios 45-50 considerar la función dada en el intervalo $[0, 2\pi]$. ¿En qué intervalos la función a) aumenta y b) disminuye?

45. $y = \sin x$

46. $y = \cos x$

47. $y = \tan x; x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

48. $y = \cot x; x \neq 0, \pi, 2\pi$

49. $y = \sec x; x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

50. $y = \csc x; x \neq 0, \pi, 2\pi$

Verificación:

En los ejercicios 51-53 encontrar a) las coordenadas del punto sobre el círculo unitario determinado por el número real dado, b) $\sin t$, c) $\cos t$, d) $\tan t$, e) $\csc t$, f) $\sec t$, g) $\cot t$.

51. $\frac{3\pi}{4}$

52. $\frac{2\pi}{3}$

53. $\frac{7\pi}{6}$

En los ejercicios 54-55 utilizar una calculadora (en el modo de radianes) para encontrar a) $\sin t$, b) $\cos t$, c) $\tan t$, d) $\csc t$, e) $\sec t$, f) $\cot t$.

54. $t = -5.9$

55. $t = -\frac{11\pi}{3}$

56. Física. Una luz penetra en la superficie de un lago de tal manera que $A = 40^\circ 30'$. Utilice 1.3 como el índice de refracción del agua, 1.0003 como el índice de refracción del aire y la ecuación de onda de la luz $I_w/I_a = \sin A/\sin W$ para encontrar W .

6.7 MÁS SOBRE LA GRAFICACIÓN: LAS FUNCIONES SINUSOIDALES

Funciones sinusoidales

En la sección 6.6 se estudió las gráficas de las funciones de seno y coseno junto con las variaciones de estas funciones cuando las amplitudes y los periodos se cambian. En esta sección se desarrollan las bases para graficar dos importantes tipos de funciones que también son variaciones de las funciones seno y coseno, llamadas **funciones sinusoidales** (o senoidales). Éstas adoptan la forma de

Las funciones sinusoidales tienen varias aplicaciones a problemas físicos. Hemos visto que las gráficas de

$$y = \operatorname{sen} x + D \quad \text{y} \quad y = \cos x + D$$

pueden ser obtenidas de las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ si estas gráficas se mueven hacia arriba o abajo $|D|$ unidades que dependieron de que D sea positiva o negativa, respectivamente. De manera similar, las gráficas de

$$y = \operatorname{sen}(x - C) \quad \text{y} \quad y = \cos(x - C)$$

pueden ser obtenidas de las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ si estas gráficas se mueven hacia la derecha o izquierda $|C|$ unidades que dependiendo de que C sea positiva o negativa, respectivamente.

EJEMPLO 1

Graficar la función $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ y compararla con la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$.

A continuación se presenta una tabla de valores, y la gráfica se muestra en la figura 49. Nótese que la gráfica de $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ puede ser obtenida de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ si ésta se mueve $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la derecha de manera que el ciclo comience en $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y termine en $\left(2\pi + \frac{\pi}{2}, 0\right) = \left(\frac{5\pi}{2}, 0\right)$.

x	$\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
0	-1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	-1
$\frac{5\pi}{2}$	0

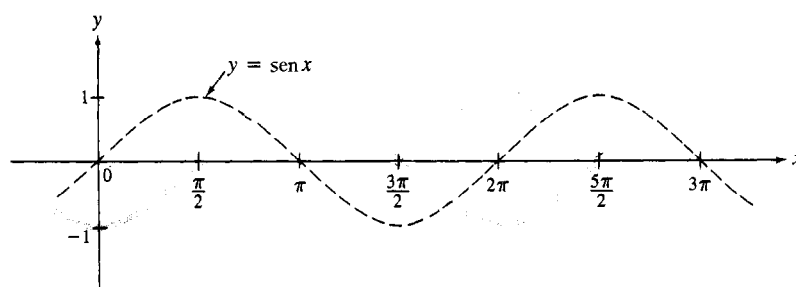


Figura 49

EJEMPLO 2

Graficar la función $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ y compararla con la gráfica de $y = \cos x$.

La figura 50 muestra esta gráfica. Nótese que la gráfica de $y = \cos x$ puede ser movida $\frac{\pi}{4}$ unidades hacia la izquierda para obtener la gráfica de $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ de manera que el ciclo comience en $\left(-\frac{\pi}{4}, 1\right)$ y termine en $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi, 1\right) = \left(\frac{7\pi}{4}, 1\right)$.

x	$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
$-\frac{\pi}{4}$	1
0	0.7
$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{2}$	-0.7
$\frac{3\pi}{4}$	-1
$\frac{5\pi}{4}$	0
$\frac{7\pi}{4}$	1

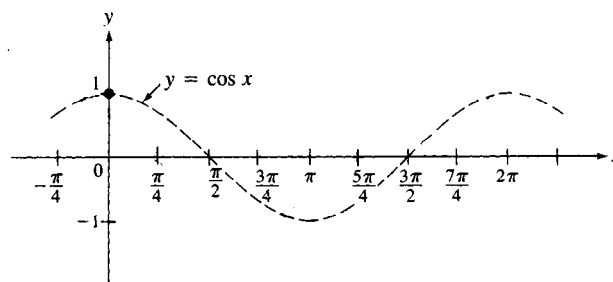


Figura 50

Defasamiento

Considere la función

$$y = \sin(x - C) \text{ y } y = \cos(x - C)$$

en donde C es un número real. Al número C se le llama el **defasamiento** de cada función.

Ahora se puede dibujar la gráfica de una función tal como

$$y = 3 \sin(2x - \pi).$$

Empezar factorizando el 2 de $(2x - \pi)$ y reescribiendo la función como una función sinusoidal.

$$y = 3 \sin 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

De esta forma se puede identificar a la amplitud como $|3| = 3$, el periodo como $\frac{2\pi}{2} = \pi$ y el defasamiento como $\left|-\frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2}$. Un ciclo de esta gráfica empieza en $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y termina π unidades después en $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$. Primero graficar $y = \sin 2x$ (véase la figura 47 de la sección 6.6), utilícese para encontrar la gráfica de $y = 3 \sin 2x$ y luego traslade la gráfica hacia la *derecha* $\frac{\pi}{2}$ unidades (ya que $C = \frac{\pi}{2} > 0$, la traslación se efectúa hacia la derecha) para obtener la gráfica de $y = 3 \sin 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. La gráfica aparece en la figura 51. La tabla de valores adyacente sirve como una verificación.

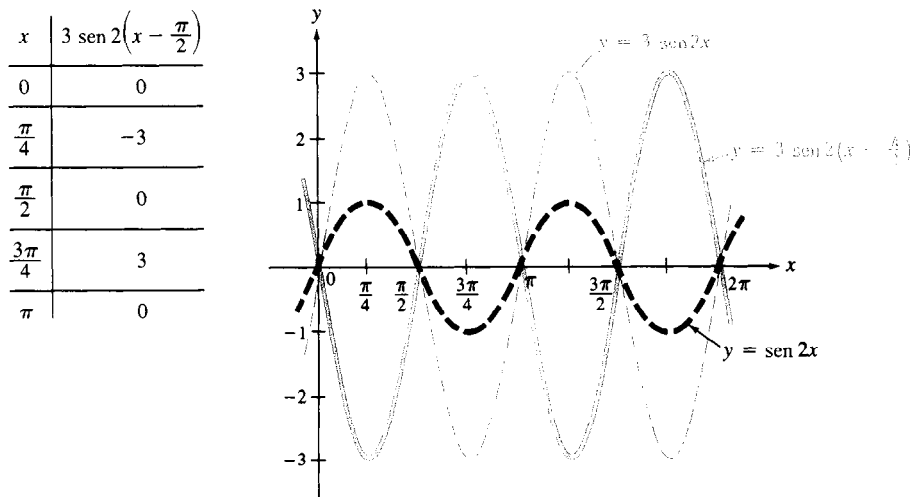


Figura 51

EJEMPLO 3

Graficar la función $y = 2 \cos \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2} \right)$.

Escribir $y = 2 \cos \frac{1}{2}(x + \pi) = 2 \cos \frac{1}{2}[x - (-\pi)]$.

Después véase que la amplitud es 2, el periodo es $2\pi/(1/2) = 4\pi$, y el defasamiento es π unidades hacia la derecha. Así pues, un ciclo de la gráfica empieza en $(-\pi, 2)$ y termina 4π unidades después en $(3\pi, 2)$.

Graficar $y = \cos \frac{1}{2}x$ y usar esto para graficar $y = 2 \cos \frac{1}{2}x$. Cuando la gráfica de $y = 2 \cos \frac{1}{2}x$ se traslada π unidades hacia la izquierda, obtenemos la gráfica de $y = 2 \cos \frac{1}{2}(x + \pi)$ que se muestra en la figura 52. De nueva cuenta los pocos puntos que contiene la tabla sirven como verificación. □

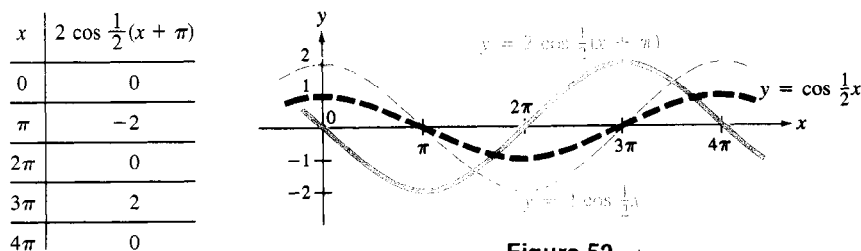


Figura 52

Se resumen los resultados que muestran los ejemplos.

Función sinusoidal

Si una función puede ser escrita como una función sinusoidal de la forma

$$y = A \operatorname{sen} B(x - C) \quad \text{o} \quad y = A \cos B(x - C) \quad (B > 0)$$

entonces

$$\text{amplitud} = |A|$$

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{B}$$

$$\text{defasamiento} = |C|.$$

La gráfica está defasada hacia la derecha si $C > 0$ y hacia la izquierda si $C < 0$.

Graficación mediante la suma de ordenadas

Para graficar sumas o diferencias de funciones seno y coseno graficar separadamente cada una de las dos funciones y sumar las ordenadas (valores de y) gráficamente. A este procedimiento, que se muestra en los ejemplos 4 y 5, a veces se le llama **método de suma de ordenadas**.

EJEMPLO 4

Graficar la función $y = \operatorname{sen} 2x + \cos 2x$.

x	$\operatorname{sen} 2x$	$\cos 2x$	$\operatorname{sen} 2x + \cos 2x$
0	0	1	1
$\frac{\pi}{8}$	0.7	0.7	1.4
$\frac{\pi}{4}$	1	0	1
$\frac{3\pi}{8}$	0.7	-0.7	0
$\frac{\pi}{2}$	0	-1	-1
$\frac{5\pi}{8}$	-0.7	-0.7	-1.4
$\frac{3\pi}{4}$	-1	0	-1
$\frac{7\pi}{8}$	-0.7	0.7	0
π	0	1	1

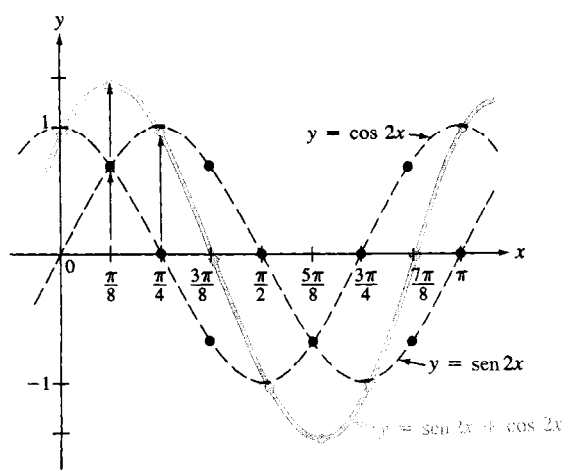


Figura 53

Como se puede apreciar de la gráfica que aparece en la figura 53, cuando $x = \pi/8$, $\operatorname{sen} 2x$ y $\cos 2x$ tienen la misma ordenada, así que su suma es dos veces ese valor. También, cuando $x = \pi/4$, $\cos 2x$ es 0 y por tanto la curva ya sumada cruza a la curva de $\operatorname{sen} 2x$. Cuando $x = 3\pi/8$, $\operatorname{sen} 2x = -\cos 2x$, lo que hace que la suma sea 0 y por lo tanto la gráfica de las sumas cruza el eje x .

En el ejemplo 4 la curva ya sumada parece una curva de seno (y sí lo es). En el siguiente ejemplo la curva es más difícil de determinar así que muchos puntos son graficados. Una vez que este procedimiento sea perfeccionado, podremos reducir el número de puntos que se necesitan graficar.

EJEMPLO 5

Graficar la función $y = 3 \sin 2x - 2 \cos x$.

x	$3 \sin 2x$	$-2 \cos x$	$3 \sin 2x + (-2 \cos x)$
0	0	-2	-2
$\frac{\pi}{8}$	2.12	-1.85	0.27
$\frac{\pi}{4}$	3	-1.41	1.59
$\frac{3\pi}{8}$	2.12	-0.77	1.35
$\frac{\pi}{2}$	0	0	0
$\frac{5\pi}{8}$	-2.12	0.77	-1.35
$\frac{3\pi}{4}$	-3	1.41	-1.59
$\frac{7\pi}{8}$	-2.12	1.85	-0.27
π	0	2	2
$\frac{9\pi}{8}$	2.12	1.85	3.97
$\frac{5\pi}{4}$	3	1.41	4.41
$\frac{11\pi}{8}$	2.12	0.77	2.89
$\frac{3\pi}{2}$	0	0	0
$\frac{13\pi}{8}$	-2.12	-0.77	-2.89
$\frac{7\pi}{4}$	-3	-1.41	-4.41
$\frac{15\pi}{8}$	-2.12	-1.85	-3.97
2π	0	-2	-2

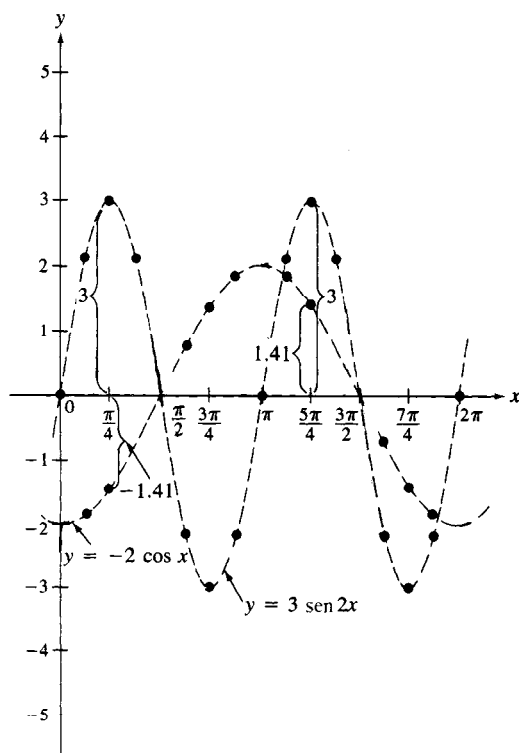


Figura 54

Nótese en la figura 54 que cuando $x = \pi/4$ el punto en la curva es determinado mediante la suma de la ordenada positiva de la gráfica de $3 \sin 2x$ y la ordenada negativa de la gráfica de $-2 \cos x$. El punto en la curva cuando $x = 5\pi/4$ proviene de la suma de los dos valores positivos de las curvas en este punto.

Gráficas de funciones amortiguadas

Otra variación más compleja de las funciones trigonométricas, las llamadas **funciones amortiguadas**, incluyen un producto de funciones como lo muestra el ejemplo 6.

EJEMPLO 6

Graficar la función $f(x) = \frac{x}{2} \sin x$.

La función f es el producto de dos funciones $g(x) = \frac{x}{2}$ y $h(x) = \sin x$. El valor absoluto de $f(x)$ nos da una clave para encontrar la gráfica. Nótese que $|f(x)| = \left| \frac{x}{2} \right| |\sin x| = \frac{x}{2} |\sin x|$, si $x > 0$, y como $|\sin x| \leq 1$, esto nos da $|f(x)| \leq \frac{x}{2}$, $x > 0$. Por tanto,

$$-\frac{x}{2} \leq f(x) \leq \frac{x}{2}$$

lo que significa que la gráfica se encuentra entre las gráficas de $y = \frac{x}{2}$ y $y = -\frac{x}{2}$. Puntos de la gráfica de $f(x)$ coinciden con puntos en estas rectas siempre que $|\sin x| = 1$, esto es, cuando $x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$. Así mismo, las intersecciones de $f(x)$ con el eje x ocurren cuando $\frac{x}{2} = 0$ y cuando $\sin x = 0$; esto es, cuando $x = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$ se usa esta información se puede dibujar la gráfica de la figura 55.

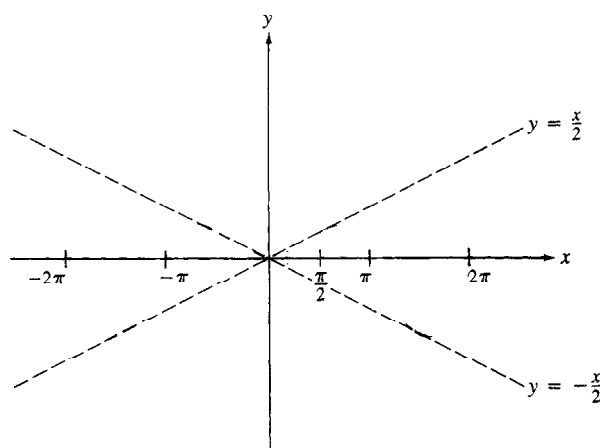


Figura 55. Función amortiguada.

La función $f(x) = \frac{x}{2} \sin x$ es un ejemplo de una **onda de seno amortiguada** en donde $\frac{x}{2}$ es el factor de amortiguación. En general, las ondas del seno (o coseno) pueden ser comprimidas o expandidas si se usa un grupo de factores de amortiguación. Las gráficas de estas funciones son importantes en la ingeniería y la

6.7. Ejercicios

En los ejercicios 1-14 a) dar la amplitud, b) dar el periodo, c) dar el defasamiento y d) dibujar la gráfica de cada una de las funciones en un intervalo con longitud de un periodo.

- | | | | |
|---|--|--|--|
| 1. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ | 2. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ | 3. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ | 4. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ |
| 5. $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ | 6. $y = 3 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ | 7. $y = -3 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ | 8. $y = -2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ |
| 9. $y = 3 \cos 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ | 10. $y = 2 \cos 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ | 11. $y = 4 \sin(2x + \pi)$ | 12. $y = 4 \cos(2x - \pi)$ |

$$13. y = 3 \cos \left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2} \right) \quad 14. y = 3 \cos \frac{\pi}{2}x$$

En los ejercicios 15-28 utilice el método de suma de ordenadas para dibujar la gráfica de cada una de las funciones.

$$15. y = \sin x + \cos x$$

$$16. y = \sin x - \cos x$$

$$17. y = \sin x - 2 \cos x$$

$$18. y = 2 \sin x + \cos x$$

$$19. y = \sin 2x + \cos x$$

$$20. y = 2 \sin 2x - \cos 2x$$

$$21. y = x + \sin x$$

$$22. y = x - \cos x$$

$$23. y = \sin 2x + \sin x$$

$$24. y = \sin 2x - \sin x$$

$$25. y = \sin \pi x - \cos \pi x$$

$$26. y = \sin \pi x + \cos \pi x$$

$$27. y = \sin \frac{\pi x}{2} + \cos \pi x$$

$$28. y = |x| - \cos x$$

En los ejercicios 29-38 dibujar la gráfica de cada una de las funciones.

$$29. y = x \sin x$$

$$30. y = 2^{-x} \sin x$$

$$31. y = |x| \sin x$$

$$32. y = \frac{1}{4}x^2 \cos x$$

$$33. y = 2^{-x/2} \cos x$$

$$34. y = e^x \sin x$$

$$35. y = |\sin x|$$

$$36. y = |\sin x| + 1$$

$$37. y = \sin |x|$$

$$38. y = 2 \tan \frac{1}{2}x$$

Resolver.

- 39. Gerencia.** A lo largo de un periodo determinado de años el dueño de un pequeño negocio de una zona turística primaveral descubre que sus ventas se calculan aproximadamente por

$$S = 8\,500 + 3\,700 \sin \frac{\pi x}{6}$$

en donde x es el tiempo en meses, $x = 1$ corresponde a enero. Dibujar la gráfica de esta función durante un periodo de un año para determinar el mes con menos ventas.

- 40. Meteorología.** Con la información recolectada a lo largo de varios años, el meteorológico ha determinado que para un pueblo desierto en el sur de California el promedio mensual de las temperaturas bajas, en grados fahrenheit, puede ser calculada aproximadamente por

$$t = 24.8 \sin \left(\frac{\pi x}{6} - \frac{\pi}{2} \right) + 69.8,$$

en donde x es el tiempo en meses $x = 0$ corresponde a enero. Graficar esta función y utilizarla para determinar la temperatura baja promedio en el mes más caliente del año.

Para repaso

- 41. Aeronáutica.** Un avión despegue con un ángulo de ascenso de $8^\circ 45'$. Si su velocidad promedio en el aire es de 320 mph, ¿cuánto tiempo le tomará alcanzar una altura de vuelo de 32 000 ft?
- 42. Aeronáutica.** Si un avión vuela a Mach 3 (tres veces la velocidad del sonido), utilice la ecuación de ondas de sonido $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{v_s}{v_a}$ para determinar el ángulo del cono sónico.

6.8. IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Recordar del capítulo 2 que a una ecuación se le llama una identidad si es verdadera para cada sustitución de la variable. Por ejemplo,

$$2x + 2 = 2(x + 1)$$

es una identidad, ya que no importa qué número utilice para reemplazar a x , la ecuación que da como resultado es verdadera. El signo de igualdad es comúnmente reemplazado por \equiv que se lee *es idéntico a* o *es igualmente idéntico a*. Por tanto, escribiríamos.

$$2x + 2 \equiv 2(x + 1).$$

Hay muchas identidades que tienen que ver con funciones trigonométricas, unas de las cuales se verá ahora. Algunas de las identidades deberán ser memorizadas, mientras otras, si el método es entendido, podrán ser derivadas fácilmente cuando esto sea necesario. En el estudio de la trigonometría y sus aplicaciones a matemáticas más avanzadas, la identificación de identidades y sus variaciones algebraicas son sumamente importantes.

Se han agrupado las identidades fundamentales en varias categorías, la primera de éstas ya le es conocida como resultado del trabajo hecho con anterioridad. Por ahora se concentrará en identidades que tengan que ver con funciones trigonométricas de un número real, ya que su verificación es fácil con el círculo unitario. No obstante, ya que las funciones trigonométricas de un número real pueden ser tomadas como funciones trigonométricas de un ángulo con medida en radianes,

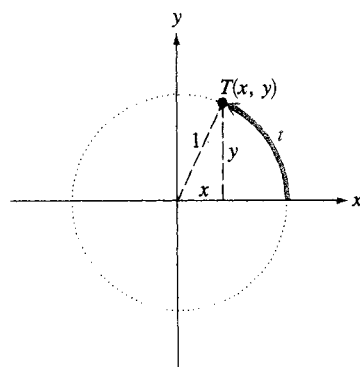


Figura 56. Círculo unitario.

las identidades se aplican a ángulos así como a números reales. En el próximo capítulo se estudiarán en detalle las funciones trigonométricas para ángulos arbitrarios.

Un hecho que hay que recordar es que una identidad es verdadera sólo para los números reales para los que las funciones están definidas. Por ejemplo, una identidad que contenga la función tangente, excluye a los números como $\frac{\pi}{2}$ donde la función tangente está definida. Un repaso de las definiciones de funciones trigonométricas de números reales en la sección 6.5 sería de gran ayuda antes de poder continuar.

Identidades recíprocas

Al primer grupo de identidades a veces se le llama **identidades con recíprocos**.

Identidades con recíprocos

$$\csc t \equiv \frac{1}{\sin t}$$

$$\sec t \equiv \frac{1}{\cos t}$$

$$\cot t \equiv \frac{1}{\tan t}$$

Variaciones algebraicas

$$\sin t \equiv \frac{1}{\csc t}, \quad \sin t \csc t \equiv 1$$

$$\cos t \equiv \frac{1}{\sec t}, \quad \cos t \sec t \equiv 1$$

$$\tan t \equiv \frac{1}{\cot t}, \quad \tan t \cot t \equiv 1$$

Se demostrará la primera identidad y se dejarán las otras dos como ejercicios. Para demostrar que $\csc t = \frac{1}{\sin t}$, considerar el círculo unitario con el número real t asociado con el punto $T(x, y)$ en la figura 56.

Se definieron $\sin t = y$, y $\csc t = \frac{1}{y}$. Por tanto, $\csc t = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sin t}$, y así la identidad ha sido demostrada.

Identidades de razones

A la próxima categoría de identidades es comúnmente llamada

Identidades con razones

$$\tan t \equiv \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$\cot t \equiv \frac{\cos t}{\sin t}$$

Variaciones algebraicas

$$\sin t \equiv \tan t \cos t, \quad \cos t \equiv \frac{\sin t}{\tan t}$$

$$\cos t \equiv \cot t \sin t, \quad \sin t \equiv \frac{\cos t}{\cot t}$$

Estas identidades pueden ser probadas fácilmente con el círculo unitario, así que serán parte de los ejercicios.

Identidades pitagóricas

A otro grupo de identidades se les llama **identidades pitagóricas**, un nombre que será justificado después de que se pruebe una de las identidades.

Identidades pitagóricas

$$\sin^2 t + \cos^2 t \equiv 1$$

$$1 + \tan^2 t \equiv \sec^2 t$$

$$1 + \cot^2 t \equiv \csc^2 t$$

Variaciones algebraicas

$$1 - \cos^2 t \equiv \sin^2 t, \quad 1 - \sin^2 t \equiv \cos^2 t$$

$$\sec^2 t - 1 \equiv \tan^2 t, \quad \sec^2 t - \tan^2 t \equiv 1$$

$$\csc^2 t - 1 \equiv \cot^2 t, \quad \csc^2 t - \cot^2 t \equiv 1$$

Recordar que la ecuación del círculo unitario es $x^2 + y^2 = 1$. Ya que $\cos t = x$ y $\sin t = y$,

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$

así que $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, por la ley conmutativa de la suma. Recuerde que $\sin^2 x$ y $\cos^2 x$ se escribe en lugar de $(\sin x)^2$ y $(\cos x)^2$ respectivamente. Si se toma un triángulo con catetos x y y e hipotenusa 1, como el de la figura 56, queda claro que según el teorema de Pitágoras, $x^2 + y^2 = 1$. Es por lo cual a estos teoremas se les llaman *identidades pitagóricas*. La verificación del resto de las identidades es parte de los ejercicios.

Identidades con cofunciones

Como su nombre sugiere, a las funciones seno y coseno, secante y cosecante, tangente y cotangente, frecuentemente se les llama **cofunciones**. Algunas identidades están relacionadas con las cofunciones.

Consideraremos las funciones seno y coseno, ya que las otras identidades pueden ser obtenidas con el uso de las identidades con recíprocos y con razones.

Identidades con cofunciones para las funciones seno y coseno

$$\operatorname{sen} \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \equiv \cos t$$

$$\cos \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \equiv -\operatorname{sen} t$$

$$\operatorname{sen} \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \equiv -\cos t$$

$$\cos \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \equiv \operatorname{sen} t$$

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \equiv \cos t$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \equiv \operatorname{sen} t$$

Las identidades con cofunciones pueden ser verificadas si se dibuja un círculo unitario y un valor general de t . Se determina el punto asociado a cada variante de t y se aplican las definiciones de las funciones de seno y coseno. Dos de las cofunciones son verificadas en los ejemplos que aparecen a continuación, las cuatro restantes, son parte de los ejercicios.

EJEMPLO 1

Verificar que $\cos \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \equiv -\operatorname{sen} t$.

Dibujar un círculo unitario, identificar a t y a $t + \frac{\pi}{2}$ con los puntos asociados T y S , respectivamente y supóngase que el punto T tiene coordenadas $(x, y) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ como en la figura 57. Ya que el triángulo OSQ es congruente con el triángulo OTP , las coordenadas de S son $(-y, x)$. Así pues, $\cos \left(t + \frac{\pi}{2} \right) = -y = -\operatorname{sen} t$. Entonces, $\cos \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \equiv -\operatorname{sen} t$.

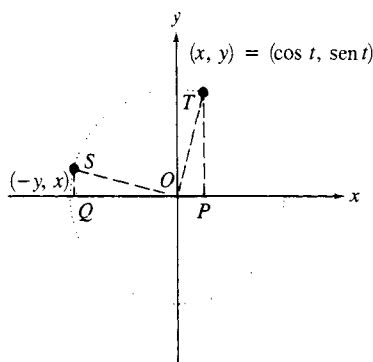


Figura 57

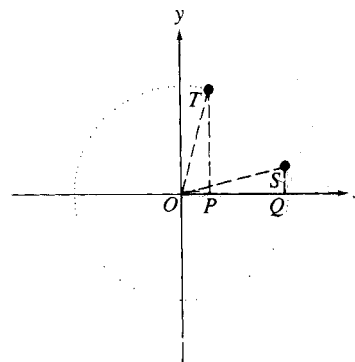


Figura 58

EJEMPLO 2

Verificar que $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \equiv \cos t$.

Dibujar un círculo unitario, identificar a t y a $\frac{\pi}{2} - t$ con los puntos asociados $T(x, y) = (\cos t, \sin t)$ y S , respectivamente, como lo muestra la figura 58. Ya que el triángulo OSQ es congruente con el triángulo OTP , las coordenadas de S son (y, x) . Así pues $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = x = \cos t$. Entonces, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \equiv \cos t$. ■

Como se mencionó con anterioridad, las cofunciones restantes no necesitan ser memorizadas, ya que se pueden obtener fácilmente con el uso de las identidades previas y las identidades con confusiones para las funciones seno y coseno. El ejemplo a continuación muestra esto.

EJEMPLO 3

Verificar que $\tan\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \equiv -\cot t$.

$$\tan\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-\cos t}{\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\cot t \quad \blacksquare$$

Miscelánea de identidades

El siguiente grupo de identidades, que pueden ser demostradas con el uso de la técnica de los ejemplos 1 y 2, finaliza la lista de identidades fundamentales. Algunas de ellas fueron ya tomadas en cuenta cuando se mencionaron las funciones pares e impares en los ejercicios 6.6, y en funciones periódicas en la sección 6.6. La prueba de varias de las identidades son parte de los ejercicios.

Miscelánea de identidades

Sea t cualquier número real.

$$\sin(-t) \equiv -\sin t$$

$$\cos(-t) \equiv \cos t$$

$$\sin(t + 2\pi) \equiv \sin t$$

$$\cos(t + 2\pi) \equiv \cos t$$

$$\sin(t - 2\pi) \equiv \sin t$$

$$\cos(t - 2\pi) \equiv \cos t$$

$$\sin(t + \pi) \equiv -\sin t$$

$$\cos(t + \pi) \equiv -\cos t$$

$$\sin(t - \pi) \equiv -\sin t$$

$$\cos(t - \pi) \equiv -\cos t$$

$$\sin(\pi - t) \equiv \sin t$$

$$\cos(\pi - t) \equiv -\cos t$$

En muchas ocasiones, una expresión compleja que tenga funciones trigonométricas puede ser simplificada con manipulación algebraica junto con el uso de una identidad. Para hacer este proceso más claro, se ilustra con dos ejemplos.

EJEMPLO 4

Multiplicar y simplificar cada expresión.

a) $(\sin t + \cos t)^2$

$$\begin{aligned} (\sin t + \cos t)^2 &= \sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t && \text{Usar } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ &= (\sin^2 t + \cos^2 t) + 2 \sin t \cos t \\ &= 1 + 2 \sin t \cos t && \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \end{aligned}$$

b) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)[\sec t - \cos t]$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)[\sec t - \cos t] &= \cos t[\sec t - \cos t] && \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t \\ &= \cos t \sec t - \cos^2 t \\ &= 1 - \cos^2 t && \text{Identidad con recíproco} \\ &= \sin^2 t && \text{Identidad pitagórica} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

EJEMPLO 5

Factorizar cada expresión y simplificar.

a) $\sin^2 t \cos^2 t + \sin^4 t$

$$\begin{aligned} \sin^2 t \cos^2 t + \sin^4 t &= \sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t) && \text{Factorizar el factor común} \\ &= \sin^2 t(1) && \text{Identidad pitagórica} \\ &= \sin^2 t \end{aligned}$$

b) $\cos^4 t - \sin^4 t$

$$\begin{aligned} \cos^4 t - \sin^4 t &= (\cos^2 t - \sin^2 t)(\cos^2 t + \sin^2 t) && a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \\ &= (\cos^2 t - \sin^2 t)(1) \\ &= (\cos t - \sin t)(\cos t + \sin t) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A veces es mejor transformar una función trigonométrica dada a otra función trigonométrica. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 6

Expresar $\cot t$ en términos de $\sin t$, en donde t es un número real que determina al punto T en el círculo unitario en el cuadrante I .

Recordar que $\cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$. Además $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$, y al extraer la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación, $\cos t = \pm\sqrt{1 - \sin^2 t}$. Pero como t determina un punto en el cuadrante I , $\cos t$ es positivo, así que se tiene que $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$. Sustituyendo,

$$\cot t = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 t}}{\sin t} \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 7

Supóngase que t determina un punto en el cuadrante III y que $\csc t = -\frac{5}{4}$. Utilizar las identidades fundamentales para encontrar $\cot t$.

Ya que $1 + \cot^2 t = \csc^2 t$, tenemos que

$$\cot^2 t = \csc^2 t - 1.$$

Por tanto,

$$\cot t = \pm \sqrt{\csc^2 t - 1}.$$

Pero como t determina a un punto en el cuadrante III, y $\cot t$ es positivo, utilice el valor positivo de la raíz. Substituyendo tenemos que,

$$\begin{aligned}\cot t &= \sqrt{\csc^2 t - 1} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{5}{4}\right)^2 - 1} \\ &= \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

NOTA: Aunque se ha usado la variable t en toda esta sección como es el caso para cualquier notación de funciones, puede usarse cualquier letra como la variable. En los ejercicios que se presentan a continuación serán usadas diferentes variables.

6.8. Ejercicios

Demostrar las identidades dadas en los ejercicios 1-20. En los ejercicios 1-10, suponer que $T(x, y)$ es el punto en el círculo unitario determinado por el número real t .

- | | | |
|---|--|--|
| 1. $\sec t \equiv \frac{1}{\cos t}$ | 2. $\cot t \equiv \frac{1}{\tan t}$ | 3. $1 + \tan^2 t \equiv \sec^2 t$ |
| 4. $1 + \cot^2 t \equiv \csc^2 t$ | 5. $\tan t \equiv \frac{\text{sen } t}{\cos t}$ | 6. $\cot t \equiv \frac{\cos t}{\text{sen } t}$ |
| 7. $\text{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \equiv \cos t$ | 8. $\text{sen}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \equiv -\cos t$ | 9. $\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \equiv \text{sen } t$ |
| 10. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \equiv \text{sen } t$ | 11. $\cot\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \equiv -\tan t$ | 12. $\sec\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \equiv -\csc t$ |
| 13. $\sec\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \equiv \csc t$ | 14. $\text{sen}(t + \pi) \equiv -\text{sen } t$ | 15. $\cos(t + \pi) \equiv -\cos t$ |
| 16. $\text{sen}(t - \pi) \equiv -\text{sen } t$ | 17. $\cos(\pi - t) \equiv -\cos t$ | 18. $\text{sen}(t - 2\pi) \equiv \text{sen } t$ |
| 19. $\text{sen}(-t) \equiv -\text{sen } t$ | 20. $\cos(-t) \equiv \cos t$ | |

En los ejercicios 21-39 completar cada ecuación de tal manera que el resultado sea una identidad.

- | | | |
|--|--|--|
| 21. $\text{sen}^2 t + \underline{\hspace{1cm}} \equiv 1$ | 22. $1 + \tan^2 t \equiv \underline{\hspace{1cm}}$ | 23. $\underline{\hspace{1cm}} + \cot^2 t \equiv \csc^2 t$ |
| 24. $1 - \underline{\hspace{1cm}} \equiv \cos^2 x$ | 25. $\sec^2 x - \underline{\hspace{1cm}} \equiv \tan^2 x$ | 26. $\underline{\hspace{1cm}} - 1 \equiv \cot^2 x$ |
| 27. $\underline{\hspace{1cm}} - \cos^2 y \equiv \text{sen}^2 y$ | 28. $-\text{sen}^2 y - \cos^2 y \equiv \underline{\hspace{1cm}}$ | 29. $\csc^2 y - 1 \equiv \underline{\hspace{1cm}}$ |
| 30. $\tan z \cdot \cot z \equiv \underline{\hspace{1cm}}$ | 31. $\underline{\hspace{1cm}} \equiv \frac{1}{\text{sen } t}$ | 32. $\underline{\hspace{1cm}} \equiv \frac{1}{\cos t}$ |
| 33. $\underline{\hspace{1cm}} \equiv \frac{1}{\tan t}$ | 34. $\frac{\text{sen } u}{\cos u} \equiv \underline{\hspace{1cm}}$ | 35. $\frac{\cos u}{\text{sen } u} \equiv \underline{\hspace{1cm}}$ |
| 36. $\text{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \equiv \underline{\hspace{1cm}}$ | 37. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \equiv \underline{\hspace{1cm}}$ | 38. $\text{sen}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \equiv \underline{\hspace{1cm}}$ |
| 39. $\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \equiv \underline{\hspace{1cm}}$ | | |

En los ejercicios 40-47 multiplicar y simplificar cada una de las expresiones dadas.

40. $(\cos t - \sin t)^2$ 41. $(\sec x + \cos x)^2$
 42. $(\sin y + \csc y)(\sin^2 y - 1 + \csc^2 y)$ 43. $(\cot t + 1)^2$
 44. $(\csc x + \sec x)(\cos x + \sin x)$ 45. $(\sec u - 1)(\sec u + 1)$
 46. $(\cos y - \sec y)(\cos^2 y + 1 + \sec^2 y)$ 47. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

En los ejercicios 48-55 factorizar y simplificar cada una de las expresiones dadas.

48. $\sin^2 t + \sin^2 t \cot^2 t$ 49. $\tan^4 y - \sec^4 y$ 50. $1 - 2 \sin^2 x + \sin^4 x$
 51. $1 - \sin^3 t$ 52. $\cos^3 y + \sec^3 y$ 53. $\tan^2 x \csc^2 x - \tan^2 x$
 54. $\cos\left(y - \frac{\pi}{2}\right) \tan y + \sin y \cot y$ 55. $\sin(\pi - z) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \tan z$
 56. Expresar $\tan t$ en términos de $\cos t$, en donde t determina a un punto en el cuadrante I.
 57. Expresar $\sec t$ en términos de $\sin t$, en donde t determina a un punto en el cuadrante II.
 58. Expresar $\csc t$ en términos de $\cos t$, en donde t determina a un punto en el cuadrante III.
 59. Expresar $\cot t$ en términos de $\cos t$, en donde t determina a un punto en el cuadrante IV.
 60. Supóngase que t determina a un punto en el cuadrante II y que $\sec t = -\frac{5}{3}$. Utilice las identidades fundamentales para encontrar a) $\tan t$, b) $\sin t$ y c) $\csc t$.
 61. Supóngase que t determina a un punto en el cuadrante III y que $\tan t = \frac{3}{4}$. Utilice las identidades fundamentales para encontrar a) $\sin t$, b) $\cos t$ y c) $\sec t$.

En los ejercicios 62-65 demostrar que cada una de las ecuaciones es una identidad.

62. $\log \sin x = -\log \csc x$ 63. $\log \tan x = \log \sin x - \log \cos x$
 64. $\ln \cot x + \ln \sin x = \ln \cos x$ 65. $\ln \sec x = -\ln \cos x$

Para cada una de las funciones en los ejercicios 66-67 determinar a) la amplitud, b) el periodo y c) el defasamiento.

66. $y = 3 \sin(4x - 12\pi)$ 67. $y = -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2} + 3\pi\right)$

Graficar cada una de las funciones en los ejercicios 68-70.

68. $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 69. $y = 3 + 2 \sin \frac{1}{3}x$ 70. $y = 3^x \cos x$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 6



- ¿Son coterminales los ángulos $\frac{\pi}{3}$ y 30° ?
- Expresar $148^\circ 39' 42''$ en grados y su parte decimal, aproximada a la centena más cercana.
- Convertir 26.6° a radianes, aproximando a cuatro cifras decimales.
- Convertir 7.1359 radianes a grados, minutos y segundos.

6. **Geografía.** La isla Wake en el océano Pacífico tiene latitud $19^{\circ} 20' N$. ¿Que tan lejos se encuentra la isla Wake del Polo Norte? Tomar como el radio de la tierra 4 000 mi.

10. 30°

12. 60°

13. $\cos 59^{\circ}26'$

15. $\csc \frac{\pi}{10}$

16. $\text{sen } \theta = 0.7915$

18. $\sec \theta = 2.1547$

- 19.** Resolver el triángulo rectángulo en donde $a = 5.0$ y $b = 15.0$ usando las partes dadas en lugar de las partes calculadas. Recuerde que $C = 90^\circ$.

20. Cuando el ángulo de elevación del sol es $64^{\circ}20'$, un poste produce una sombra de 28.0 m de largo. ¿Cuál es la altura del poste?

21. Silvicultura. Un incendio se divisa al oeste del puesto de observación A . La orientación del incendio del puesto de vigilancia B , a 5.2 mi al sur de A , es $N51^\circ 40'W$. ¿Qué tan lejos se encuentra el incendio de B y de A ?

22. **Navegación.** Un bote navega durante 2 a 25 mph en una dirección de 200° . ¿Qué tan al oeste ha navegado? ¿Qué tan al sur?

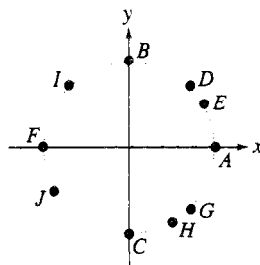
23. **Aeronáutica.** La velocidad de vuelo de un avión es de 550 km/h y su ángulo de ascenso es $9^{\circ}20'$. ¿Cuál es su velocidad con respecto al piso?

24. Recreación. Un bote recreacional produce ondas de proa que se desplazan a una velocidad de 16 mph. Si el ángulo entre las ondas es de $62^\circ 40'$, encuentre la rapidez del bote. [Sugerencia: Utilizar la ecuación $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{v_w}{v_b}$]

25. Física. Si un rayo luminoso incide en la superficie de un lago de manera que $A = 44^{\circ}30'$ encuentre W suponiendo que el índice de refracción para el agua es de 1.3 y para el aire es de 1.0003.

Sugerencia: Use la ecuación $\left[\frac{I_w}{I_a} = \frac{\sin A}{\sin W} \right]$

26. Determinar la distancia más corta que un punto debe moverse en dirección contraria a las manecillas del reloj sobre un círculo unitario, si éste se mueve del punto A al punto a) A , b) B , c) C , d) D , e) E , f) F , g) G , h) H , i) I y j) J .



27. Respetar el ejercicio 26 con el punto moviéndose en la dirección de las manecillas del reloj.

En los ejercicios 28-30 usar el círculo unitario (sin valores de calculadora) y encontrar a) $\sin t$ b) $\cos t$ c) $\tan t$ d) $\csc t$ e) $\sec t$ y f) $\cot t$, para el valor dado del número real t .

28. $\frac{3\pi}{2}$

29. $-\frac{\pi}{4}$

30. $\frac{7\pi}{6}$

En los ejercicios 31-32 dar el cuadrante que contenga al punto T determinado por el número real t con los signos de los valores de las funciones especificadas.

31. $\tan t > 0$ y $\cos t < 0$

32. $\csc t < 0$ y $\cot t < 0$

Dibujar la gráfica de cada una de las funciones en los ejercicios 33-38.

33. $y = \cos x + 1$

34. $y = -4 \sin x$

35. $y = \tan 4x$

36. $y = \frac{1}{2}x + \sin x$

37. $y = |\cos x|$

38. $y = 2^x \sin x$

En los ejercicios 39-40 a) dar la amplitud, b) dar el periodo, c) dar el defasamiento y d) dibujar la gráfica de cada función.

39. $y = -3 \sin(2x - \pi)$

40. $y = 3 \cos\left(\frac{1}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$

En los ejercicios 41-52 determinar si el enunciado dado es verdadero o falso.

41. $1 + \sec^2 t \equiv \tan^2 t$

42. $1 - \sin^2 t \equiv \cos^2 t$

43. $\sec t \equiv \frac{\cos t}{\cot t}$

44. $\frac{1}{\sin t} \equiv \csc t$

45. $\cos(-t) \equiv -\cos t$

46. $\csc^2 t - \cot^2 t \equiv 1$

47. $\sin(t - \pi) \equiv \sin(t + \pi)$

48. $\sin(\pi - t) \equiv -\sin(t + \pi)$

49. $\frac{1}{\cot t} \equiv \csc t$

50. $\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \equiv \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$

51. $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \sin^2\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \equiv 1$

52. $\frac{1}{\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)} \equiv \sec t$

En los ejercicios 53-56 multiplicar y simplificar cada expresión.

53. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)[\csc x - \sin x]$

54. $\sin y \tan y(\cot y - \csc y)$

55. $(\tan y + \cot y)(\cot^2 y + \tan^2 y - 1)$

56. $(\sin x + \cos x)^2$

En los ejercicios 57-60 factorizar y simplificar cada expresión.

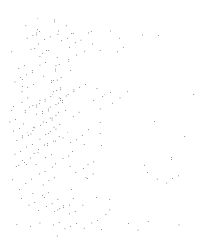
57. $\sin(\pi - x) + \tan x \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

58. $\sec^4 y + \sec^2 y \tan^2 y - 2 \tan^4 y$

59. $\frac{\sin^2 y - 1}{\sin y + 1}$

60. $\frac{\sin^2 x + 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 1}$

Capítulo



Aplicaciones de la trigonometría

Muchos problemas de aplicación se resuelven encontrando el ángulo o la longitud de uno de los lados de un triángulo. En la sección 6.4 se consideraron aplicaciones con triángulos rectángulos. En este capítulo se ampliará la teoría para incluir triángulos que no tengan un ángulo recto. Los siguientes dos ejemplos ilustran el tipo de problemas que se pueden encontrar.

Consumo

Una cabaña tiene una pared en forma de triángulo con dos lados de 26 ft en longitud y el tercero de 18 ft. La pared es de 6 in en espesor y tiene una ventana que mide 4 ft por 5 ft. Si el costo de aislamiento es de 0.90 dólares por ft cúbico, ¿cuál será el costo aproximado para aislar la pared?

Navegación

Dos muelles se encuentran en lados opuestos de un río que fluye de este a oeste, con una corriente

de 3.5 mph. La orientación del muelle en la orilla norte del río desde el muelle en la orilla sur es de $N10^{\circ}20'E$. ¿Qué dirección debe tomar el capitán de un transbordador, que va a 7 mph, para cruzar directamente desde el muelle del sur al muelle del norte tomando en cuenta la corriente de arrastre?

El primero de estos problemas puede ser resuelto si se usa la fórmula para el área de un triángulo (véase ejemplo 4 en la sección 7.4), y el segundo se puede interpretar usando vectores (véase el ejemplo 7 en la sección 7.6). Se empieza este capítulo considerando las funciones trigonométricas de ángulos arbitrarios, o sea, cualquier ángulo de cualquier medida en grados o radianes. Después se resuelven triángulos arbitrarios con el uso de la ley de los senos y la ley de los cosenos, y se concluye con el área de triángulos y aplicaciones vectoriales.

En la sección 6.3 se estudiaron las funciones trigonométricas de ángulos agudos. En cierto modo, si se considera un ángulo medido en radianes, ya se han tomado en cuenta las funciones trigonométricas de ángulos arbitrarios cuando se definieron las funciones trigonométricas de un número real en la sección 6.5. Sin embargo, como varios problemas de aplicación incluyen ángulos que no son agudos, es conveniente considerar con más detalle las funciones trigonométricas de ángulos en general. Para esto, supóngase que A es un ángulo en posición normal sobre un sistema de coordenadas rectangulares, y que el punto $P(a, b)$ es un punto arbitrario en el lado terminal de A como lo muestra la figura 1.

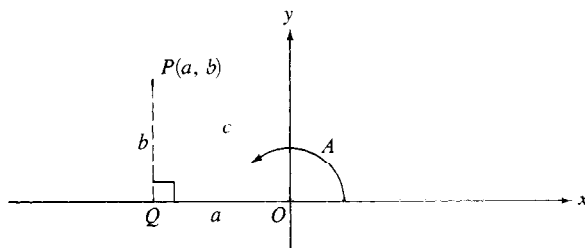


Figura 1. Ángulo en posición normal.

Si se usa la fórmula de distancia para los puntos (a, b) y $(0, 0)$, podemos calcular c , la hipotenusa del triángulo rectángulo PQO y tenemos que $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Funciones trigonométricas de un ángulo arbitrario

Sean A un ángulo arbitrario en posición normal en un sistema de coordenadas rectangulares y $P(a, b)$ un punto arbitrario que no sea el origen sobre el lado terminal de A . Si $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, entonces

$$\operatorname{sen} A = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{csc} A = \frac{c}{b} \quad (b \neq 0)$$

$$\cos A = \frac{a}{c}$$

$$\sec A = \frac{c}{a} \quad (a \neq 0)$$

$$\tan A = \frac{b}{a} \quad (a \neq 0)$$

$$\cot A = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0).$$

Si $R(a', b')$ es otro punto sobre el lado terminal de A , entonces por semejanza de triángulos

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}, \quad \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}, \quad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}, \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}, \quad \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

Por tanto los valores de las funciones trigonométricas no dependen del punto que se escoja como $P(a, b)$. De la sección 6.3, recuérdese que para el ángulo agudo A del triángulo PQO (véase la figura 2),

$$\operatorname{sen} A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}.$$

Esto concuerda con $\operatorname{sen} A$ para un ángulo arbitrario como se define en el cuadro de arriba. Sea $c = 1$ como en la figura 3, entonces $P(a, b)$ es un punto en el círculo unitario. Recuérdese que en la sección 6.5 la medida del ángulo A en radianes es t radianes. Así pues, si se usa la función seno otra vez como en el ejemplo,

$$\operatorname{sen} A = \frac{b}{c} = \frac{b}{1} = b = \operatorname{sen} t.$$

Por tanto, las definiciones de las funciones trigonométricas para ángulos arbitrarios concuerdan con las definiciones de las funciones trigonométricas para números reales así como para ángulos agudos.

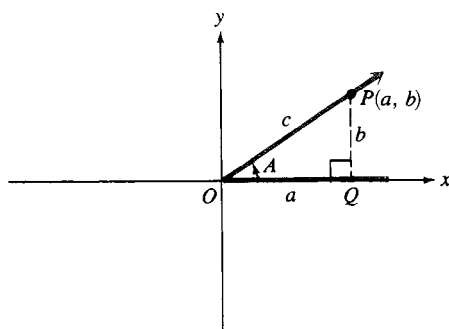


Figura 2. Ángulo agudo.

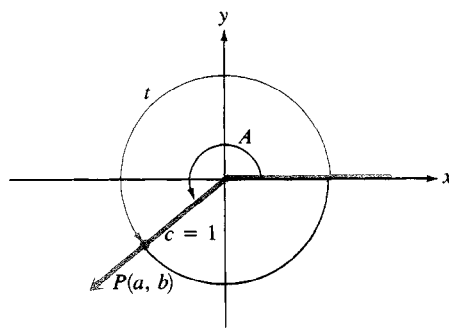


Figura 3. Ángulo arbitrario.

Ya que las definiciones concuerdan, todas las identidades fundamentales que se han usado son válidas para cualquier ángulo. Así mismo, los signos de los valores de las funciones trigonométricas concuerdan con la regla de los signos que se mostró en la sección 6.5 y con la tabla que está resumida a continuación.

Tabla de los signos de funciones trigonométricas para un ángulo A

Cuadrante que contiene el lado terminal de A	Funciones trigonométricas positivas de A	Funciones trigonométricas negativas de A
I	Todas	Ninguna
II	sen, csc	cos, sec, tan, cot
III	tan, cot	sen, csc, cos, sec
IV	cos, sec	sen, csc, tan, cot

EJEMPLO 1

Supóngase que A es un ángulo en posición normal en un sistema de coordenadas rectangulares, y $P(-5, 2)$ es un punto en el lado terminal de A . Encontrar los valores de las seis funciones trigonométricas de A . Primero hacer un dibujo del ángulo A con el punto P como lo muestra la figura 4.

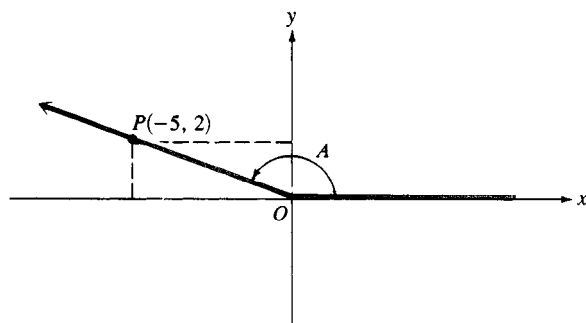


Figura 4

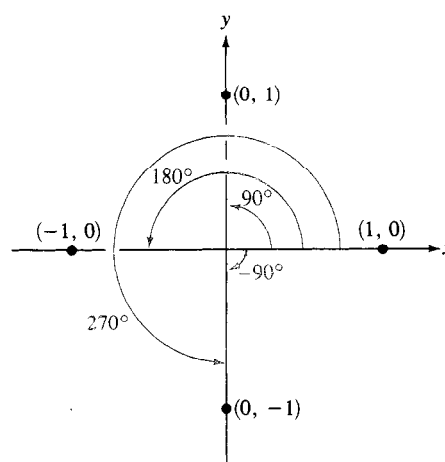


Figura 5. Ángulos cuadrantales.

Utilícese la fórmula de distancia para obtener c .

$$c = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

Entonces

$$\operatorname{sen} A = \frac{b}{c} = \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29}$$

$$\operatorname{csc} A = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$\cos A = \frac{a}{c} = -\frac{5}{\sqrt{29}} = -\frac{5\sqrt{29}}{29}$$

$$\sec A = \frac{c}{a} = -\frac{\sqrt{29}}{5}$$

$$\tan A = \frac{b}{a} = -\frac{2}{5}$$

$$\cot A = \frac{a}{b} = -\frac{5}{2}. \quad \blacksquare$$

Ángulos cuadrantes

Aquellos ángulos que tienen su lado terminal en uno de los ejes se les llama **ángulos cuadrantes**. Cada ángulo cuadrante pasa por uno de los puntos $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, o $(0, -1)$, como los ángulos que se muestran en la figura 5. Como ya sabemos cómo encontrar los valores de las funciones trigonométricas de números como $\pi/2$, π , $3\pi/2$, y $-\pi/2$, simplemente identificamos a cada función trigonométrica de un ángulo cuadrante dado en grados con la función trigonométrica del número correspondiente a la medida del ángulo en radianes. La tabla siguiente resume los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos cuadrantes de 0° a 360° .

A (radianes)	A (grados)	$\operatorname{sen} A$	$\cos A$	$\tan A$	$\operatorname{csc} A$	$\sec A$	$\cot A$
0	0°	0	1	0	no definida	1	no definida
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	no definida	1	no definida	0
π	180°	0	-1	0	no definida	-1	no definida
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	no definida	-1	no definida	0
2π	360°	0	1	0	no definida	1	no definida

Ángulos de referencia

Existe una útil relación entre un ángulo no cuadrante y un ángulo agudo que esté relacionado, llamado *ángulo de referencia*.

Ángulo de referencia

Suponga que A es un ángulo no cuadrante en posición normal en un sistema de coordenadas rectangulares. El ángulo de referencia de A es el ángulo agudo R que se forma entre el lado terminal de A y el eje x .

La figura 6 muestra varios ángulos A junto con R , en donde R es el ángulo de referencia de A . Considérese el triángulo rectángulo PQO que tiene el ángulo de referencia R . Considere el ángulo A en cada uno de los cuadrantes como lo muestra la figura 6; si $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, entonces c es la hipotenusa del

triángulo PQO . Los catetos del triángulo en el primer cuadrante tienen longitud a y b , $|a|$ y b en el segundo cuadrante, $|a|$ y $|b|$ en el tercer cuadrante, y a y $|b|$ en el cuarto cuadrante. En todos los casos, las funciones trigonométricas de A son las mismas que las del ángulo agudo R en el triángulo rectángulo PQO , *excepto*, posiblemente por el signo. Por ejemplo, si A se encuentra en el segundo cuadrante, $a < 0$ de tal manera que $|a| = -a$. Por tanto,

$$\sin R = \frac{b}{c} = \sin A$$

$$\csc R = \frac{c}{b} = \csc A$$

$$\cos R = \frac{|a|}{c} = \frac{-a}{c} = -\cos A$$

$$\sec R = \frac{c}{|a|} = \frac{c}{-a} = -\sec A$$

$$\tan R = \frac{b}{|a|} = \frac{b}{-a} = -\tan A$$

$$\cot R = \frac{|a|}{b} = \frac{-a}{b} = -\cot A.$$

Se dan resultados similares para A en otros cuadrantes. Esto lleva al siguiente teorema.

Teorema del ángulo de referencia

Suponga que A es un ángulo no cuadrante en posición normal en un sistema de coordenadas rectangulares con un ángulo de referencia R . Para encontrar el valor de una función trigonométrica de A , encuentre el valor de la función que corresponda a R y añada el signo apropiado ($+$ o $-$). Utilice la tabla de signos de los valores de funciones de A que se encuentra en esta sección.

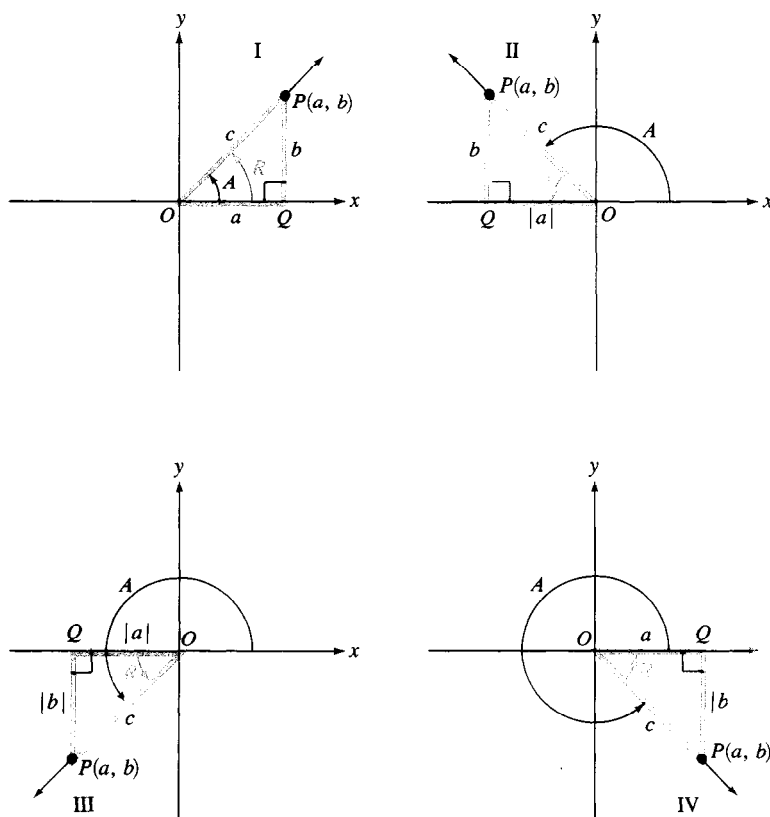


Figura 6. Ángulo de referencia.

EJEMPLO 2

Encontrar los valores de las seis funciones trigonométricas de 330° utilizando el ángulo de referencia de 330° .

El ángulo de referencia de 330° es 30° como lo muestra la figura 7. Recuérdese que en un triángulo rectángulo con ángulos de 30° y 60° , el lado opuesto al ángulo de 30° es la mitad de la hipotenusa. Supongamos que dibujamos ese triángulo en donde la hipotenusa mide 2. Entonces el lado opuesto al ángulo de 30° mide 1 y por medio del teorema de Pitágoras se sabe que el lado opuesto al ángulo de 60° mide $\sqrt{3}$, como lo muestra la figura 8.

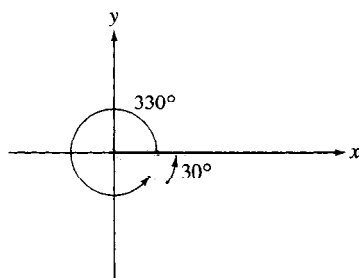
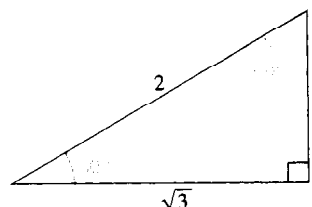


Figura 7

Figura 8. Triángulo rectángulo, 30° y 60° .

Como 330° se encuentra en el cuadrante IV, las únicas funciones trigonométricas que tienen valor positivo son el seno y la sacante. Como esta información se pueden encontrar los valores deseados.

$$\begin{aligned}\sin 330^\circ &= -\sin 30^\circ = -\frac{\text{op}}{\text{hip}} = -\frac{1}{2} \\ \cos 330^\circ &= \cos 30^\circ = \frac{\text{ad}}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan 330^\circ &= -\tan 30^\circ = -\frac{\text{op}}{\text{ad}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \csc 330^\circ &= -\csc 30^\circ = -\frac{\text{hip}}{\text{op}} = -\frac{2}{1} = -2 \\ \sec 330^\circ &= \sec 30^\circ = \frac{\text{hip}}{\text{ad}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \cot 330^\circ &= -\cot 30^\circ = -\frac{\text{ad}}{\text{op}} = -\frac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}\end{aligned}$$

No es necesario usar los ángulos de referencia para encontrar las funciones trigonométricas de ángulos arbitrarios cuando se usa una calculadora. Por ejemplo, para encontrar $\cos 330^\circ$ con una calculadora, se procede como se muestra a continuación (cerciorándose de que la calculadora esté en el modo de grados).

$$\text{ALG \& RPN: } 330 \boxed{\cos} \rightarrow \boxed{0.8660254}$$

Si encontramos $\cos 30^\circ$ con una calculadora,

$$\text{ALG \& RPN: } 30 \boxed{\cos} \rightarrow \boxed{0.8660254}$$

de tal manera que $\cos 330^\circ = \cos 30^\circ = 0.8660254$, que es una aproximación al valor exacto que es $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Sin embargo, para encontrar un ángulo, dado el valor de la función, el conocer los ángulos de referencia es bastante importante. Por ejemplo, supóngase que se da $\cos A = 0.8660254$, y se pide encontrar A . Si se siguen los pasos que a continuación se indican,

$$\text{ALG \& RPN: } 0.8660254 \text{ [INV] [cos] } \rightarrow \boxed{30}$$

Se obtiene que $A = 30^\circ$. Sin embargo, éste es sólo uno de los posibles valores de A ya que como vimos anteriormente, A también puede ser 330° . Para encontrar otros valores de A , debemos reconocer que hay muchos ángulos cuyo coseno es 0.8660254 . Todos ellos tienen el ángulo de referencia 30° , y como el coseno es positivo, todos ellos se encuentran en los cuadrantes I o IV. Uno de estos ángulos es 330° .

Es útil tener en cuenta otra de las restricciones de una calculadora. Cuando se usan las teclas [INV] [cos] la mayoría de las calculadoras dan el resultado entre 0° y 180° , o entre 0° y π radianes. Sin embargo, cuando se calcula [INV] [sen] o [INV] [tan] los resultados se dan entre -90° y 90° , o entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ radianes. La tabla que a continuación aparece resume los valores de un ángulo A que se obtienen con una típica calculadora. Estas restricciones son más claras cuando se considere en detalle las funciones trigonométricas inversas en la sección 8.5.

Teclado en la calculadora	Valor de A en grados	en radianes
[INV] [sen]	$-90^\circ \leq A \leq 90^\circ$	$-\frac{\pi}{2} \leq A \leq \frac{\pi}{2}$
[INV] [cos]	$0^\circ \leq A \leq 180^\circ$	$0 \leq A \leq \pi$
[INV] [tan]	$-90^\circ < A < 90^\circ$	$-\frac{\pi}{2} < A < \frac{\pi}{2}$

Por ejemplo, se vio que con anterioridad que

$$\text{sen } 330^\circ = -\frac{1}{2} = -0.5.$$

Supóngase que hacemos el procedimiento al revés siguiendo los pasos siguientes.

$$\begin{array}{l} \text{ALG: } 0.5 \text{ [+/-] [INV] [sen] } \rightarrow \boxed{-30} \\ \text{RPN: } 0.5 \text{ [CHS] [INV] [sen] } \rightarrow \boxed{-30} \end{array}$$

En vez de 330° , la calculadora nos da el ángulo coterminal -30° . Como resultado, si se sabe que el ángulo deseado se encuentra entre 0° y 360° , se necesitaría restar 30° , el ángulo de referencia, de 360° para obtener 330° .

EJEMPLO 3

Encontrar el ángulo A , aproximado a la centésima parte más cercana de un grado, si $0 \leq A < 360^\circ$.

a) $\text{sen } A = -0.8155$

Ya que $\text{sen } A$ es negativo, hay dos valores para A , uno en el cuadrante III y el otro en el cuadrante IV.

$$\text{ALG: } 0.8155 \quad [+/-] \quad [\text{INV}] \quad [\text{sen}] \rightarrow \boxed{-54.63683}$$

$$\text{RPN: } 0.8155 \quad [\text{CHS}] \quad [\text{INV}] \quad [\text{sen}] \rightarrow \boxed{-54.63683}$$

Este valor A , aunque esté en el cuadrante IV, no se encuentra entre 0° y 360° . El ángulo coterminal dentro de estos límites tiene como ángulo de referencia 54.63683° , así que

$$A = 360^\circ - 54.63683^\circ = 305.36317^\circ \approx 305.36^\circ.$$

Así mismo, el ángulo que está en el cuadrante III con ángulo de referencia 54.63693 es

$$A = 180^\circ + 54.63683^\circ = 234.63683^\circ \approx 234.64^\circ.$$

b) $\cot A = -3.9665$

Como $\cot A$ es negativo, los dos valores de A se encuentran en el cuadrante II y en el cuadrante IV.

$$\text{ALG: } 3.9665 \quad [+/-] \quad [1/x] \quad [\text{INV}] \quad [\text{tan}] \rightarrow \boxed{-14.150047}$$

$$\text{RPN: } 3.9665 \quad [\text{CHS}] \quad [1/x] \quad [\text{INV}] \quad [\text{tan}] \rightarrow \boxed{-14.150047}$$

El ángulo en el cuadrante IV con ángulo de referencia 14.150047° y que se encuentra entre 0° y 360° es

$$A = 360^\circ - 14.150047^\circ = 345.84995^\circ \approx 345.85^\circ.$$

El ángulo en el cuadrante II con el mismo ángulo de referencia es

$$A = 180^\circ - 14.150047^\circ = 165.84995^\circ \approx 165.85^\circ. \quad \blacksquare$$

7.1 Ejercicios

En los ejercicios 1-14 A es un ángulo en posición normal y satisface las condiciones indicadas. Encontrar los valores de A para las seis funciones trigonométricas. No utilizar calculadora.

1. $P(3, 4)$ se encuentra en el lado terminal de A .
2. $P(-3, 4)$ se encuentra en el lado terminal de A .
3. $P(-3, -4)$ se encuentra en el lado terminal de A .
4. $P(3, -4)$ se encuentra en el lado terminal de A .
5. El lado terminal de A está en el cuadrante I y sobre la recta $y = 5x$.
6. El lado terminal de A está en el cuadrante III y sobre la recta $y = 5x$.
7. El lado terminal de A está en el cuadrante II y es paralelo a la recta $2x + y - 3 = 0$.
8. El lado terminal de A está en el cuadrante IV y es paralelo a la recta $2x + y - 3 = 0$.
9. El lado terminal de A está en el cuadrante I y es perpendicular a la recta $2x + y - 3 = 0$.
10. El lado terminal de A está en el cuadrante III y es perpendicular a la recta $2x + y - 3 = 0$.
11. El lado terminal de A está en el cuadrante II y es paralelo a la recta que pasa por los puntos $(-4, 1)$ y $(2, -2)$.
12. El lado terminal de A está en el cuadrante III y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(-4, 1)$ y $(2, -2)$.
13. El lado terminal de A biseca al primer cuadrante.

14. El lado terminal de A biseca al cuarto cuadrante.

En los ejercicios 15-22 encontrar los valores de las seis funciones trigonométricas dado el valor de A .

15. $A = 0^\circ = 0$ 16. $A = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ 17. $A = 180^\circ = \pi$ 18. $A = 270^\circ = \frac{3\pi}{2}$
 19. $A = -360^\circ = -2\pi$ 20. $A = -270^\circ = -\frac{3\pi}{2}$ 21. $A = -180^\circ = -\pi$ 22. $A = -90^\circ = -\frac{\pi}{2}$

En los ejercicios 23-28 determinar en qué cuadrante se encuentra el lado terminal de A tomando en cuenta las condiciones dadas.

23. $\tan A > 0$ y $\cos A > 0$ 24. $\tan A > 0$ y $\sec A < 0$ 25. $\sec A > 0$ y $\cos A < 0$
 26. $\sec A < 0$ y $\sec A > 0$ 27. $\csc A > 0$ y $\cot A < 0$ 28. $\cos A > 0$ y $\csc A < 0$

En los ejercicios 29-44 determinar el ángulo de referencia del ángulo A .

29. $A = 137^\circ$ 30. $A = 23^\circ$ 31. $A = -40.2^\circ$ 32. $A = -512.8^\circ$
 33. $A = -325^\circ 15'$ 34. $A = 749^\circ 25'$ 35. $A = -178^\circ 45'$ 36. $A = 862^\circ 55'$
 37. $A = \frac{3\pi}{4}$ 38. $A = -\frac{7\pi}{4}$ 39. $A = \frac{5\pi}{6}$ 40. $A = -\frac{11\pi}{6}$
 41. $A = -\frac{\pi}{3}$ 42. $A = -\frac{\pi}{6}$ 43. $A = -\frac{8\pi}{3}$ 44. $A = -\frac{11\pi}{3}$

En los ejercicios 45-48 encontrar los valores de A para las seis funciones trigonométricas (aproximados a cuatro cifras decimales) con el uso del ángulo de referencia del ángulo A . Encontrar los valores de las funciones con una calculadora para verificar las respuestas.

45. $A = -50^\circ$ 46. $A = 235^\circ$ 47. $A = 920^\circ$ 48. $A = -948^\circ$

En los ejercicios 49-54 encontrar el ángulo A aproximado al minuto más cercano, si $0 \leq A < 360^\circ$.

49. $\sec A = -0.4215$ 50. $\cos A = -0.7259$ 51. $\tan A = 2.2175$
 52. $\sec A = 2.4135$ 53. $\csc A = -4.3277$ 54. $\cot A = -3.2553$

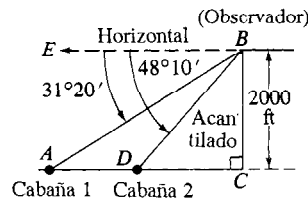
En los ejercicios 55-60 encontrar los valores del ángulo A de las cinco funciones trigonométricas restantes con el valor y la condición indicados.

55. $\cos A = \frac{4}{5}$ y A está en el cuadrante IV. 56. $\tan A = -\frac{5}{12}$ y A está en el cuadrante II.
 57. $\sec A = -\frac{2}{3}$ y A está en el cuadrante III. 58. $\cot A = \frac{12}{5}$ y A está en el cuadrante III.
 59. $\sec A = \frac{3}{2}$ y A está en el cuadrante I. 60. $\sec A = \frac{1}{3}$ y A está en el cuadrante II.

Para repaso

En la siguiente sección se resolverán triángulos que no son rectángulos. En el ejercicio 61 da un repaso de cómo resolver un triángulo rectángulo.

61. **Agrimensura.** Desde la parte superior de un acantilado se divisan dos cabañas en un valle. Suponga que las cabañas y la base del acantilado se encuentra en la misma recta y que el observador está 2 000 ft arriba del nivel del valle. Los ángulos de depresión de las cabañas son $31^\circ 20'$ y $48^\circ 10'$. ¿Qué distancia hay entre las cabañas?



Resolución de triángulos oblicuos

En el capítulo 6 se resolvieron triángulos rectángulos con el uso de las funciones trigonométricas. Los triángulos que no tienen un ángulo recto, llamados **triángulos oblicuos**, también pueden ser resueltos trigonométricamente. Si se saben tres partes del triángulo, el resto de las partes se puede calcular. Por lo menos una de las partes tiene que ser un lado, ya que hay un número ilimitado de triángulos semejantes que tienen los tres ángulos dados.

Se estudiarán dos métodos para resolver triángulos oblicuos, *la ley de los senos* y *la ley de los cosenos*. El método que se use depende de las partes que conozcamos del triángulo. Hay cuatro casos.

- Caso I. Dados dos ángulos y un lado (*AAL*). En este caso se conocen los tres ángulos ya que el tercer ángulo puede ser calculado restando la suma de los dos ángulos de 180° . Este caso puede ser resuelto con la ley de los senos.
- Caso II. Dados dos lados y un ángulo opuesto a uno de los lados (*LLA*). Este caso puede ser ambiguo en donde puede no haber una solución, sólo una solución, o dos soluciones para el triángulo. Cuando hay una solución (o dos soluciones) se puede aplicar la ley de los senos.
- Caso III. Dados dos lados y el ángulo entre ellos (*LAL*). En este caso se requiere el uso de la ley de los cosenos y normalmente, después la ley de los senos.
- Caso IV. Dados tres lados (*LLL*). En este caso se requiere el uso de la ley de los cosenos y normalmente, después la ley de los senos.

Demostración de la ley de los senos

Ahora se derivará la ley de los senos utilizando un **triángulo agudo**, en el cual todos los ángulos son agudos. El proceso es similar si se usa un **triángulo obtuso**, en el cual un ángulo es obtuso.

En un triángulo agudo ABC , dibuje la altura desde el vértice C como lo muestra la figura 9. Después, con relación a los triángulos ACP y BCP , se tiene que

$$\frac{h}{b} = \sin A \quad \text{y} \quad \frac{h}{a} = \sin B.$$

Divídase $h = b \sin A$ y $h = a \sin B$ de tal manera que

$$b \sin A = a \sin B.$$

Dividiendo los dos lados entre $\sin A \sin B$ (que nunca es nulo ya que ni A o B son 0° o 180°).

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$$

Así mismo, si se dibuja la altura desde el vértice A , se tiene que

$$\frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}.$$

Cuando estos resultados se combinan, se obtiene la ley de los senos.

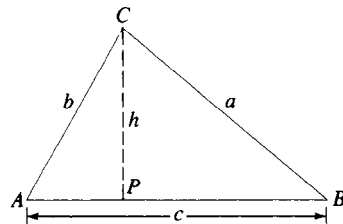


Figura 9. Ley de los senos.

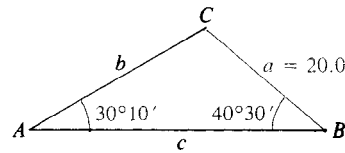


Figura 10

Ley de los senos

En cualquier triángulo ABC

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

O sea, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos a ellos.

Resolución de triángulos

Ahora se resolverá un triángulo como el del caso I, dados un lado y dos ángulos (AAL). Así como para la resolución de triángulos rectángulos, se sigue la regla de precisión en la sección 6.4. Todos los lados se dan con la misma aproximación que la del lado menos preciso y todos los ángulos al grado más cercano, al minuto más cercano, o al segundo más cercano dependiendo de la precisión de los lados.

EJEMPLO 1

Resolver el triángulo ABC en el cual $a = 20.0$, $A = 30^\circ 10'$ y $B = 40^\circ 30'$.

Hacer un dibujo bastante aproximado, como el de la figura 10 e identificar las partes que necesite encontrar.

Para encontrar C : ya que $A + B + C = 180^\circ$,

$$30^\circ 10' + 40^\circ 30' + C = 180^\circ$$

$$C = 180^\circ - 70^\circ 40' = 109^\circ 20'.$$

Para encontrar b : utilizar la ecuación de la ley de los senos ya que tiene tres de las partes conocidas y b .

$$\begin{aligned} \frac{a}{\operatorname{sen} A} &= \frac{b}{\operatorname{sen} B} \\ \frac{20.0}{\operatorname{sen} 30^\circ 10'} &= \frac{b}{\operatorname{sen} 40^\circ 30'} \\ b &= \frac{(20.0) \operatorname{sen} 40^\circ 30'}{\operatorname{sen} 30^\circ 10'} \\ &\approx 25.8 \end{aligned}$$

A continuación se da la secuencia de calculadora que se necesita para encontrar b .

ALG: 10 \div 60 $+$ 30 $=$ \sin STO 30 \div 60 $+$ 40 $=$ \sin \times 20 $=$ \div RCL $=$

RPN: 10 ENTER 60 \div 30 $+$ \sin STO 30 ENTER 60 \div 40 $+$ \sin 20 \times RCL \div

El número que aparece en la pantalla muestra $\boxed{25.847802}$. No borrar la memoria ya que el valor de $\sin 30^\circ 10'$ puede ser utilizado en el próximo paso.

$$\begin{aligned}\text{Para encontrar } c: \quad \frac{a}{\sin A} &= \frac{c}{\sin C} \\ \frac{20.0}{\sin 30^\circ 10'} &= \frac{c}{\sin 109^\circ 20'} \\ c &= \frac{(20.0)(\sin 109^\circ 20')}{\sin 30^\circ 10'} \\ &\approx 37.6\end{aligned}$$

ALG: 20 \div 60 $+$ 109 $=$ \sin \times 20 \div RCL $=$ \rightarrow $\boxed{37.555283}$

RPN: 20 ENTER 60 \div 109 $+$ \sin 20 \times RCL \div \rightarrow $\boxed{37.555283}$ ■

El caso ambiguo

Para el caso II, el caso ambiguo en donde hay dos lados y un ángulo opuesto a uno de los lados (LLA), hay cuatro posibilidades. En los próximos cuatro ejemplos se considera cada una de estas posibilidades.

EJEMPLO 2

Resolver el triángulo ABC en el cual $a = 10.0$, $b = 20.0$ y $A = 50^\circ 10'$.

Cuando se intenta dibujar el triángulo de la figura 11, el lado a parece ser demasiado corto como para llegar al tercer lado. Sin embargo, con la información dada se tratará de encontrar B .

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} \\ \frac{10.0}{\sin 50^\circ 10'} &= \frac{20.0}{\sin B} \\ \sin B &= \frac{20.0(\sin 50^\circ 10')}{10.0} \\ &\approx 1.5358\end{aligned}$$

Como el valor del seno de un ángulo no puede ser mayor que uno, no puede haber un ángulo B con valor de seno de 1.5358. Siguiendo los pasos a continuación, con una calculadora, se obtendrá el mensaje de error en la pantalla para el valor de B .

ALG: 10 \div 60 $+$ 50 $=$ \sin \times 20 \div 10 $=$ INV \sin \rightarrow $\boxed{\text{Error}}$

RPN: 10 ENTER 60 \div 50 $+$ \sin 20 \times 10 \div INV \sin \rightarrow $\boxed{\text{Error}}$

Por tanto, no hay ningún triángulo que satisfaga a las condiciones dadas. ■

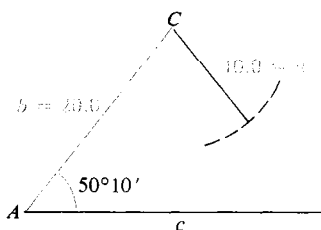


Figura 11

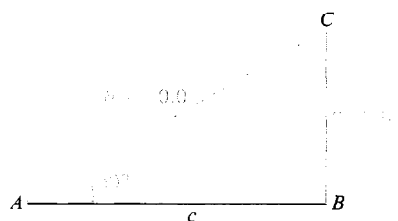


Figura 12

EJEMPLO 3

Resolver el triángulo ABC en donde $a = 5.0$, $b = 10.0$, $A = 30^\circ 00'$, como lo muestra la figura 12. Si sustituye en

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

$$\frac{5.0}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{10.0}{\operatorname{sen} B}$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{(10.0)(\operatorname{sen} 30^\circ)}{5.0} = 1$$

$$B = 90^\circ$$

En este caso se tiene exactamente un triángulo, un triángulo rectángulo, el cual satisface las condiciones dadas. Se puede usar el teorema de Pitágoras para encontrar $c = \sqrt{75} \approx 8.7$. También $C = 90^\circ - A = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. □

EJEMPLO 4

Resolver el triángulo ABC en el cual $a = 16.0$, $b = 21.0$ y $A = 30^\circ 10'$.

En este caso, si hace un dibujo a escala, parece ser que hay dos triángulos diferentes que satisfacen la información dada (véase la figura 13). Si sustituye en

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

$$\frac{16.0}{\operatorname{sen} 30^\circ 10'} = \frac{21.0}{\operatorname{sen} B}$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{(21.0)(\operatorname{sen} 30^\circ 10')}{16.0} \approx 0.6596$$

$$B = 41^\circ 20' \quad \text{o} \quad B = 180^\circ - 41^\circ 20' = 138^\circ 40'$$

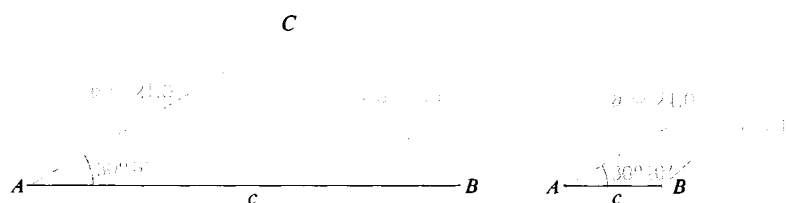


Figura 13

Recordar que hay dos ángulos entre 0° y 180° cuyo seno es igual a 0.6596, uno en el primer cuadrante ($41^\circ 20'$) y el otro en el segundo cuadrante ($138^\circ 40'$). Así pues, hay dos soluciones completamente diferentes que corresponden a las figuras de arriba.

Primera solución: Cuando $A = 30^\circ 10'$, $B = 41^\circ 20'$, $a = 16.0$ y $b = 21.0$,

$$C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - 71^\circ 30' = 108^\circ 30'.$$

$$\text{También, } \frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

$$\frac{16.0}{\text{sen } 30^\circ 10'} = \frac{c}{\text{sen } 108^\circ 30'}$$

$$c = \frac{(16.0)(\text{sen } 108^\circ 30')}{\text{sen } 30^\circ 10'} \approx 30.2.$$

Segunda solución: Cuando $A = 30^\circ 10'$, $B = 138^\circ 40'$, $a = 16.0$, $b = 21.0$,

$$\text{También, } C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - 168^\circ 50' = 11^\circ 10'.$$

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

$$\frac{16.0}{\text{sen } 30^\circ 10'} = \frac{c}{\text{sen } 11^\circ 10'}$$

$$c = \frac{(16.0)(\text{sen } 11^\circ 10')}{\text{sen } 30^\circ 10'} \approx 6.2.$$

EJEMPLO 5

Resolver el triángulo ABC en el cual $a = 24.0$, $b = 9.0$ y $A = 41.5^\circ$.

Del dibujo que aparece en la figura 14, parece ser que sólo un triángulo satisface la información dada.

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B}$$

$$\frac{24.0}{\text{sen } 41.5^\circ} = \frac{9.0}{\text{sen } B}$$

$$\text{sen } B = \frac{(9.0)(\text{sen } 41.5^\circ)}{24.0} \approx 0.2485$$

$$B \approx 14.4^\circ \quad \text{o} \quad B = 180^\circ - 14.4^\circ = 165.6^\circ$$

De nueva cuenta se tienen dos ángulos entre 0° y 180° cuyo seno es igual a 0.2485. Sin embargo, esta vez, B no puede ser el ángulo más grande, 165.6° ya que

$$A + B = 41.5^\circ + 165.6^\circ = 207.1^\circ,$$

que es más que 180° , la suma de los ángulos en un triángulo. Por tanto solamente hay una solución. Cuando $A = 41.5^\circ$, $B = 14.4^\circ$, $a = 24.0$ y $b = 9.0$, entonces

$$C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - 55.9^\circ = 124.1^\circ.$$

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

$$\frac{24.0}{\text{sen } 41.5^\circ} = \frac{c}{\text{sen } 124.1^\circ}$$

$$c = \frac{(24.0)(\text{sen } 124.1^\circ)}{\text{sen } 41.5^\circ} \approx 30.0$$

La clave para superar la *ambigüedad* de los casos ambiguos que involucran a dos lados a y b y un ángulo A , opuesto a uno de los lados, es calcular el seno de B .

1. Si $\text{sen } B > 1$, no hay ninguna solución ya que para ningún ángulo se tiene que $\text{seno} > 1$.
2. Si $\text{sen } B = 1$, hay exactamente una solución; un triángulo rectángulo, ya que un ángulo de 90° tiene $\text{seno} = 1$.
3. Si $\text{sen } B < 1$, puede haber una o dos soluciones, ya que hay dos ángulos entre 0° y 180° con $\text{seno} < 1$. Si B es un ángulo en el primer cuadrante y B' es un ángulo en el segundo cuadrante, hay una solución en B y una segunda solución en B' si $B' + A < 180^\circ$.

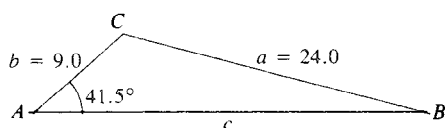


Figura 14

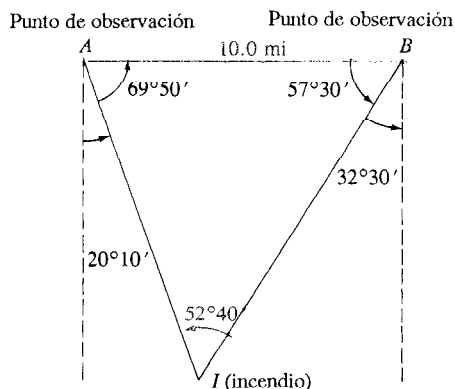


Figura 15. Orientación.

NOTA: Muchos problemas aplicados resultan ser de triángulos oblicuos. Los mismos pasos que se usan para resolver triángulos rectángulos también se usan para resolver otros problemas con triángulos.

1. Dibujar y etiquetar la figura.
2. Indicar la(s) parte(s) desconocida(s) con una(s) variable(s).
3. Encontrar una ecuación que muestre una relación entre las partes conocidas y las partes desconocidas del triángulo.

EJEMPLO 6

Silvicultura

El punto de observación B se encuentra a 10.0 mi al este del punto A . La orientación de un incendio de A es $S20^\circ10' E$ y la orientación de B es $S32^\circ30' O$. ¿Qué tan lejos se encuentra el incendio de A ?

El dibujo de la figura 15 da la información pertinente.

$$\angle BAF = 90^\circ - 20^\circ10' = 69^\circ50'$$

$$\angle ABF = 90^\circ - 32^\circ30' = 57^\circ30'$$

Así pues,

$$\angle AFB = 180^\circ - (69^\circ50' + 57^\circ30') = 52^\circ40'.$$

Como se tiene AAL , se usa la ley de los senos.

$$\frac{AF}{\text{sen } ABF} = \frac{AB}{\text{sen } AFB}$$

$$\frac{AF}{\text{sen } 57^\circ30'} = \frac{10.0}{\text{sen } 52^\circ40'}$$

$$AF = \frac{(10.0)(\sin 57^\circ 30')}{\sin 52^\circ 40'} \approx 10.6$$

El incendio está como a 10.6 mi del punto de observación A .

EJEMPLO 7

Aeronáutica

Un avión despegó del aeropuerto A y vuela en dirección $60^\circ 20'$. Después de cierto tiempo su dirección desde una ciudad B , a 200 mi al oeste de A , es de $78^\circ 10'$. En ese momento, ¿qué tan lejos se encuentra el avión de B ? (Recordar que la dirección de navegación se mide en la dirección de las manecillas del reloj desde el norte).

Con respecto al dibujo de la figura 16,

Así pues

$$\angle PBA = 90^\circ - 78^\circ 10' = 11^\circ 50'$$

$$\angle PAB = 90^\circ + 60^\circ 20' = 150^\circ 20'$$

$$\angle BPA = 180^\circ - (11^\circ 50' + 150^\circ 20')$$

$$= 180^\circ - 162^\circ 10' = 17^\circ 50'$$

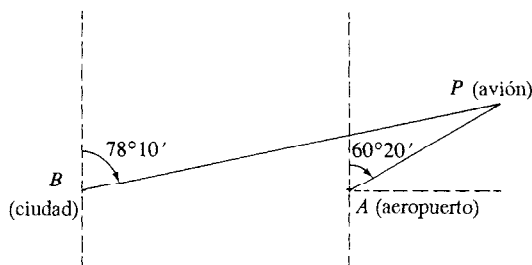


Figura 16. Dirección de navegación.

Se deben encontrar PB , la distancia del avión a la ciudad B . Usando la fórmula de la ley de los senos,

$$\begin{aligned} \frac{PB}{\sin PAB} &= \frac{BA}{\sin BPA} \\ \frac{PB}{\sin 150^\circ 20'} &= \frac{200}{\sin 17^\circ 50'} \\ PB &= \frac{(200)(\sin 150^\circ 20')}{\sin 17^\circ 50'} \approx 323 \end{aligned}$$

El avión está aproximadamente a 323 mi de la ciudad B .

7.2 Ejercicios

En los ejercicios 1-14 resolver cada triángulo con las partes dadas.

1. $A = 42^\circ 30'$, $B = 50^\circ 20'$, $a = 10.5$

2. $A = 37^\circ 10'$, $C = 100^\circ 20'$, $b = 5.0$

3. $B = 52.75^\circ$, $C = 61.25^\circ$, $a = 12.45$

4. $A = 91.92^\circ$, $B = 22.58^\circ$, $c = 6.18$

5. $A = 30.0^\circ$, $b = 12.0$, $a = 6.0$

6. $B = 45.0^\circ$, $b = 5.0$, $c = 5.0$

7. $A = 47^\circ 20'$, $b = 18.5$, $a = 3.5$

9. $B = 28^\circ 50'$, $b = 8.0$, $c = 13.5$

11. $C = 51^\circ 10'$, $c = 30.2$, $b = 12.3$

13. $C = 20^\circ 42'$, $b = 11.35$, $c = 7.06$

8. $C = 60^\circ 30'$, $b = 12.2$, $c = 8.7$

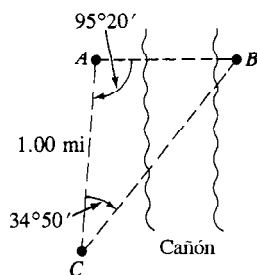
10. $A = 32^\circ 40'$, $b = 17.3$, $a = 10.7$

12. $B = 48^\circ 40'$, $b = 24.3$, $a = 5.6$

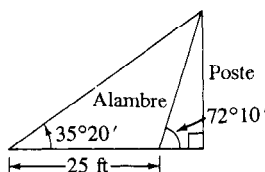
14. $B = 12^\circ 18'$, $b = 18.47$, $a = 7.95$

Resolver.

15. **Silvicultura.** El puesto de vigilancia B se encuentra a 15.0 km al este del puesto de vigilancia A . Un incendio se divisa de B con una orientación $N23^\circ 10' O$, mientras que la orientación del incendio A es $N51^\circ 20' E$. ¿Qué tan lejos se encuentra el incendio del puesto de vigilancia A ?
16. **Silvicultura.** La torre de vigilancia A se encuentra a 20.0 mi al norte de la torre de vigilancia B . La orientación de un incendio de A es $N41.0^\circ E$ y la orientación del incendio de B es $N22.0^\circ E$. ¿Qué tan lejos está el incendio de A ? ¿De B ?
17. **Navegación.** Un bote navega en un curso de 20.0° de una isla que se encuentra a 8.0 mi al este de un faro. En tres horas su posición desde el faro es 31.0° . En ese momento, ¿qué tan lejos está del faro? ¿De la isla?
18. **Aeronáutica.** La base aérea de Statton se encuentra al oeste de Jackson Field. Un avión sale de Statton y vuela en una dirección $125^\circ 40'$. En el instante en que se encuentra a 350 mi de Statton, la dirección a Jackson es $64^\circ 10'$. ¿Cuál es la distancia de la base aérea de Statton a Jackson Field?
19. **Agrimensura.** Los puntos A y B están en lados opuestos de un cañón. El punto C está a 1.00 mi de A . La medida del $\angle BAC$ es $95^\circ 20'$ y la medida del $\angle ACB$ es $34^\circ 50'$. ¿Cuál es la distancia entre A y B ?

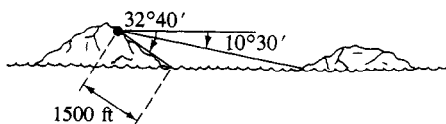


Ejercicio 19

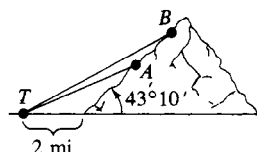


Ejercicio 20

20. **Ingeniería.** El ángulo que se forma por un alambre de retención que se fija a la parte superior de un poste es de $72^\circ 10'$. Desde un punto del piso, en línea recta con la base del alambre, el ángulo de elevación a la punta del poste es $35^\circ 20'$ y se encuentra a 25 ft de la base del alambre. ¿Cuál es la longitud del alambre de retención?
21. **Agrimensura.** Desde un punto de una isla, a 1 500 ft de la costa, el ángulo de depresión a la costa de otra isla es $10^\circ 30'$. Si el ángulo de depresión a la costa de la primera isla desde el mismo punto es $32^\circ 40'$, ¿qué distancia hay entre las dos islas?

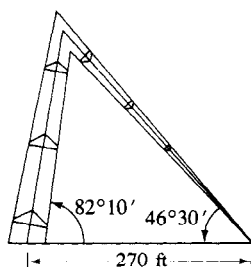


Ejercicio 21



Ejercicio 22

- 22. Ingeniería.** El costado de una montaña forma un ángulo de $43^\circ 10'$ con la horizontal. Un pueblo T se encuentra a 2 mi de la base de la montaña. Los ángulos de elevación de dos puntos A y B en el costado de la montaña desde el punto T son, $10^\circ 30'$ y $11^\circ 10'$. ¿Cuál es la distancia aproximada entre A y B ?
- 23. Navegación.** Dos barcos, el USS Lincoln y el USS Wilson, están separados 120.0 mi náuticas entre sí cuando reciben la señal del piloto de un avión en descenso forzado. La dirección de la señal es $35^\circ 15'$ desde el Lincoln, la dirección del Wilson desde el Lincoln es $82^\circ 35'$ y la dirección de la señal desde el Wilson es $319^\circ 55'$. ¿Cuál de los dos llega primero al piloto si los dos pueden viajar a 38 nudos? ¿Cuánto tiempo le toma el primer barco de rescate en llegar?
- 24. Astronomía.** Suponga que las órbitas de Mercurio y de la Tierra son circulares y están en el mismo plano; la Tierra está a 9.3×10^7 mi del sol y Mercurio está a 3.6×10^7 mi del Sol. Suponga que Mercurio se ve desde la Tierra y que el ángulo que se forma entre el sol, la Tierra y Mercurio, en donde la Tierra es el vértice, es 8.35° . a) ¿Qué tan lejos se encuentra Mercurio de la Tierra en este momento? b) ¿Cuál sería el ángulo máximo posible entre el Sol, la Tierra y Mercurio?
- 25. Ingeniería.** Una torre transmisora de radio fue derribada por el huracán Bruce y terminó en la posición mostrada en la figura que aparece a continuación. ¿Cuál era la altura original de la torre?



26. La fórmula

$$(a - b) \cos \frac{C}{2} = c \sin \left(\frac{A - B}{2} \right),$$

llamada **fórmula de Mollweide**, tiene como propiedad que se usan las seis partes de cualquier triángulo. Por esta razón, la fórmula se puede usar para comprobar la solución de un triángulo. Así pues, si los valores de las seis partes de un triángulo se sustituyen y la parte izquierda de la igualdad no es igual a la parte derecha, entonces se ha cometido un error al resolver el triángulo. Utilizar la fórmula de Mollweide para comprobar la solución al triángulo en el ejercicio 1.

27. Ejercicios

- 27.** ¿Cuál es el ángulo de referencia para el ángulo $A = -251^\circ 40'$?
- 28.** Encontrar los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo A en posición normal si el lado terminal de A en el cuadrante II es paralelo a la línea $4x + y - 8 = 0$.
- 29.** Encontrar el ángulo A , al minuto más cercano, si $0 \leq A < 360^\circ$ y $\tan A = -4.1395$.
- 30.** Supóngase que A está en el cuadrante IV y $\cot A = -\frac{4}{5}$. Encontrar los valores de las funciones restantes de A .

28. Ejercicios de aplicación

En la sección 7.2 se resolvieron triángulos oblicuos en donde un lado y dos ángulos eran dados (**AAL**) y en donde dos lados y un ángulo opuesto a no de los lados eran dados (**LLA**). Cuando se conocen dos lados y

el ángulo comprendido (*LAL*) o cuando se saben tres lados (*LLL*), la ley de los senos no se puede aplicar ya que siempre habrá dos incógnitas en la ecuación. En estos dos casos se puede usar la *ley de los cosenos*.

Demostración de la ley de los cosenos

Dibujar la altura desde el vértice C al lado opuesto del triángulo ABC de la figura 17. Si se aplica el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos ACD y BCD tenemos que

$$b^2 = x^2 + h^2 \quad \text{y} \quad a^2 = h^2 + (c - x)^2.$$

Despejar h^2 en las dos ecuaciones.

$$h^2 = b^2 - x^2 \quad \text{y} \quad h^2 = a^2 - (c - x)^2$$

Igualar los dos resultados y despejar a^2 .

$$\begin{aligned} b^2 - x^2 &= a^2 - (c - x)^2 \\ b^2 - x^2 &= a^2 - c^2 + 2cx - x^2 \\ b^2 &= a^2 - c^2 + 2cx \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2cx \end{aligned}$$

En el triángulo ACD , $\cos A = x/b$ de tal manera que $x = b \cos A$. Sustituyendo, se tiene que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

$$\text{Así mismo,} \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$\text{y} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

como se podría ver si se dibuja la altura de cualquiera de los otros vértices.

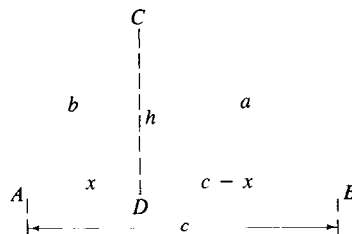


Figura 17. Ley de los cosenos.

Ley de los cosenos

En el triángulo ABC ,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Es mejor recordar la ley de los cosenos mediante una oración que abarca a las tres ecuaciones.

Ley de los cosenos (forma alternativa)

El cuadrado de la longitud de cualquiera de los lados de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados al cuadrado menos dos veces el producto de estos lados por el coseno del ángulo formado entre ellos.

La ley de los cosenos es comúnmente llamada una generalización del teorema de Pitágoras ya que si el ángulo que aparece en la fórmula es un ángulo recto, su coseno es 0 y el término $-2bc \cos A$ (o $-2ac \cos B$ o $-2ab \cos C$) se elimina, lo que nos da el teorema de Pitágoras.

Resolución de triángulos

Primero considérese un ejemplo del caso III (véase la sección 7.2) que tiene dos lados y el ángulo incluido (LAL).

EJEMPLO 1

Resolver el triángulo ABC en el cual $A = 58^\circ 30'$, $b = 10.0$, y $c = 15.0$.

Hacer el dibujo de un triángulo como lo muestra la figura 18 y ver que se den como dos lados y el ángulo incluido (LAL). Nótese que si se intenta usar la ley de los senos,

$$\frac{a}{\sin 58^\circ 30'} = \frac{10}{\sin B} \quad \text{o} \quad \frac{a}{\sin 58^\circ 30'} = \frac{15}{\sin C},$$

se obtiene una ecuación con dos incógnitas. Esto demuestra por qué la ley de los cosenos es necesaria.

Para encontrar a : sustituir en la fórmula

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \\ a^2 &= ()^2 + ()^2 - 2()() \cos \\ &\approx 168.25 \\ a &\approx \sqrt{168.25} \approx 13.0. \end{aligned}$$

Los pasos de la calculadora a seguir para encontrar a son

ALG: 30 \div 60 $+$ 58 $=$ \cos \times 15 \times 10 \times 2 $+/-$ $+$ 15 x^2 $+$ 10 x^2 $=$ $\sqrt{}$
 RPN: 30 ENTER 60 \div 58 $+$ \cos 15 \times 10 \times 2 \times CHS 15 x^2 $+$ 10 x^2 $+$ $\sqrt{}$

La pantalla muestra $\boxed{12.971138}$. Aproximando a la décima más cercana, tenemos que $a \approx 13.0$.

Una vez que se sabe el valor de a , es probablemente más fácil proseguir con el uso de la fórmula de los senos.

Para encontrar B :

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin B} &= \frac{b}{\sin A} \\ \sin B &= \frac{(10.0)(\sin 58^\circ 30')}{13.0} \end{aligned}$$

$$\approx 0.6559$$

$$B = 41^{\circ}00' \quad \text{o} \quad 139^{\circ}00'$$

Pero ya que $139^{\circ}00' + 58^{\circ}30' = 197^{\circ}30' > 180^{\circ}$, el ángulo más grande $139^{\circ}00'$ tiene que ser descartado. Así que la única solución es

$$B = 41^{\circ}00'.$$

Para encontrar C : $C = 180^{\circ} - (A + B) = 180^{\circ} - 99^{\circ}30' = 80^{\circ}30'$. \square

A continuación se considera el caso IV, en el cual se tienen por conocidos los tres lados (LLL).

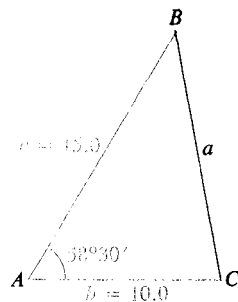


Figura 18



Figura 19

EJEMPLO 2

Resolver el triángulo ABC en el cual $a = 5.0$, $b = 7.1$ y $c = 10.2$.

Primero hacer un dibujo del triángulo, como el de la figura 19. Queda claro que si no se conoce ningún ángulo, no se puede aplicar la ley de los senos.

Para encontrar A : Sustituir en

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Es mejor despejar $\cos A$ primero y luego resolver.

$$\cos A = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Ahora se sustituye los valores de a , b y c .

$$\cos A = \frac{(7.1)^2 + (10.2)^2 - (5.0)^2}{2(7.1)(10.2)} \approx 0.8937$$

Por tanto

$$A \approx 26.7^{\circ}.$$

Los pasos necesarios para calcular A son:

ALG: $7.1 \ [x^2] \ [+]\ 10.2 \ [x^2] \ [-]\ 5 \ [x^2] \ [=] \ [\div] \ 2 \ [\div] \ 7.1 \ [\div] \ 10.2 \ [=] \ [INV] \ [\cos]$

RPN: $7.1 \ [x^2] \ 10.2 \ [x^2] \ [+]\ 5 \ [x^2] \ [-]\ 2 \ [\div] \ 7.1 \ [\div] \ 10.2 \ [\div] \ [INV] \ [\cos]$

La pantalla muestra $\boxed{26.652341}$, lo que da $A = 26.7^{\circ}$, aproximado a la décima de grado más cercana.

Para encontrar C : C podría ser encontrado con la ley de los senos, pero para mostrar qué pasa cuando la fórmula da un coseno negativo, supóngase que se usa

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Primero despejar $\cos C$ y luego sustituir los valores.

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{100^2 + 100^2 - 150^2}{2(100)(100)} \\ &\approx -0.4032\end{aligned}$$

Por tanto,

$$C \approx 113.8^\circ$$

Para encontrar B : $B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - 140.5^\circ = 39.5^\circ$.

Muchos de los problemas aplicados requieren del uso de la ley de los cosenos para solucionarlos.

EJEMPLO 3

Aeronáutica. El pueblo A está a 200.0 mi al sur del pueblo B . Un piloto, que vuela de A a B , vuela las primeras 120.0 mi fuera del curso en una dirección $352^\circ 20'$. ¿Qué tan lejos se encuentra el piloto de B en este momento?

Del dibujo de la figura 20 se puede ver que $\angle BAP$ es $360^\circ - 352^\circ 20' = 7^\circ 40'$ y la distancia que queremos es BP . En el triángulo PBA , tenemos dos lados dados, $AP = 120$ y $AB = 200$, y el ángulo comprendido, $\angle BAP = 7^\circ 40'$. Si sustituimos en la ley de los cosenos,

$$\begin{aligned}(BP)^2 &= (AP)^2 + (AB)^2 - 2(AP)(AB) \cos BAP \\ &= 120^2 + 200^2 - 2(120)(200) \cos 7^\circ 40' \\ &\approx 6829.1\end{aligned}$$

Por tanto, $BP \approx \sqrt{6829.1} \approx 82.6$.

El piloto se encuentra aproximadamente a 82.6 mi del pueblo B .

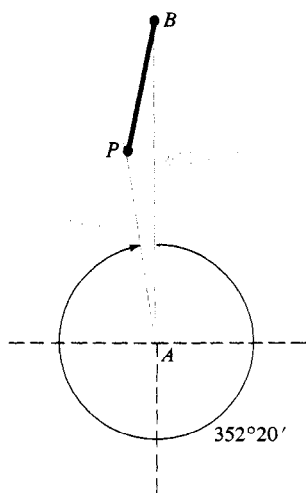


Figura 20

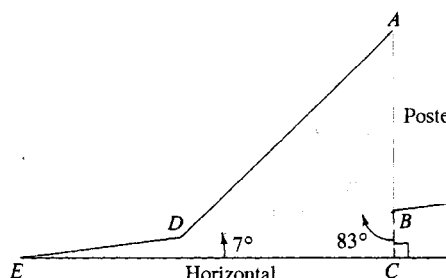


Figura 21

EJEMPLO 4

Ingeniería. Una colina tiene una inclinación de 7° con respecto a la horizontal. A un poste vertical de 50 ft de altura se le amarra un cable que se extiende hasta el piso a 60 ft de la base del poste colina abajo. ¿Qué tan largo necesita ser el cable?

Ver dibujo de la figura 21. Se necesita determinar AD . En el triángulo rectángulo ECB , $\angle EBC = 90^\circ - 7^\circ = 83^\circ$. Entonces, $\angle ABD$ en el triángulo ABD es igual a $180^\circ - 83^\circ = 97^\circ$. Así pues, tenemos dos lados ($AB = 50$ y $DB = 60$) y el ángulo comprendido ($\angle ABD = 97^\circ$). Si se sustituye en la fórmula de los cosenos.

$$\begin{aligned}(AD)^2 &= (AB)^2 + (DB)^2 - 2(AB)(DB) \cos ABD \\ &= (50)^2 + (60)^2 - 2(50)(60) \cos 97^\circ \\ &\approx 6831.2\end{aligned}$$

Por tanto, $AD \approx 83$.

El cable tiene que ser de aproximadamente 83 ft de largo.

Los ejemplos que aparecen a continuación sugieren que la ley de los cosenos sea memorizada en su forma alterna ya que en los problemas aplicados no se especifican las letras a , b y c .

7.3. Ejercicios

En los ejercicios 1-12 resolver cada uno de los triángulos dadas las partes.

- | | |
|--|---|
| 1. $A = 42.5^\circ$, $b = 7.8$, $c = 9.3$ | 2. $B = 121^\circ 20'$, $a = 8.4$, $c = 12.3$ |
| 3. $a = 9.0$, $b = 12.0$, $c = 20.0$ | 4. $a = 15.35$, $b = 8.24$, $c = 22.76$ |
| 5. $a = 15.0$, $b = 15.0$, $c = 13.0$ | 6. $a = 3.25$, $b = 7.85$, $c = 7.85$ |
| 7. $a = 2.2$, $b = 3.7$, $c = 12.4$ | 8. $a = 35.1$, $b = 7.3$, $c = 10.4$ |
| 9. $A = 12^\circ 40'$, $b = 10.0$, $C = 130^\circ 10'$ | 10. $B = 20^\circ 10'$, $b = 18.4$, $c = 9.2$ |
| 11. $a = 11.3$, $c = 8.2$, $B = 120.4^\circ$ | 12. $a = 5.45$, $b = 6.89$, $c = 7.01$ |

En los ejercicios 13-14 utilizar el hecho de que los ángulos adyacentes en un paralelogramo son suplementarios para encontrar la longitud de las diagonales de un paralelogramo dados los lados a y b , y un ángulo C .

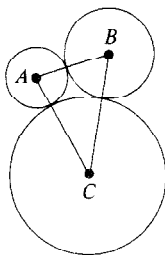
- | | |
|--|---|
| 13. $a = 5.5$, $b = 8.2$, $C = 42^\circ 30'$ | 14. $a = 15.35$, $b = 21.62$, $C = 105^\circ 38'$ |
|--|---|

Un rombo es un paralelogramo de cuatro lados de igual tamaño. En los ejercicios 15-16 encontrar la longitud de las diagonales de un rombo que tiene lados a y un ángulo A .

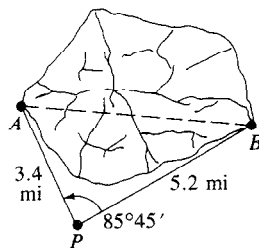
- | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| 15. $a = 7.28$, $A = 121^\circ 55'$ | 16. $a = 4.3$, $A = 28^\circ 40'$ |
|--------------------------------------|------------------------------------|

17. **Aeronáutica.** Ciudad Jefferson se encuentra a 300 mi al sur de Wilville. Un piloto que va de Ciudad Jefferson a Wilville vuela las primeras 200 mi fuera de curso en una dirección de $9^\circ 00'$. ¿Qué tan lejos se encuentra el piloto de Wilville en este momento?
18. **Aeronáutica.** Un avión despegue de un aeropuerto y vuela hacia el oeste durante 200 mi y luego 150 mi en una dirección de 230° . ¿Qué tan lejos se encuentra del aeropuerto?
19. **Navegación.** Dos barcos departen una isla al mismo tiempo. El primero navega a 20 mph en una dirección de 330.0° , y el segundo navega a 25 mph en dirección 200.0° . Después de 2 horas, ¿a qué distancia se encuentran los barcos entre sí?
20. **Navegación.** Un barco navega 24.2 mi del puerto en una dirección de 31.0° , y luego 16.4 mi en una dirección de 142.0° . En este momento, ¿qué tan lejos se encuentra el barco del puerto?

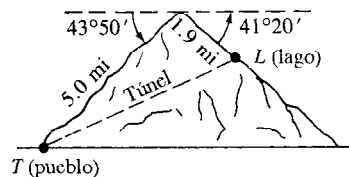
- 21. Agrimensura.** Dos puntos A y B están en lados opuestos de un edificio. Un agrimensor escoge un tercer punto C a 45 m de A y a 65 m de B en donde el $\angle ACB = 52^\circ 30'$. ¿Qué distancia hay entre A y B ?
- 22. Agrimensura.** Un terreno triangular tiene una de sus esquinas con un ángulo de $69^\circ 40'$. Si los lados del terreno que forman este ángulo miden 180 m y 125 m, ¿cuál es la longitud aproximada del tercer lado?
- 23. Ingeniería.** Una torre vertical de 500 ft de altura está en la cima de una colina cuyo lado forma un ángulo de 12° con la horizontal. Un cable es amarrado a la punta de la torre y al piso a 600 ft colina abajo desde la base de la torre. ¿Qué longitud necesita tener el cable?
- 24. Ingeniería.** Dos vigas tienen un largo de 14.0 ft y 12.0 ft y se unen en un ángulo de 62.0° . ¿Cuál es el largo de la envergadura soportada por las vigas?
- 25. Deportes.** La distancia del cojín de *home* al jardín central en el estadio de Sun Devil es de 408 ft. Si el diamante de béisbol es un cuadrado, y la distancia del *home* a la primera base es de 90 ft, ¿qué distancia hay entre la primera base y el jardín central?
- 26. Deportes.** Un golfista hace su primer tiro, pero se desvía $21^\circ 00'$ hacia la derecha de la línea entre el hoyo y donde realizó su primer tiro. Si la distancia entre el hoyo y donde empezó es de 360 yd, y su tiro fue de 215 yd, ¿qué tan largo necesita ser su segundo tiro para que llegue al hoyo?
- 27. Aeroespacio.** Una estación de rastreo divisa a un satélite sobre la superficie terrestre. Si el plato de rastreo apunta a 41.0° sobre el horizonte, y el satélite se encuentra a 123.0 mi de la estación, ¿qué tan alto se encuentra el satélite de la superficie de la tierra? Supóngase que el radio de la tierra es de 4 000 mi.
- 28. Geometría.** Tres círculos con radios 2.8 in, 4.1 in y 7.3 in son externamente tangentes uno con otro como lo muestra la figura. ¿Cuáles son los ángulos que se forman al juntar los centros de los círculos?



Ejercicio 28



Ejercicio 30



Ejercicio 31

- 29. Geometría.** Los tres puntos $A(1, 9)$, $B(3, -2)$, y $C(-4, 1)$ son los vértices de un triángulo. El punto D es el punto medio del lado AB . Encuentre $\angle ADC$ aproximado a los diez minutos más cercanos.
- 30. Ingeniería.** Un túnel será construido a través de una montaña, del punto A al punto B , como lo muestra la figura de arriba. ¿Cuál es la longitud del túnel?
- 31. Ingeniería.** Un acueducto será construido desde un lago en la parte oeste de una montaña a un pueblo en la base de la montaña en la parte este de ésta. Un ingeniero toma las medidas que se muestran en la figura de arriba. a) ¿Cuánto medirá el túnel? b) Si los que construyen el túnel empiezan en el pueblo cavando a través de la montaña, ¿qué ángulo con respecto a la horizontal deben seguir para llegar al lago?
- 32. Navegación.** Un barco de contrabando navega a razón de 20 nudos en una dirección de $40^\circ 00'$ desde la Isla del Diablo que se encuentra a 10 mi náuticas al norte de un puerto en tierra firme. Un barco guardacostas que navega a 35 nudos empieza la persecución en el mismo instante. ¿En qué dirección deberá ir el barco guardacostas para interceptar al barco de contrabando, y cuánto tiempo le tomará alcanzarlo? (Sugerencia: Sea x el número de horas que se necesitan para que lo intercepte, y considerar el triángulo con lados 10, $20x$ y $35x$.)

Para repaso

En los ejercicios 33-34 resolver cada uno de los triángulos dadas las partes.

33. $A = 25^\circ 20'$, $B = 72^\circ 40'$, $b = 3.6$

34. $A = 48^\circ 50'$, $b = 8.3$, $a = 14.7$

35. **Aeroespacio.** Un OVNI es divisado sobre el nivel del piso exactamente entre dos personas que se encuentran a 1 500 m entre sí. Si los ángulos de elevación de las dos personas al OVNI son $32^\circ 20'$ y $44^\circ 40'$, ¿qué tan alto se encuentra el objeto sobre el piso?

36. **Agrimensura.** El ángulo de elevación de la cima de Mount Humphrey desde un punto con elevación de 8 000 ft es $35^\circ 30'$. Desde un segundo punto 500 ft más cerca de la montaña, pero aún a una elevación de 8 000 ft, el ángulo de elevación es $37^\circ 40'$. ¿Qué tan alta es Mount Humphrey aproximadamente?

7.4. ÁREA DE UN TRIÁNGULO

La fórmula más común para el área de un triángulo involucra a un lado, llamado **base**, y la altura desde el vértice opuesto a la base, llamada **altura**. El área del triángulo de la figura 22 está dada por

$$\text{Área} = \frac{1}{2}bh.$$

Para verificar esta fórmula, considerar la figura 23. Las áreas de los triángulos I y II son iguales, así como las áreas de los triángulos III y IV. Así pues, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Área del rectángulo } ACDE &= \text{I} + \text{II} + \text{III} + \text{IV} \\ &= \text{II} + \text{II} + \text{III} + \text{III} \\ (\text{Área del triángulo } ABC) &= 2(\text{II}) + 2(\text{III}) \\ &= 2(\text{II} + \text{III}) \\ &= 2(\text{área del triángulo } ABC). \end{aligned}$$

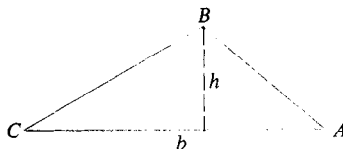


Figura 22

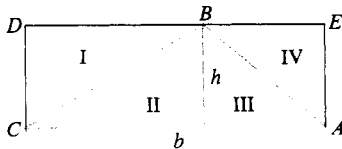


Figura 23

Si divide los dos lados entre 2, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Área del triángulo } ABC &= \frac{1}{2} \text{ Área del rectángulo } ACDE \\ &= \frac{1}{2}bh. \end{aligned}$$

En esta sección se desarrollan otras tres fórmulas para encontrar el área de un triángulo en donde se conocen las otras partes de un triángulo que no son ni la base ni la altura correspondiente. Las tres situaciones son las siguientes.

1. Dados dos lados y el ángulo comprendido (*LAL*).
2. Dados dos ángulos (por tanto los tres) y un lado (*ALA* o *AAL*).
3. Dados tres lados (*LLL*).

Área de un triángulo *LAL*

Tomando en cuenta el triángulo ABC de la figura 24 y suponiendo que a , b y C son dados. Se h la altura trazada hacia la base del triángulo, que interseca a AC en el punto E . Entonces en el triángulo rectángulo BEC ,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} C &= \frac{h}{a} \\ a \operatorname{sen} C &= h.\end{aligned}$$

Como el área del triángulo ABC es

$$\text{Área} = \frac{1}{2}bh,$$

si sustituimos por h , se tiene que

$$\text{Área} = \frac{1}{2}ba \operatorname{sen} C.$$

Esta fórmula sólo incluye a las partes conocidas del triángulo ABC . La derivación utiliza una figura en la cual C es agudo. Si C es un ángulo recto, entonces $\operatorname{sen} C = 1$ y $a = h$ (ver figura 25), de tal manera que $\text{Área} = \frac{1}{2}bh$ nos da el mismo resultado. Si C es obtuso, como en la figura 26, extendemos AC y dibujamos la altura, h , desde B . Sea θ el $\angle BCE$, entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \theta &= \frac{h}{a} \\ a \operatorname{sen} \theta &= h.\end{aligned}$$

Pero $\theta = 180^\circ - C$, y ya que

$$\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen}(180^\circ - C) = \operatorname{sen} C,$$

tenemos otra vez que

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \frac{1}{2}bh \\ &= \frac{1}{2}ba \operatorname{sen} \theta \\ &= \frac{1}{2}ba \operatorname{sen} C.\end{aligned}$$

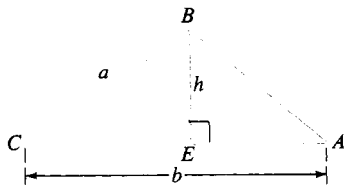


Figura 24

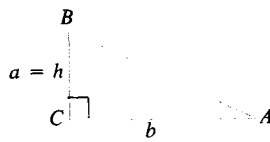


Figura 25

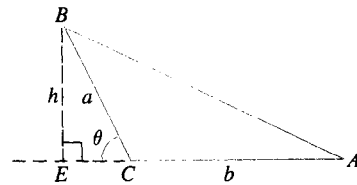


Figura 26

Área de un triángulo

Para cualquier triángulo ABC con lados a , b y c , cuando dos lados y el ángulo comprendido son dados, el área está dada por:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}ac \operatorname{sen} B.$$

Por lo tanto, el área de cualquier triángulo es un medio por el producto de cualesquiera de dos lados y el seno del ángulo comprendido.

EJEMPLO 1

Encontrar el área del triángulo mostrado en la figura 27.

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C \\ &= \frac{1}{2} \quad \quad \quad \operatorname{sen} \\ &\approx 13.5 \text{ pulgadas cuadradas}\end{aligned}$$

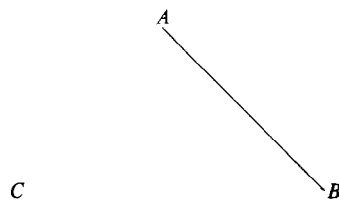


Figura 27

Área del triángulo ALA o AAL

Con el uso de la ley de los senos, se puede modificar la fórmula $\text{Área} = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C$ para resolver la situación en la que se conocen dos ángulos. Ya que

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B},$$

se tiene que

$$b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}.$$

sustituir este valor de b en $\text{Área} = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C$.

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \frac{1}{2}a \left(\frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} \right) \operatorname{sen} C \\ &= \frac{1}{2}a^2 \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}\end{aligned}$$

De nueva cuenta, los diversos nombres de las partes de un triángulo dan tres fórmulas para el teorema siguiente.

Área de un triángulo

Para cualquier triángulo ABC cuyos lados son a , b y c , cuando dos ángulos se conocen, el área está dada por:

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \frac{1}{2}a^2 \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \\ \text{Área} &= \frac{1}{2}b^2 \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} \\ \text{Área} &= \frac{1}{2}c^2 \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}.\end{aligned}$$

Por tanto, el área de cualquier triángulo es la mitad del producto del cuadrado de cualquier lado y los senos de los ángulos comprendidos dividido entre el seno del ángulo opuesto.

EJEMPLO 2

Encontrar el área del triángulo que se muestra en la figura 28.

Primero, encontrar C .

$$\begin{aligned}C &= 180^\circ - 23^\circ 50' - 27^\circ 20' \\ &= 128^\circ 50'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Y ya que } a &= 4.5 \text{ m, } A = 27^\circ 20', \\ B &= 23^\circ 50' \text{ y } C = 128^\circ 50',\end{aligned}$$

sustituir para encontrar el área.

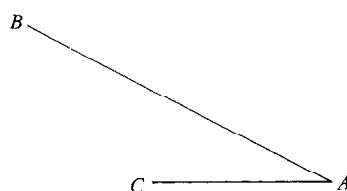


Figura 28

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \frac{1}{2}a^2 \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \\ &= \frac{1}{2} \frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \\ &\approx 6.9 \text{ m}^2\end{aligned}$$

Área de un triángulo *LLL*

De nueva cuenta se puede empezar con

$$\text{Área} = \frac{1}{2}ab \sin C$$

y derivar una fórmula para poder calcular el área de un triángulo cuando se conocen los tres lados. Primero elevar al cuadrado ambos lados.

$$\begin{aligned} (\text{Área})^2 &= \frac{1}{4}a^2b^2 \sin^2 C \\ &= \frac{1}{4}a^2b^2(1 - \cos^2 C) \text{ ya que } \sin^2 C = 1 - \cos^2 C \end{aligned}$$

De acuerdo con la ley de los cosenos,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Despejando $\cos C$.

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Si se sustituye $\cos C$ en la expresión del $(\text{Área})^2$.

$$\begin{aligned} (\text{Área})^2 &= \frac{1}{4}a^2b^2 \left[1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{4}a^2b^2 \left[1 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2} \right] \\ &= \frac{1}{4}a^2b^2 \left[\frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2} \right] \\ &= \frac{1}{16} [2ab - (a^2 + b^2 - c^2)][2ab + (a^2 + b^2 - c^2)] \quad \text{Factorizar la diferencia de los cuadrados} \\ &= \frac{1}{16} [c^2 - (a - b)^2][(a + b)^2 - c^2] \quad \text{Despejar los paréntesis, utilizar la ley conmutativa y factorizar} \\ &= \frac{1}{16} [c - (a - b)][c + (a - b)][(a + b) - c][(a + b) + c] \\ &= \frac{1}{16} [c - a + b][c + a - b][a + b - c][a + b + c] \end{aligned}$$

Extraer la raíz cuadrada en ambos lados y aplicar la ley conmutativa.

$$\text{Área} = \frac{1}{4} \sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}$$

Para recordar los factores que aparecen bajo el radical, recordar que el primero es la suma de la longitud de los tres lados, y que los otros tres están formados por la suma de la longitud de dos de los lados y restando la longitud del tercer lado. Si se define el **semiperímetro** de un triángulo cuyos lados son a , b y c como

$$s = \frac{a + b + c}{2},$$

se puede obtener una manera más conocida de la fórmula del área.

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)} \\ &= \sqrt{\frac{(a+b+c)}{2} \cdot \frac{(a+b-c)}{2} \cdot \frac{(a+c-b)}{2} \cdot \frac{(b+c-a)}{2}} \\ &= \sqrt{s(s-c)(s-b)(s-a)}\end{aligned}$$

Esta bien conocida fórmula para el área de un triángulo fue planteada por primera vez por el matemático griego Herón (aproximadamente 75 d.C.) y se le conoce como la **fórmula de Herón**.

Fórmula de Herón

Para cualquier triángulo ABC cuyos lados son a , b y c , el semiperímetro es

$$s = \frac{a+b+c}{2},$$

y el área es

$$\text{Área} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

EJEMPLO 3

Encontrar el área de un triángulo cuyos lados son 3 ft, 4 ft y 5 ft.

El semiperímetro es $s = \frac{3+4+5}{2} = \frac{12}{2} = 6$ ft. Así pues,

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)} \\ &= \sqrt{6(3)(2)(1)} \\ &= \sqrt{36} \\ &= 6 \text{ ft}^2.\end{aligned}$$

Recordar que un triángulo con lados 3 ft, 4 ft y 5 ft es en realidad un triángulo rectángulo con hipotenusa 5 ft. Así pues los catetos del triángulo se pueden considerar como la base y la altura de tal manera que el área es $\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \text{ ft}^2$. Por lo que en este caso se tiene una comprobación de la fórmula de Herón (sólo por que es un triángulo rectángulo).

Algunos problemas aplicados involucran encontrar el área de un triángulo. Se concluye esta sección con la primera aplicación de la introducción de este capítulo.

EJEMPLO 4

Consumismo

Una cabaña tiene una pared en forma de un triángulo con dos lados de 26 ft en longitud y el tercero de 18 ft. La pared es de 6 in de espesor y tiene una ventana que mide 4 ft por 5 ft. Si el costo de aislamiento es de 0.90 dólares por ft cúbico, ¿cuál será el costo aproximado para aislar la pared?

Primero se tiene que encontrar el volumen de la pared triangular y restarle el volumen que abarca la ventana. Tomar en cuenta el dibujo de la figura 29.

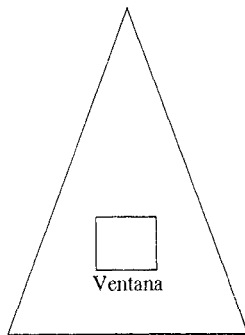


Figura 29

El volumen que abarca la ventana es

$$\begin{aligned} V_1 &= (5)(4)(0.5) \\ &= 10 \text{ ft}^3. \end{aligned}$$

El volumen de la pared triangular es

$$\begin{aligned} V_2 &= 0.5\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= 0.5\sqrt{35(35-26)(35-26)(35-18)} \\ &= 0.5\sqrt{48,195} \\ &\approx 109.77 \text{ ft}^3. \end{aligned}$$

Así pues, el volumen que se necesita aislar es

$$V = V_2 - V_1 \approx 99.77 \text{ ft}^3,$$

y el costo es $(99.77)(0.90) \approx 89.79$ dólares.

7.4 Ejercicios

En los ejercicios 1-16 encontrar el área del triángulo ABC dadas las partes.

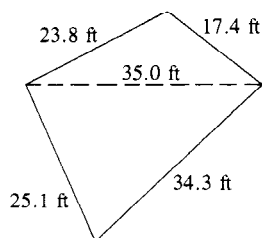
- | | |
|---|---|
| 1. $a = 20.0$ in, $b = 8.0$ in, $C = 35^\circ 20'$ | 2. $b = 7.35$ cm, $c = 3.25$ cm, $A = 41^\circ 40'$ |
| 3. $a = 11.75$ yd, $c = 8.90$ yd, $B = 110^\circ 45'$ | 4. $a = 32.3$ m, $b = 11.5$ m, $A = 147^\circ 30'$ |
| 5. $A = 40^\circ 50'$, $B = 32^\circ 40'$, $c = 16.2$ ft | 6. $A = 61^\circ 35'$, $C = 42^\circ 55'$, $b = 19.10$ cm |
| 7. $B = 32^\circ 48'$, $C = 54^\circ 24'$, $b = 15.45$ in | 8. $B = 41^\circ 50'$, $C = 127^\circ 30'$, $a = 13.9$ in |
| 9. $a = 2.35$ yd, $b = 3.18$ yd, $c = 4.09$ yd | 10. $a = 16.0$ cm, $b = 16.0$ cm, $c = 16.0$ cm |
| 11. $a = 4.1$ m, $b = 4.1$ m, $c = 4.1$ m | 12. $a = 8.72$ ft, $b = 10.84$ ft, $c = 15.62$ ft |
| 13. $B = 27^\circ 20'$, $a = 6.7$ ft, $b = 15.0$ ft | 14. $A = 102^\circ 40'$, $a = 15.3$ cm, $b = 5.2$ cm |

Sugerencia: Primero utilizar la ley de los senos.

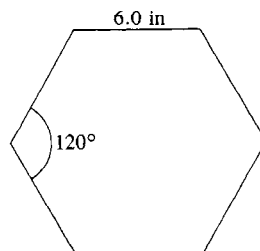
- | | |
|---|--|
| 15. $A = 30.3^\circ$, $B = 27.7^\circ$, $C = 122.0^\circ$ | 16. $A = 60.0^\circ$, $B = 60.0^\circ$, $C = 60.0^\circ$ |
|---|--|

Resolver.

17. **Consumo.** Un terreno triangular tiene un estanque circular de 18 yd de diámetro. Si los lados del terreno miden 75 yd, 55 yd y 40 yd, y la yarda cuadrada de pasto tiene un costo de 2.25 dólares y la instalación es gratuita, ¿cuánto sería el costo de poner el pasto sobre el terreno?
18. **Consumo.** Una recámara en forma triangular tiene lados 15.2 yd, 12.4 yd y 11.8 yd. Si la yarda cuadrada de alfombra cuesta 19.95 dólares, la yarda cuadrada de bajo alfombra cuesta 2.25 dólares, y la instalación viene incluida gratis, aproximando al dólar más cercano, ¿cuánto sería el costo de instalar el bajo alfombra y alfombrar la recámara, tomando en cuenta que no se desperdicie nada?
19. **Consumo.** Un pintor de letreros desea hacer un letrero en forma de un triángulo isósceles cuyos lados iguales son de 12.0 yd y los ángulos de la base son 65° . ¿Cuál es el área del letrero?
20. **Agricultura.** Un jardín tiene la forma de un **cuadrilátero** (una figura de cuatro lados) como lo muestra la figura. ¿Cuál es el área del jardín?



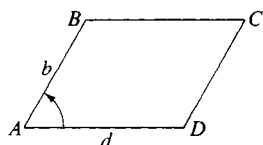
Ejercicio 20



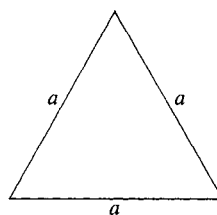
Ejercicio 21

21. **Geometría.** Encontrar el área del **hexágono regular** de la figura.
22. **Geometría.** ¿Cuál es el área del triángulo formado por los centros de tres círculos que son externamente tangentes y tienen radios 4.0 cm, 6.0 cm y 10.0 cm?
23. **Ingeniería.** Una placa triangular de aluminio tiene un espesor de 0.5 in y sus lados miden 11.0 in, 15.5 in y 18.7 in. ¿Cuál es el volumen de la placa?
24. **Ingeniería.** Si se taladra un hoyo de 2.5 in de diámetro en la placa del ejercicio 23 ¿cuál es el volumen del aluminio restante?
25. **Ingeniería.** Un reflector solar consta de 32 espejos triangulares, cada uno con lados 2.2 m, 2.2 m y 0.4 m. ¿Cuál es el área total del reflector?
26. **Arqueología.** Una pirámide en México tiene cuatro caras triangulares congruentes. Si cada cara es un triángulo isósceles, en donde la base mide 180.0 m y los lados iguales miden 165.0 m, ¿cuál es el área total de la pirámide (incluyendo la base)?
27. **Geometría.** Verificar que el área del paralelogramo mostrado a continuación está dada por

$$\text{Área} = bd \sin A.$$



Ejercicio 27



Ejercicio 28

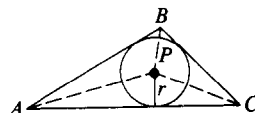
28. Verificar que el área del triángulo equilátero que se muestra arriba está dada por

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2.$$

29. Verificar que el radio del círculo inscrito en el triángulo ABC de la figura está dado por

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

en donde s es el semiperímetro del triángulo.



30. **Recreación.** Un director de recreación desea construir una pista redonda para correr en un parque triangular cuyos lados son 350.0 yd, 420.0 yd y 570.0 yd. ¿Cuál es la longitud de la pista más grande posible?

Para repasar

31. **Geología.** Dos puntos A y B se encuentran en los lados más lejanos opuestos de un cráter de tal manera que es imposible medir directamente la distancia entre ellos. Un tercer punto C es seleccionado de tal manera que AC es 80.0 m, BC es 75.0 m y el $\angle ACB$ es 41.5° . ¿Cuál es el ancho del cráter?

32. **Navegación.** Un bote zarpa de Key West, Florida, y navega durante 4 horas a 20 nudos, en dirección $310^\circ 30'$. Después cambia de curso y se dirige en dirección de $215^\circ 30'$, viajando durante 5 horas a 22 nudos.

Aproximadamente a la milla náutica más cercana, ¿qué tan lejos se encuentra el bote de Key West?

Hacer los ejercicios 33-34 para prepararse en el estudio del movimiento armónico simple en la próxima sección. Encontrar a) la amplitud, b) el periodo y c) el defasamiento de cada función.

33. $y = -3 \sin(2x - \pi)$

34. $y = 5 \cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)$

7.5. MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Varios problemas aplicados involucran a un objeto que se mueve de arriba a abajo (o de atrás para adelante) en un movimiento rítmico. Tales movimientos suceden cuando se tocan las cuerdas de un instrumento musical, cuando se mueve el pistón de un motor, cuando se balancea un péndulo de un lado a otro, cuando las olas del mar rompen en la costa y cuando las cuerdas vocales de una persona emiten sonidos. Al movimiento vibratorio de este tipo se le llama **movimiento armónico**. Cuando no se toman en cuenta las fuerzas de fricción, se tiene un **movimiento armónico simple**, y puede ser descrito fácilmente con el uso de funciones trigonométricas.

Un ejemplo muy claro de movimiento armónico simple es el movimiento ondular de un trozo de cuerda, en donde un extremo es amarrado a una pared y se le hace oscilar moviendo el otro extremo de arriba abajo rítmicamente. Las ondas parecen originarse en el extremo en movimiento y pasar a través de la cuerda hacia el extremo fijo (véase la figura 30). Un nudo en la cuerda se mueve de arriba abajo rítmicamente, y de hecho se encuentra en un movimiento armónico simple.

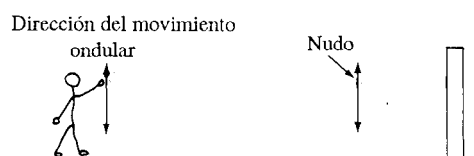


Figura 30. Movimiento armónico simple.

Derivación de las ecuaciones

Para establecer una relación entre las funciones seno y coseno y el movimiento armónico simple, considérese el punto $P(x, y)$ que se mueve a un ritmo constante a lo largo de la circunferencia de un círculo. En la figura 31 el ángulo θ mide B radianes/segundo. Suponer que el punto empieza en la posición cuyas coordenadas son $(A, 0)$, en donde A es el radio del círculo con centro $(0, 0)$. A $H(x, 0)$ se le llama la **proyección horizontal** de P sobre el eje x , y a $V(0, y)$ se le llama la **proyección vertical** de P sobre el eje y . Conforme P se mueve alrededor del círculo empezando en $(A, 0)$, H varía de $(A, 0)$ a $(-A, 0)$ y de regreso. La distancia de H al origen $(0, 0)$ está entre 0 y A , inclusive. Si se interpreta que las unidades negativas estén a la izquierda del origen, entonces el movimiento de P determina el punto $H(x, 0)$ en donde $-A \leq x \leq A$. De la misma manera el movimiento determina a $V(0, y)$ en donde $-A \leq y \leq A$. Podríamos describir la medida del ángulo θ en términos de la variable t , que representa al tiempo, por

$$\theta = Bt,$$

ya que la velocidad angular es constante. Entonces

$$\cos \theta = \frac{x}{A} \quad \text{y} \quad \sin \theta = \frac{y}{A}.$$

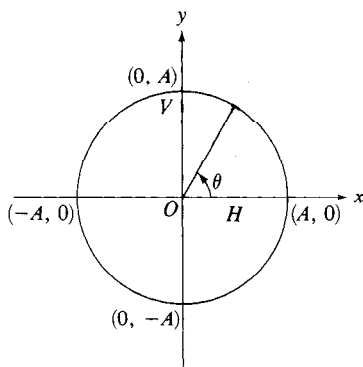


Figura 31. Movimiento alrededor de un círculo.

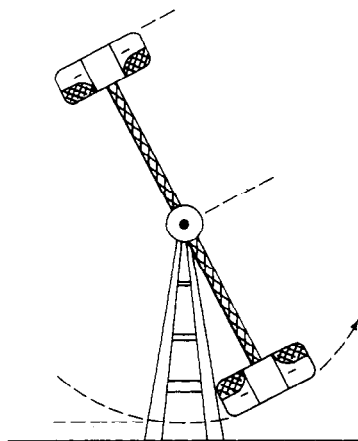


Figura 32. "Martillo".

Sustituir Bt en lugar de θ y resolver para x y para y .

$$x = A \cos Bt \quad \text{y} \quad y = A \sin Bt$$

En esta discusión, se ha supuesto que el punto P empezó en $(A, 0)$. Una variación final da un resultado más general. Si en el tiempo $t = 0$ (el punto empieza su movimiento en el tiempo cero) el punto está en un ángulo $\theta = D$ radianes, entonces el ángulo θ puede ser descrito en términos del tiempo t por

$$\theta = Bt + D.$$

Por tanto, el movimiento horizontal y el movimiento vertical de los puntos H y V quedan descritos, respectivamente, por

$$x = A \cos (Bt + D) \quad \text{y} \quad y = A \sin (Bt + D).$$

Recordar de la sección 6.7 que para graficar estas relaciones, se factoriza B , lo que da

$$\begin{aligned}x &= A \cos B\left(t + \frac{D}{B}\right) & y &= A \sin B\left(t + \frac{D}{B}\right), \\&= A \cos B(t - C) & &= A \sin B(t - C).\end{aligned}$$

Por lo que las amplitudes de cada uno son $|A|$, los periodos son $2\pi/B$, y los defasamientos son $C = -(D/B)$. De esta manera, el periodo $2\pi/B$ es el tiempo que se necesita para que el movimiento concluya un ciclo. Otra cantidad de gran utilidad es la **frecuencia**, $B/2\pi$, del movimiento, que es el número de ciclos que se completan en un segundo. (Por ejemplo, si el periodo es de $1/3$, entonces en $1/3$ segundo se completa un ciclo y la frecuencia es 3 ($3 = 3/1$), ya que 3 ciclos se completan en 1 segundo.)

EJEMPLO 1

Recreación

El "martillo" del parque de diversiones mostrado en la figura 32 tiene un radio de 18 ft y gira a 15 rpm. Suponga que el compartimiento de pasajeros está a 3 ft del nivel del piso al final del arco. Encontrar una ecuación que nos da la altura del pasajero sobre el piso en función del tiempo t en segundos y utilizar la ecuación para estimar la altura de un pasajero después de 2.5 segundos de iniciado el paseo.

Puesto que el martillo gira a 15 rpm, esto es equivalente a $1/4$ de revolución por segundo, o 1 revolución cada 4 segundos. También, la altura máxima es 39 ft y la altura mínima es 3 ft. La altura mínima ocurre cuando $t = 0, 4, 8, 12, \dots$ y la altura máxima ocurre cuando $t = 2, 6, 10, 14, \dots$ se puede describir la relación utilizando una ecuación del tipo

$$h = A \cos B\left(t + \frac{D}{B}\right) + E,$$

en donde E es el punto de equilibrio. Si cuando $t = 0$ el pasajero se encuentra en la parte más baja de la trayectoria, entonces $D = 0$ (el ángulo inicial es 0 radianes). Ya que h varía entre 3 y 39, la amplitud es $|A| = \frac{1}{2}(39 - 3) = \frac{1}{2}(36) = 18$, el radio de la trayectoria. El periodo, $2\pi/B$, es 4 de tal manera que $B = \pi/2$. El valor de E es 21 ya que el centro de rotación está a 21 ft, y se debe dejar que $A = -18$ para que se obtenga la posición correcta en el tiempo $t = 0$. Por tanto, la ecuación es

$$h = -18 \cos \frac{\pi}{2}t + 21.$$

La tabla que aparece a continuación muestra h en ciertos tiempos críticos durante una revolución y verifica que la ecuación sí describe el movimiento.

t (s)	h (ft)
0	3
1	21
2	39
3	21
4	3

Entonces, 2.5 segundos después de iniciada la trayectoria la altura del pasajero es

$$h = -18 \cos \frac{\pi}{2}(2.5) + 21 \approx -18(-0.7071) + 21 \approx 34 \text{ ft.}$$

Sistemas de masa y resorte

Uno de los mejores ejemplos de movimiento armónico involucra un **sistema de masa y resorte**, en el cual un peso cuelga de un resorte amarrado al techo. El sistema está en **estado de equilibrio** cuando el peso suspendido se encuentra completamente quieto. Si el peso se jala hacia abajo (o empujado hacia arriba) una cierta distancia y luego se suelta, seguirá oscilando de arriba a abajo indefinidamente, si es que no se toma en cuenta la resistencia al aire ni la fricción. Si un sistema de coordenadas es superpuesto de tal manera que la posición del peso en equilibrio coincida con el origen, una ecuación del tipo

$$y = A \sin(Bt + D)$$

da la distancia entre el peso y la posición de equilibrio en cualquier tiempo t (véase la figura 33). Las constantes A , B y D dependen todas, por supuesto, del tamaño del peso, de la tensión en el resorte y la distancia a la que se jale el peso hacia abajo originalmente.

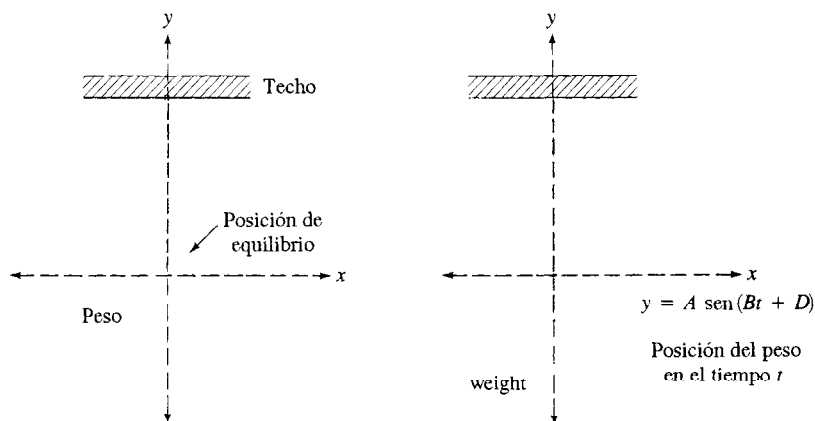


Figura 33. Sistema de masa y resorte.

EJEMPLO 2

Masa-resorte

Supóngase que el movimiento de un sistema de masa-resorte queda descrito por

$$y = 4 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right),$$

en donde y es la distancia en pies del peso al punto de equilibrio (negativo es hacia abajo y positivo es hacia arriba del punto de equilibrio) y t es el tiempo medido en segundos. Suponer que el peso está a 15 ft del techo en el estado de equilibrio.

- a) En el tiempo $t = 0$, el peso, que ha sido empujado hacia arriba al punto de partida, es liberado. ¿Qué tan lejos se encuentra del techo en este momento?

Sustituir $t = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} y &= 4 \sin\left(\pi \cdot 0 + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 4 \sin\frac{\pi}{2} = 4. \end{aligned}$$

Ya que el peso se encuentra 4 ft arriba del punto de equilibrio, que está a 15 ft del techo, el peso es liberado en una posición a 11 ft del techo.

- b) ¿Cuándo cruza el peso por primera vez el punto de equilibrio?

Esto sucede cuando $y = 0$. Por tanto resolvemos

$$0 = 4 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$0 = \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Ya que la función seno es cero en $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$, tenemos que dejar que $\pi t + \pi/2$ sea uno de estos valores. Si $\pi t + \pi/2 = 0$, entonces $t = -\frac{1}{2}$, y no tiene sentido. Entonces se intenta con π .

$$\pi t + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\pi t = \frac{\pi}{2}$$

$$t = \frac{1}{2}$$

Cuando $t = \frac{1}{2}$

$$y = 4 \sin\left(\pi \cdot \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 4 \sin \pi = 4 \cdot 0 = 0.$$

Por tanto, después de $\frac{1}{2}$ segundo de que se libera el peso éste pasa por el punto de equilibrio. La

próxima vez que pase por este punto será en el tiempo $t = \frac{3}{2}$ s, que es cuando $\pi t + \pi/2 = 2\pi$. De hecho, cuando $t = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \dots$, el peso pasará por la posición de equilibrio.

- c) ¿Cuál será la distancia máxima que el peso estará del techo?

Esto ocurre cuando $|y|$ es lo más grande posible, pero y es negativo. Se ha visto que la amplitud de una función como ésta es $|A|$. Ya que $A = 4$, el valor más pequeño de y es -4 . Con el punto de equilibrio a 15 ft, la distancia máxima a la que el peso estará del techo es 19 ft. Para que y sea -4 ,

$$-4 = 4 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$-1 = \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Así pues, $\pi t + \frac{\pi}{2}$ deberá ser $\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \dots$. Utilizando el valor $\frac{3\pi}{2}$,

$$\pi t + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\pi t = \pi$$

$$t = 1.$$

Por tanto, 1 s después de que el peso es liberado, éste alcanzará al punto a 19 ft del techo. Regresará a esta posición en tiempos de 3 s, 5 s, 7 s, y así sucesivamente.

Movimiento amortiguado y resonancia

En el ejemplo 2 se supuso una situación que en realidad no puede suceder. De hecho, el movimiento del peso será de tal manera que la distancia máxima al punto de equilibrio (amplitud) empezará a disminuir hasta que el peso quede otra vez en reposo en un estado de equilibrio. En este caso se dice que el movimiento armónico es **amortiguado**. El movimiento armónico amortiguado es muy común en las aplicaciones a la física. El efecto opuesto, llamado **resonancia**, ocurre cuando la distancia máxima del punto de equilibrio aumenta conforme el tiempo crece. La resonancia puede crear una situación peligrosa, y el clásico ejemplo de esto es el colapso de un puente en suspensión en 1940 en el estado de Washington. Cualquier puente de suspensión, similar a la cuerda que hemos considerado con anterioridad, se ondula de arriba a abajo debido al viento y a las condiciones de tráfico. Si este movimiento es resonante, el puente será literalmente ondulado y destruido. Tal fue el caso del puente de Tacoma Narrows sobre Puget Sound. Como resultado, los ingenieros se dieron cuenta que es esencial que el movimiento armónico natural de cosas como puentes, edificios, automóviles, y aviones esté amortiguado. La trigonometría es importante para analizar los problemas de este tipo.

7.5. Ejercicios

Resolver

- 1. Recreación.** La rueda de la fortuna en el parque de diversiones de Beach Front tiene un diámetro de 60 ft, gira a 6 rpm y está a 5 ft del piso en su punto más bajo.
 - a) Encontrar una ecuación que dé la altura de un pasajero en términos del tiempo t .
 - b) ¿Cuál es la altura de un pasajero después de 35 s en movimiento?
- 2.** Repetir el ejercicio 1 para la rueda de la fortuna de un carnaval ambulante que tiene un diámetro de 30 ft, gira a 10 rpm y está a 4 ft sobre el nivel del piso en su punto más bajo.

En los ejercicios 3-8 el movimiento del sistema de masa-resorte está descrito por la ecuación dada en donde y es la distancia en pies del punto de equilibrio y t es el tiempo en segundos. Si el peso está a K pies del techo en un estado de equilibrio, determinar lo siguiente: a) La posición inicial del peso (en $t = 0$), b) la primera vez que el peso pasa por el punto de equilibrio, c) la distancia más corta a la que se encuentre el peso del techo, d) la distancia máxima a la que se encuentre el peso del techo, e) la distancia del techo al peso en el tiempo $t = 2.5$, f) la amplitud del movimiento, g) el periodo del movimiento, h) la frecuencia del movimiento y i) el defasamiento del movimiento.

3. $y = 5 \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$, $K = 10$

4. $y = 5 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, $K = 4$

5. $y = 5 \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$, $K = 4$

6. $y = 7 \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$, $K = 15$

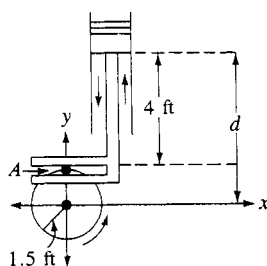
7. $y = 8 \sin\left(\frac{1}{4}\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, $K = 20$

8. $y = 12 \sin\left(\frac{1}{4}\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$, $K = 30$

Física. Un objeto se mueve en un sistema masa-resorte descrito por $y = A \sin(Bt + D)$ con una velocidad dada por $v = AB \cos(Bt + D)$. Utilizar esta información en los ejercicios 9-10.

9. ¿Cuál es la velocidad del objeto descrito en el ejercicio 3 cuando t es a) 0, b) 1, c) 0.5, d) 1.3?
10. ¿Cuál es la velocidad del objeto descrito en el ejercicio 8 cuando t es a) 0, b) 1, c) 0.5, d) 1.3?
- 11. Oceanografía.** Una boya en el océano oscila de arriba a abajo mientras las olas pasan. Supóngase que la boyo se mueve un total de 4 ft desde el punto más bajo al punto más alto y regresa al punto más bajo cada 12 s. Suponiendo que en $t = 0$ la boyo se encuentra en el punto más bajo, encontrar una ecuación que describa este movimiento armónico.
- 12.** Repetir el ejercicio 11 pero esta vez suponiendo que la boyo está en su punto más alto en $t = 0$.

- 13. Electrónica.** La caída de voltaje entre las dos terminales de un circuito eléctrico que usa corriente alterna está dada por la ecuación $E = 180 \sin(120\pi t)$, en donde t se mide en segundos.
- ¿Cuál es la máxima caída de voltaje?
 - ¿Cuál es el periodo del circuito?
 - ¿Cuál es la frecuencia del circuito?
- 14. Medicina.** La onda que se genera por una máquina de rayos X es del tipo $y = A \sin(2\pi \cdot 10^{18}t)$, en donde t se mide en segundos. ¿Cuál es la frecuencia de la onda?
- 15. Ingeniería.** Una varilla que se conecta a la ceja de una rueda por medio de guías mueve a un pistón dentro de un cilindro de arriba a abajo como lo muestra la figura. El radio de la rueda es de 1.5 ft y la varilla tiene un largo de 4 ft. Encontrar una ecuación que describa la distancia d entre la parte inferior del pistón y el eje x en términos del tiempo t , en segundos. Suponer que cuando $t = 0$, el punto A está en $(1.5, 0)$ y que la rueda gira a razón de 2 revoluciones/segundo. [Sugerencia: El radio de la rueda está describiendo un ángulo que forma 4π rad/s.]



- 16.** ¿Cuándo es la primera vez que el pistón del ejercicio 15 llega a su máxima altura? ¿Cuándo es la primera vez que llega a su mínima altura?
- 17.** El golpe de un pistón que se mueve en un cilindro es la diferencia entre el punto máximo y el mínimo. ¿Cuál es el golpe del pistón que se describe en el ejercicio 15?
- 18. Ecología.** Los ecologistas están interesados en el sistema depredador-presa, en el que el número de depredadores y el número de presas tiende a tener un comportamiento cíclico o periódico. Por ejemplo, suponga que una región está poblada por coyotes y conejos. Cuando la población de conejos se incrementa, la población de coyotes, que tienen abundante comida, también se incrementa. Cuando la región ya no puede soportar el incremento de conejos, o sea, cuando la comida para conejos escasea, la población de conejos empieza a disminuir. Esto, a corto plazo, causa que la población de coyotes disminuya. Una vez que el número de conejos alcance un punto mínimo, permitiendo que el nivel de la comida se restablezca, la población de conejos volverá a incrementar (el número de coyotes ya es bajo), a lo que le seguirá un incremento en la población de coyotes. Este ciclo continuará indefinidamente si es que ninguna otra fuerza exterior aparece. Se ha determinado que la población de conejos en el valle de Lone Pine River ha variado (aproximadamente) de acuerdo con la fórmula

$$r = 500 + 120 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

En esta ecuación, r , es el número de conejos en el tiempo t , t es medido en años y el tiempo $t = 0$ fue el 1 de julio de 1975.

- ¿Cuál fue la población de conejos del 1 de julio de 1975?
- ¿Cuál fue la población máxima de conejos?
- ¿En qué fecha fue máxima la población de conejos por primera vez?
- ¿Cuál fue la población mínima de conejos?
- ¿En qué fecha fue mínima la población de conejos por primera vez?
- ¿Cuál fue la población de conejos el 1 de enero de 1985?

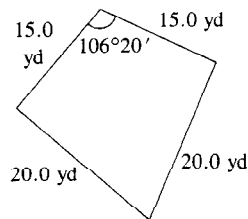
19. **Ecología.** La cantidad de coyotes del valle de Lone Pine River ha variado (aproximadamente) de acuerdo con la fórmula

$$c = 100 + 40 \sin \left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4} \right),$$

en donde t es medido en años y $t = 0$ fue el 1 de julio de 1975.

- ¿Cuál fue la población de coyotes el 1 de julio de 1975?
- ¿Cuál fue población máxima de coyotes?
- ¿En qué fecha fue máxima la población de coyotes por primera vez?
- ¿Cuál fue la población mínima de coyotes?
- ¿En qué fecha fue mínima la población de coyotes por primera vez?
- ¿Cuál fue la población de coyotes el 1 de enero de 1985?
- Comparar las ecuaciones para c y r (en el ejercicio 18) e interpretar el defasamiento de $\frac{1}{2}$ para c .

20. **Consumo.** Un cuarto de recreación en forma de cuadrilátero, como lo muestra la figura, necesita ser alfombrado. La yarda cuadrada tiene un costo de 18.50 dólares. Si suponemos que no se desperdicia nada y que la instalación viene incluida en el precio de la alfombra, aproximadamente ¿cuánto costaría alfombrar el cuarto?



21. **Geometría.** En la siguiente sección a continuación se necesita determinar la longitud de la diagonal de un paralelogramo para poder encontrar la magnitud de un vector. Si un ángulo de un paralelogramo es 38.2° y los dos lados son 16.7 cm y 29.3 cm, utilizar la ley de los cosenos para determinar la longitud de la diagonal más larga.

Muchas de las cantidades de los problemas aplicados tales como costo, longitud, tiempo y el área pueden ser definidas en magnitud por un solo número escalado a una unidad de medida. A estas cantidades se les llama **cantidades escalares** y el número real que se usa para describirlos es un **escalar**. Para otras cantidades tales como fuerza, velocidad y movimiento, se requiere conocer tanto su magnitud como su dirección para poder ser descritas. A estas cantidades se les llama **cantidades vectoriales** y se describen por medio de **vectores**. Geométricamente, un vector es un segmento de recta dirigido, en donde la longitud del segmento indica la magnitud del vector y una punta de flecha indica su dirección, como lo muestra la figura 34. Por ejemplo, si un barco navega en dirección 80° con una velocidad de 25 nudos, el vector de la figura 35 podría ser el que representa a este movimiento.

Magnitud y dirección

Si un vector empieza en el punto A (el **punto inicial**) y termina en el punto B (el **punto final**), utilizamos \overrightarrow{AB} para denotar el vector. La longitud del segmento de A a B es la **magnitud** de \overrightarrow{AB} , y se

denota por $|\overrightarrow{AB}|$, la dirección del vector es la **dirección** del segmento de recta dirigido. Si un segundo vector \overrightarrow{XY} tiene la misma magnitud y dirección que \overrightarrow{AB} , los vectores son **iguales** y se escribe $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XY}$ (véase la figura 36). En este sentido, un vector se puede colocar en diferentes posiciones o mover de un lugar a otro sin que cambie su magnitud ni su dirección.

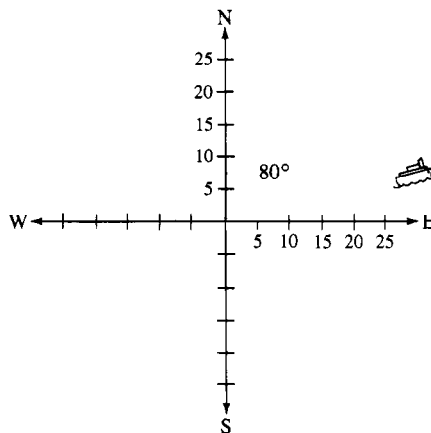


Figura 34. Vectores.

Figura 35. Vector velocidad.

Operaciones con vectores

Por simplicidad, los vectores, se denotan comúnmente por una sola letra en negritas, tales como \mathbf{v} , \mathbf{u} y \mathbf{w} . (La notación \vec{v} se utiliza por lo general en un pizarrón.) Dos operaciones entre vectores son la *multiplicación por un escalar* y la *suma de vectores*.

Multiplicación por un escalar

Sean \mathbf{v} un vector y k un escalar (un número real). El vector $k\mathbf{v}$, llamado **múltiplo escalar** de \mathbf{v} , es un vector de magnitud $|k|$ veces la magnitud de \mathbf{v} y su dirección es la misma de \mathbf{v} si $k > 0$ y opuesta a \mathbf{v} si $k < 0$.

La figura 37 muestra varios múltiplos escalares del vector \mathbf{v} .

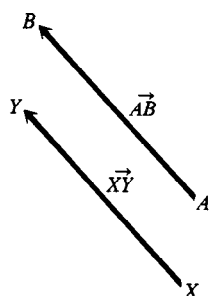


Figura 36. Vectores iguales.

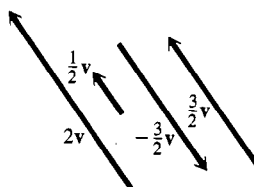


Figura 37.

Por ejemplo, las fuerzas mínimas para levantar dos objetos que pesan 10 lb y 30 lb respectivamente, puede ser ilustrada con el uso de vectores como en la figura 38, en donde \mathbf{u} es $3\mathbf{v}$.

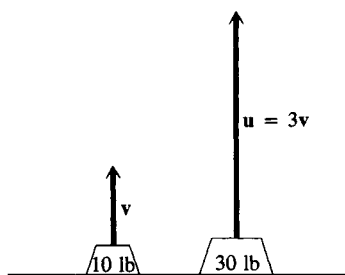


Figura 38

Suma de vectores

Sean \mathbf{v} y \mathbf{u} dos vectores. Para encontrar la suma de \mathbf{u} y \mathbf{v} , coloque el punto inicial de \mathbf{v} en el punto final de \mathbf{u} sin que cambie la magnitud o la dirección de ninguno de ellos. La suma de \mathbf{u} y \mathbf{v} , denotada por $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, es el vector que tiene como punto inicial el punto inicial de \mathbf{u} y como punto final el punto final de \mathbf{v} .

La figura 39 ilustra la suma de vectores.

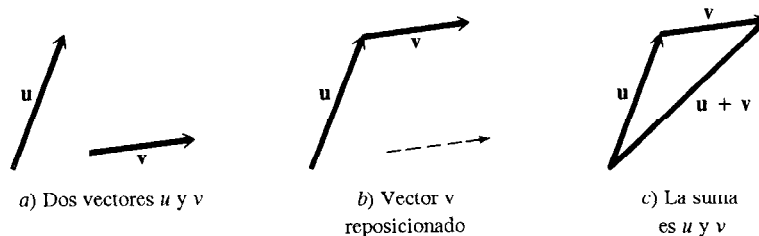


Figura 39

Una excelente aplicación de la suma vectorial ocurre cuando dos fuerzas actúan sobre un objeto. La fuerza única que produciría el mismo resultado, llamada la **resultante** de los dos vectores, puede encontrarse si se suman los dos vectores que representan a las dos fuerzas iniciales. Por ejemplo, supóngase, que a una caja pesada se le amarran dos cuerdas, y dos personas tiran de éstas, uno con una fuerza de 20 lb y el otro con una fuerza de 30 lb. La caja se moverá en la dirección que indica la flecha de color en la figura 40, y es fácil ver que la resultante es la suma de las dos fuerzas.

En general, si \mathbf{u} y \mathbf{v} representan dos fuerzas que actúan sobre un objeto en posición P (véase la figura 41), la resultante de las fuerzas componentes \mathbf{u} y \mathbf{v} se representa por la diagonal del paralelogramo $PABC$. A este método para describir la resultante de dos vectores se le llama la **ley del paralelogramo**.

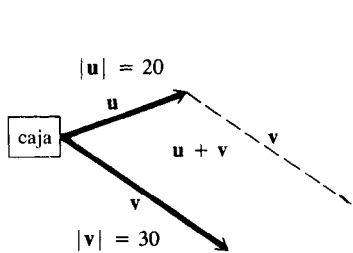


Figura 40. Vector resultante.

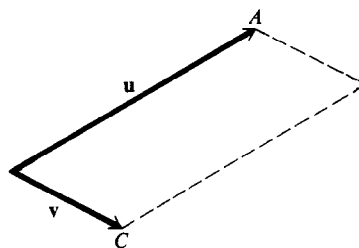


Figura 41. Ley del paralelogramo.

Notación vectorial

Esta breve introducción geométrica a los vectores suministra los conocimientos necesarios para resolver una variedad de problemas de aplicación. Antes de hacer esto, sin embargo, será mejor considerar los vectores desde un punto de vista algebraico. Ya que un vector puede ser movido a varios lugares sin cambiar su dirección ni su magnitud, dado un vector, éste puede ser colocado sobre el origen de un sistema de coordenadas rectangulares. Utilizando este esquema para obtener un modelo para considerar vectores, el punto final de un vector arbitrario se puede identificar por un punto P en el plano, como se muestra en la figura 42. Por tanto, existe una correspondencia uno a uno entre los vectores y los pares ordenados de números reales (a, b) . Para evitar confusión, se conviene en utilizar $\langle a, b \rangle$ como el símbolo para el vector que tiene como punto final (a, b) . Los números reales a y b son las **componentes** del vector $\langle a, b \rangle$.

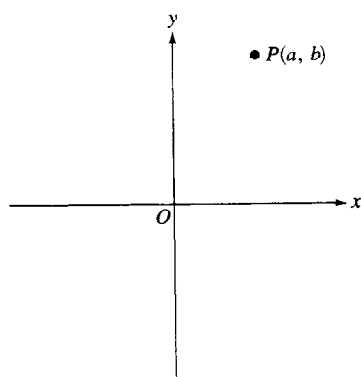


Figura 42

Magnitud y dirección de un vector

Sea $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ un vector. La magnitud de \mathbf{v} es

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

y la dirección es el ángulo positivo más pequeño θ medido desde la parte positiva del eje x al vector.

La definición de arriba parece razonable, en vista de la interpretación geométrica de un vector que se dio a conocer con anterioridad, ya que $\sqrt{a^2 + b^2}$ es la distancia de (a, b) a $(0, 0)$, que es la longitud del segmento OP . Nuestros conocimientos de trigonometría nos permiten encontrar la dirección de un vector $\langle a, b \rangle$ como se ilustra en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1

Encontrar la magnitud y la dirección de cada vector.

a) $\mathbf{v} = \langle -1, 2 \rangle$

Considerar la figura 43.

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\tan \theta = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\theta = 116^\circ 34'$$

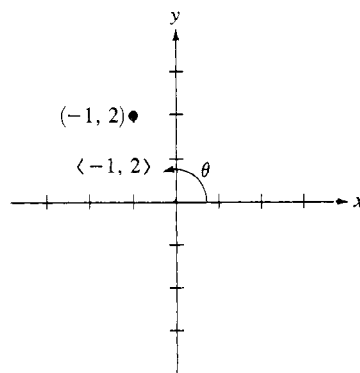


Figura 43

b) $\mathbf{u} = \langle 0, -3 \rangle$

Considerar la figura 44.

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$\tan \theta$ no está definida.

$$\theta = 270^\circ 00' \quad \blacksquare$$

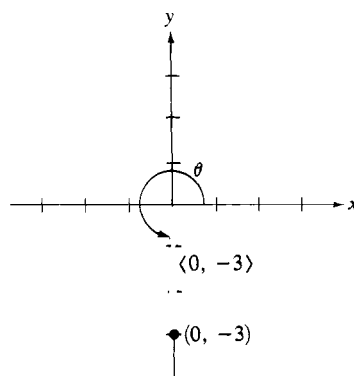


Figura 44

Las operaciones de multiplicación por un escalar y de suma vectorial se pueden definir con el uso de la notación de pares ordenados.

Operaciones con los pares ordenados

Sean $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle c, d \rangle$ dos vectores en donde k es un escalar.

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle = \langle a + c, b + d \rangle$$

$$k\mathbf{u} = k\langle a, b \rangle = \langle ka, kb \rangle$$

La suma vectorial con el uso de la notación de pares ordenados concuerda con la definición de suma geométrica que se dio anteriormente. Si $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle c, d \rangle$ son dos vectores, como se muestra en la figura 45, entonces por la ley del paralelogramo, $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle a + c, b + d \rangle$.

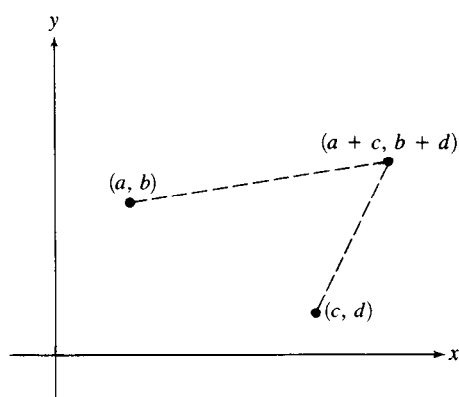


Figura 45

EJEMPLO 2

Sea $\mathbf{u} = \langle 2, -3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 1, 4 \rangle$. Encontrar a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, b) $4\mathbf{u}$ y c) $3\mathbf{u} + 5\mathbf{v}$.

a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle 2, -3 \rangle + \langle 1, 4 \rangle = \langle 3, 1 \rangle$

b) $4\mathbf{u} = 4\langle 2, -3 \rangle = \langle 8, -12 \rangle$

c) $3\mathbf{u} + 5\mathbf{v} = 3\langle 2, -3 \rangle + 5\langle 1, 4 \rangle$
 $= \langle 6, -9 \rangle + \langle 5, 20 \rangle$
 $= \langle 11, 11 \rangle$

Vectores negativos y nulos

Al vector $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$ se le llama el **vector cero**. Si $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$, al vector $-\mathbf{v} = \langle -a, -b \rangle$ se le llama el **inverso aditivo** o el **negativo** de \mathbf{v} .

Propiedades de las operaciones

Las siguientes propiedades de la suma vectorial pueden ser fácilmente comprobadas con el uso de la definición de la suma vectorial y de las propiedades de los números reales

Propiedades de la suma de vectores

Sea \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} tres vectores.

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
2. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
4. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

Así como en la resta de números reales, la **resta de vectores** se define como la suma del negativo de un vector.

Resta de vectores

Sean $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle c, d \rangle$ dos vectores. Entonces

y

EJEMPLO 3

Sea $\mathbf{u} = \langle 2, -3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 1, 4 \rangle$. Encontrar a) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, b) $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, c) $5\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.

$$\text{a) } \mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle 2, -3 \rangle - \langle 1, 4 \rangle = \langle 1, -7 \rangle$$

$$\text{b) } \mathbf{v} - \mathbf{u} = \langle 1, 4 \rangle - \langle 2, -3 \rangle = \langle -1, 7 \rangle$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 5\mathbf{u} - 3\mathbf{v} &= 5\langle 2, -3 \rangle - 3\langle 1, 4 \rangle \\ &= \langle 10, -15 \rangle - \langle 3, 12 \rangle = \langle 7, -27 \rangle \end{aligned}$$

Las siguientes propiedades pueden ser fácilmente verificadas con el uso de la definición de la multiplicación por un escalar y las propiedades de los números reales.

Propiedades de la multiplicación por un escalar

Sean \mathbf{u} y \mathbf{v} dos vectores, en donde k y n son dos números reales.

1. $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$
2. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$
3. $(kn)\mathbf{u} = k(n\mathbf{u})$
4. $(k + n)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + n\mathbf{u}$
5. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$

Otra manera de representar vectores es por medio de dos vectores especiales,

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle,$$

llamados **vectores unitarios básicos**. Nótese que $|\mathbf{i}| = 1$ y $|\mathbf{j}| = 1$ (los dos tienen 1 unidad de longitud); e \mathbf{i} está sobre el eje x positivo mientras que \mathbf{j} está sobre el eje y positivo. Si $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$, entonces

$$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle = \langle a, 0 \rangle + \langle 0, b \rangle = a\langle 1, 0 \rangle + b\langle 0, 1 \rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}.$$

Llamamos a $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ una **combinación lineal** de los vectores \mathbf{i} y \mathbf{j} . Por lo tanto, cada vector del plano puede ser representado por una combinación lineal de los vectores básicos \mathbf{i} y \mathbf{j} . Se llama a a la **componente horizontal** de $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} = \langle a, b \rangle$, y b es la **componente vertical**. Será mostrado en los ejercicios que si θ es la dirección de \mathbf{v} , entonces $a = |\mathbf{v}| \cos \theta$ y $b = |\mathbf{v}| \sin \theta$. Todas las reglas de suma, resta y multiplicación por un escalar pueden ser establecidas con esta notación de básicos unitarios.

EJEMPLO 4

Escribir a $2\mathbf{u} - 7\mathbf{v}$ como una combinación lineal de los vectores unitarios básicos \mathbf{i} y \mathbf{j} cuando $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

$$\begin{aligned} 2\mathbf{u} - 7\mathbf{v} &= 2(-\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) - 7(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \\ &= (-2\mathbf{i} + 10\mathbf{j}) - (14\mathbf{i} + 21\mathbf{j}) \\ &= -16\mathbf{i} - 11\mathbf{j} \end{aligned}$$

Se concluye esta sección considerando una variedad de problemas con aplicación que pueden ser solucionados con la notación geométrica de un vector. Por conveniencia en la notación, si el vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$, simplemente se utiliza v o AB para representar la magnitud de \mathbf{v} , $|\mathbf{v}|$.

EJEMPLO 5

Física

Dos fuerzas, una de 30 lb y la otra de 40 lb, actúan sobre un objeto formando un ángulo recto entre sí. Encuentre la magnitud de la fuerza resultante y el ángulo que forma la resultante con la fuerza mayor.

Hacer un dibujo como el de la figura 46, con dos vectores que corresponden a las fuerzas 30 lb y 40 lb. Con el uso de la ley del paralelogramo, indicar el vector resultante $\mathbf{r} = \overrightarrow{PB}$. La longitud de \mathbf{r} es el largo del segmento PB , que se puede encontrar con el teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned} PB^2 &= BC^2 + PC^2 \\ &= 30^2 + 40^2 \\ &= 900 + 1\,600 = 2\,500 \\ PB &= 50 \text{ lb} \end{aligned}$$

La dirección de \mathbf{r} está dada por $\angle BPC$ (el ángulo entre \mathbf{r} y el vector más grande). Para encontrar $\angle BPC$ se utiliza la función tangente en el triángulo rectángulo BPC .

$$\tan BPC = \frac{BC}{PC} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} = 0.75$$

Entonces

$$\angle BPC = 37^\circ,$$

que está aproximado al grado más cercano, ya que las fuerzas se aproximaron a la unidad más cercana.

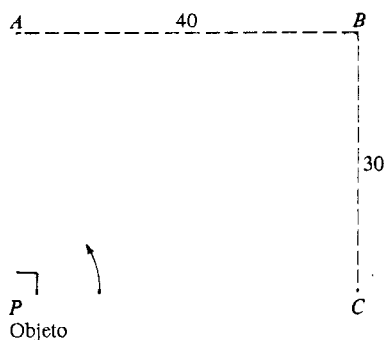


Figura 46

EJEMPLO 6

Física

¿Cuál es la mínima fuerza que se requiere para evitar que una esfera de hierro de 16.0 lb ruede hacia abajo de la rampa que está inclinada 12.5° con respecto a la horizontal? Así mismo, ¿cuál es la fuerza que ejerce la esfera sobre la rampa?

El peso o la fuerza de la esfera que actúa verticalmente hacia abajo, \overrightarrow{PB} se puede descomponer en dos componentes, una paralela a la rampa (\overrightarrow{PA}) y la otra perpendicular a la rampa (\overrightarrow{PC}), como lo muestra la figura 47. La fuerza que se requiere para evitar que la esfera ruede hacia abajo (la fuerza que ejerce la esfera hacia abajo de la rampa) corresponde a PA , mientras que la fuerza de la esfera contra la rampa corresponde a PC .

Ya que $\angle APB$ y 12.5° son complementarios, $\angle ABP = 12.5^\circ$.

$$\text{sen } ABP = \text{sen } 12.5^\circ = \frac{PA}{PB} = \frac{PA}{16.0}$$

$$PA = 16.0 \text{ sen } 12.5^\circ \approx 3.5$$

$$\text{cos } ABP = \text{cos } 12.5^\circ = \frac{AB}{PB} = \frac{PC}{PB} = \frac{PC}{16.0}$$

$$PC = 16.0 \text{ cos } 12.5^\circ \approx 15.6$$

Así pues, se necesita una fuerza de 3.5 lb para evitar que la esfera ruede, y la esfera ejerce una fuerza de 15.6 lb sobre la rampa. ¿Parece esto razonable? ¿Cómo cambiarían PA y PC a medida que se incrementa el ángulo de inclinación de la rampa?

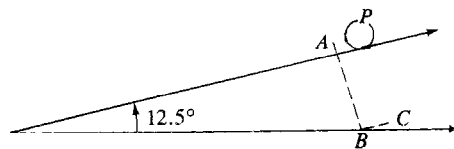


Figura 47

El último ejemplo de esta sección es el segundo problema con aplicación que aparece en la introducción a este capítulo.

EJEMPLO 7

Navegación

Dos muelles se encuentran en lados opuestos de un río que fluye de este a oeste con una corriente de 3.5 mph. La orientación del muelle de la orilla norte del río desde el muelle en la orilla sur es de $N10^\circ 20' E$.

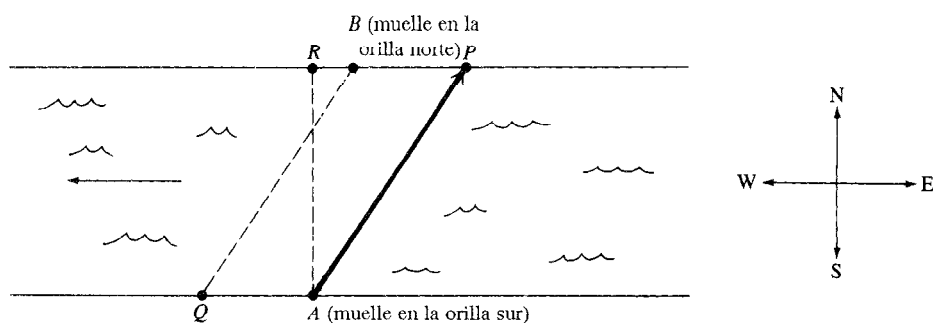


Figura 48

¿Qué dirección debe tomar el capitán de un transbordador, que va a 7 mph, para cruzar directamente desde el muelle del sur hasta el muelle del norte, tomando en cuenta la corriente de arrastre?

Hacer un dibujo como el de la figura 48. Ya que la orientación de A a B es $N10^\circ 20' E$, $\angle BAR = 10^\circ 20'$. El vector \overrightarrow{AP} corresponde al vector de velocidad del transbordador y \overrightarrow{PB} corresponde a la velocidad de la corriente. Necesitamos encontrar la dirección de \overrightarrow{AP} , que se puede encontrar una vez que se conozca el ángulo θ . Como $\angle PBA$ y $\angle BAQ$ son ángulos alternos internos, por geometría sabemos que son iguales. Por tanto, $\angle PBA = \angle BAQ = 10^\circ 20' + 90^\circ 00' = 100^\circ 20'$. Ya que $AP = 7$ y $PB = 3.5$, podemos usar la ley de los senos en el triángulo BAP para encontrar θ .

$$\begin{aligned}\frac{AP}{\sin 100^\circ 20'} &= \frac{PB}{\sin \theta} \\ \frac{7}{\sin 100^\circ 20'} &= \frac{3.5}{\sin \theta} \\ \sin \theta &= \frac{3.5 \sin 100^\circ 20'}{7} \approx 0.4919 \\ \theta &\approx 29^\circ 30'\end{aligned}$$

Entonces $\angle RAP = 10^\circ 20' + 29^\circ 30' = 39^\circ 50'$. Así pues, el capitán debe ir en dirección $39^\circ 50'$ para poder navegar directamente al muelle del norte.

7.6. Ejercicios

En los ejercicios 1-8 encontrar a) $|\mathbf{v}|$, b) la dirección de \mathbf{v} (aproximando a los diez minutos más cercanos), c) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, d) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, e) $3\mathbf{v}$, f) $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$, g) $5\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$, h) $\mathbf{u} + \mathbf{0}$, y i) $-\mathbf{v}$.

1. $\mathbf{u} = \langle 1, 3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 3, 4 \rangle$
2. $\mathbf{u} = \langle -1, 2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 4, 3 \rangle$
3. $\mathbf{u} = \langle 0, 2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -4, 0 \rangle$
4. $\mathbf{u} = \langle -1, -1 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 1, 1 \rangle$
5. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
6. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$
7. $\mathbf{u} = -2\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 5\mathbf{i}$
8. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

En los ejercicios 9-20, sean $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$, $\mathbf{v} = \langle c, d \rangle$, y $\mathbf{w} = \langle e, f \rangle$ vectores, y k y n escalares. Demostrar cada una de las propiedades.

9. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
10. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
11. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
12. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
13. $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
14. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$
15. $(kn)\mathbf{u} = k(n\mathbf{u})$
16. $(k + n)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + n\mathbf{u}$
17. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
18. Si $k\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y $k \neq 0$, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
19. $|k\mathbf{v}| = |k||\mathbf{v}|$
20. Si $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u}$ entonces $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

21. Sea $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ un vector y θ la dirección de \mathbf{v} . Demostrar que $a = |\mathbf{v}| \cos \theta$ y que $b = |\mathbf{v}| \sin \theta$.

22. Sea $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ un vector. Demostrar que la dirección θ de \mathbf{v} satisface $\tan \theta = \frac{b}{a}$.

23. Sean $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle c, d \rangle$ dos vectores. El producto escalar de \mathbf{u} y \mathbf{v} es la escalar (un número, no un vector)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ac + bd.$$

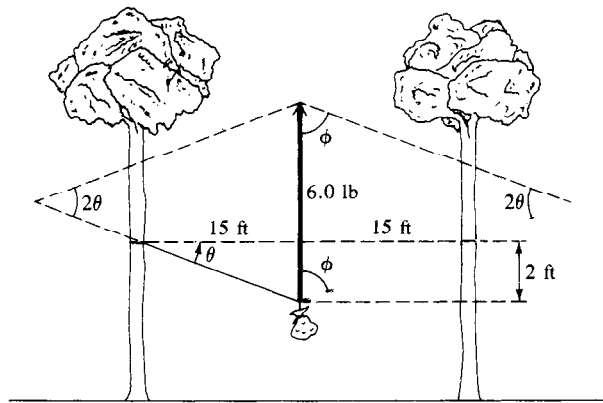
Utilizar esta definición para encontrar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ para cada uno de los siguientes vectores a continuación.

- a) $\mathbf{u} = \langle 1, 3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -2, 4 \rangle$
 - b) $\mathbf{u} = \langle 2, 5 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -5, 2 \rangle$
 - c) $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
 - d) $\mathbf{u} = -2\mathbf{i}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
24. Sean $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle c, d \rangle$ dos vectores con un ángulo θ entre ellos. Utilizar la ley de los cosenos y la definición dada en el ejercicio 23 para demostrar que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta$.

- (d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$

37. **Física.** Dos fuerzas, una de 70.0 lb y la otra de 25.0 lb, actúan sobre un objeto con un ángulo recto entre ellas. Encontrar la magnitud de la resultante de las dos fuerzas y el ángulo que la resultante forma con la fuerza más grande.
38. **Ingeniería.** ¿Cuál es la mínima fuerza que se requiere para evitar que una esfera de hierro de 16.0 lb ruede hacia abajo de la rampa que está inclinada a $18^{\circ}30'$ con respecto a la horizontal? Así mismo, ¿cuál es la fuerza que ejerce la esfera sobre la rampa?
39. **Ingeniería.** Una persona desea rodar un barril que pesa 400 lb hacia arriba de una tabla hasta una plataforma que está a 3 ft del piso. Si la tabla mide 12 ft de longitud y la persona puede ejercer una fuerza de 120 ft, ¿podrá la persona rodar el barril a la plataforma? [Sugerencia: Primero encontrar el ángulo de inclinación de la tabla.]
40. **Recreación.** Cuando un niño jala de un vagón con una cuerda, la cuerda forma un ángulo de $32^{\circ}00'$ con respecto a la horizontal. Si se necesita una fuerza de 10 lb sobre la cuerda para mover el vagón, ¿cuál es la componente horizontal de la fuerza (la fuerza que se necesita para mover al vagón si se jala horizontalmente)?
41. **Aeronáutica.** Un avión con una **velocidad de vuelo** (la velocidad en viento quieto) de 275.0 mph se dirige hacia el este. Si un viento sopla hacia el norte a 30.0 mph, encontrar la dirección de curso y la **velocidad de tierra** (la velocidad con respecto al suelo) del avión.
42. **Aeronáutica.** Un avión con velocidad de vuelo de 300 mph se dirige hacia el oeste. Si el viento viene del sur y sopla a 25 mph, encontrar la dirección del curso y la velocidad de la tierra del avión.
43. **Aeronáutica.** Un avión se dirige en dirección 140° y vuela a una velocidad de 240 mph. Si el viento sopla en una dirección de 40° a razón de 30 mph, ¿cuál es la dirección de curso y la velocidad de tierra del avión?

44. **Navegación.** Un barco navega $N65^{\circ}00'O$ durante 180 mi, y luego $S55^{\circ}00'O$ durante 220 mi. ¿Qué tan lejos se encuentra el barco de donde empezó y en qué dirección?
45. **Recreación.** La velocidad de un río que fluye hacia el este es de 4 mph. Un bote de remos se dirige directamente hacia el norte cruzando el río y navega de tal manera que tiene una velocidad de 7 mph en agua quieta. Encontrar la magnitud de la velocidad del barco y la dirección de curso aproximando los diez minutos más cercanos).
46. **Navegación.** Un bote que se encuentra en la orilla sur de un río que fluye hacia el oeste, puede navegar a 20 km/h. El conductor desea cruzar el río cuya corriente es 5 de km/h. Para que pueda cruzar en ángulo recto, ¿en qué dirección necesita ir el bote (aproximado a los diez minutos más cercanos)?
47. **Aeronáutica.** Un jet tiene una velocidad de 600 mph y viaja en dirección 310° . ¿Qué tan al norte viajó el jet después de una hora?
48. **Meteorología.** Un globo aerostático se eleva a razón de 15 ft/s mientras que el viento sopla a 20 ft/s. ¿Cuál es la velocidad del globo y el ángulo de ascenso que forma con la horizontal aproximando a los diez minutos más cercanos)?
49. **Recreación.** Un explorador cuelga su saco de comida en el centro de la cuerda de 30 ft que hay entre dos árboles. Si el peso del saco es 6.0 lb, el centro de la cuerda se jala hacia abajo 2 ft. ¿Cuál es la fuerza en libras que actúa sobre la cuerda? [Sugerencia: Utilizar la figura que se muestra abajo. La fuerza en libras que actúa sobre la cuerda es la magnitud de \vec{r}].



Para repasar:

50. El movimiento en un sistema masa-resorte está descrito por $y = 2.5 \sin \left(\pi t - \frac{\pi}{2} \right)$ en donde y es la distancia en ft desde la posición de equilibrio y t es el tiempo en segundos. Supóngase que el peso se encuentra a 5 ft del techo en estado de equilibrio. Determinar lo siguiente.
- La posición inicial del peso,
 - La primera vez que el peso pasa por la posición de equilibrio,
 - La distancia más corta con respecto al techo a la que llega el peso,
 - La distancia más grande con respecto al techo a la que llega el peso,
 - La distancia con respecto al techo en el tiempo $t = 1.5$,
 - La amplitud del movimiento,
 - El periodo del movimiento,
 - La frecuencia del movimiento,
 - El defasamiento del movimiento.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 7

En los ejercicios 1-2, A es un ángulo en posición normal y satisface las condiciones dadas. Encontrar los valores de las seis funciones trigonométricas de A . No utilizar calculadora.

1. $P(-2, 6)$ está en el lado terminal de A .
2. El lado terminal de A está en el cuadrante III y es perpendicular a la recta $3x + 6y - 7 = 0$.
3. ¿Qué cuadrante contiene al lado terminal de A si $\sin A < 0$ y $\tan A > 0$?

En los ejercicios 4-7 determinar el ángulo de referencia del ángulo A .

4. $A = 205^\circ$
5. $A = -304^\circ 20'$
6. $A = -\frac{2\pi}{3}$
7. $A = \frac{17\pi}{4}$

En los ejercicios 8-9 encontrar el ángulo A , aproximado al minuto más cercano, si $0 \leq A \leq 360^\circ$.

8. $\tan A = 3.1579$
9. $\sec A = 4.2765$
10. Si A está en el cuadrante III y $\tan A = \frac{4}{3}$, encontrar los valores de las funciones trigonométricas restantes de A .

En los ejercicios 11-14 resolver cada triángulo dadas las partes.

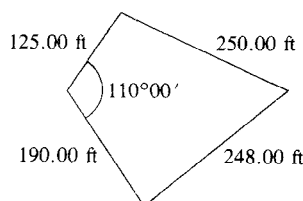
11. $A = 38^\circ 20'$, $B = 61^\circ 20'$, $a = 13.4$
12. $B = 51^\circ 20'$, $a = 20.2$, $b = 7.4$
13. $A = 71^\circ 45'$, $b = 4.20$, $c = 5.15$
14. $a = 16.5$, $b = 12.2$, $c = 23.7$

Resolver.

15. **Agrimensura.** Los puntos A y B se encuentran en lados opuestos de un lago. Un punto C está a 100 yd de A . El $\angle BAC$ mide $62^\circ 20'$ y el $\angle ACB$ mide $36^\circ 40'$. ¿Qué distancia hay entre A y B ?
16. **Silvicultura.** La estación de vigilancia B está a 20.0 km al oeste de la estación de vigilancia A . La orientación de un incendio de A es $S24^\circ 20' O$ y la orientación desde B es $S51^\circ 20' E$. ¿Qué tan lejos se encuentra el incendio de B ?
17. **Navegación.** Phoenix está a 220 mi al sur del Gran Cañón. Un piloto que vuela de Phoenix al Gran Cañón se desvía de curso 150 mi en una dirección de $352^\circ 20'$ antes de descubrir que se equivocó. En este momento ¿qué tan lejos se encuentra del Gran Cañón?
18. **Navegación.** Dos barcos parten de una isla en el mismo instante. El primero navega a 25 mph en una dirección de $315^\circ 00'$ y el segundo navega a 30 mph en una dirección $200^\circ 00'$. ¿Qué distancia hay entre los barcos después de dos horas?

En los ejercicios 19-20 encontrar el área del triángulo ABC dadas las partes.

19. $a = 3.1$ yd, $b = 5.8$ yd, $C = 38^\circ 20'$
20. $B = 120^\circ 20'$, $C = 25^\circ 40'$, $a = 12.20$ in
21. **Consumo.** La familia Hugheses compró un terreno con la forma de un cuadrilátero con las medidas mostradas. ¿Cuál es el área del terreno en acres, si 1 acre = 43 560 ft²?



- 22. Agricultura.** Un jardín triangular con lados de 31.5 yd, 27.1 yd y 25.8 yd necesita ser fertilizado. Si un costal de fertilizante ocupa un área de 2 000 ft², ¿cuántos costales se necesitan para fertilizar el jardín?
- 23. Electrónica.** La caída de voltaje entre dos terminales en un circuito eléctrico está dada por la ecuación $E = 120 \sin(100\pi t)$, en donde t se mide en segundos. a) ¿Cuál es la máxima caída de voltaje? b) ¿Cuál es el periodo del circuito? c) ¿Cuál es la frecuencia del circuito?
- 24. Física.** Un punto P sobre una superficie vibratoria está en movimiento armónico simple, con una frecuencia de 1/4 de oscilación por segundo y una amplitud de 10 cm. Expresar el movimiento de P con una ecuación de la forma $y = A \sin Bt$.

En los ejercicios 25-26 encontrar a) $|\mathbf{u}|$, b) la dirección de \mathbf{u} , c) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, d) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, e) $-2\mathbf{u}$, f) $4\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$, g) $\mathbf{v} + \mathbf{0}$ y h) $-\mathbf{u}$.

25. $\mathbf{u} = \langle -5, 12 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 1, -2 \rangle$

26. $\mathbf{u} = 7\mathbf{i}$ y $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$

- 27. Deportes.** Un mariscal de campo lanza un pase con una velocidad inicial de 60.0 ft/s a un ángulo de 33° con respecto a la horizontal. Encontrar las magnitudes de los componentes horizontales y verticales (aproximado a la décima más cercana).
- 28. Aeronáutica.** Un avión con una velocidad de vuelo de 400 mph se dirige hacia el sur. Si el viento sopla desde 45°00' a 25 mph, encontrar la dirección de curso y la rapidez del avión.
- 29. Meteorología.** Un globo climatológico se eleva a 18 ft/s cuando el viento sopla a 30 ft/s. ¿Cuál es la velocidad del globo y el ángulo de ascenso que forma con respecto a la horizontal?
- 30. Física.** ¿Cuál es la fuerza mínima que se requiere para evitar que un barril de 200 lb ruede hacia abajo de una rampa que está inclinada a 20°30' con respecto a la horizontal? Así mismo, ¿cuál es la fuerza que ejerce el barril sobre la rampa?

Capítulo

Con el uso de la trigonometría se han resuelto una variedad de problemas de aplicación que incluyen distancias, alturas, velocidades, orientaciones y varias más. Otro uso, más abstracto, es la aplicación de la teoría de la trigonometría analítica para transformar expresiones trigonométricas complejas a otras más simples. Aunque la trigonometría analítica se aplica en general en las matemáticas avanzadas, puede aplicarse a algunos problemas prácticos, como se ilustra a continuación.

Deportes

Un jugador de fútbol americano patea para gol de campo con un ángulo de inclinación θ con respecto al campo de juego. Puede ser demostrado que la distancia, en ft, que al balón recorre en el aire, si no es interrumpido, está dada por

$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{32}$$

en donde v es la velocidad inicial del balón en ft/s. a) Encontrar la distancia que recorre el balón si $\theta = 40^\circ$ y $v = 50$ ft/s. b) Si v es constante, argumente por qué se alcanza la distancia máxima cuando $\theta = 45^\circ$.

Hidrología

Un proyecto para la desviación de agua del río Colorado en Arizona utiliza un canal en forma de un trapecioide isósceles, más ancho en la parte de arriba que en la base. Si la parte inferior y los dos lados del canal miden 8 yd, y θ es el ángulo agudo que se forma entre un lado del canal y el nivel del piso, demostrar que el área transversal del canal, que determina la capacidad de flujo, está dada por

$$A = 64 \sin \theta (1 + \cos \theta).$$

Utilizar esta fórmula para encontrar θ cuando $A = 48\sqrt{3}$ ft².

El primero de estos problemas involucra a una función de un ángulo doble (véase el ejemplo 9 de la sección 8.3) y el segundo requiere de la habilidad para resolver ecuaciones trigonométricas (véase el ejemplo 10 de la sección 8.5).

Este capítulo empezará con un estudio de las identidades trigonométricas y sus demostraciones antes de proceder a las numerosas identidades que involucran funciones de sumas, restas y múltiplos de ángulos (o números reales). Después se investigarán identidades relativas a productos, que son muy útiles en el cálculo, se desarrollarán técnicas para resolver ecuaciones trigonométricas, y se concluirá este capítulo con el estudio de las funciones trigonométricas inversas.

Recuérdese que hay tres tipos de ecuaciones: contradicciones (que nunca son verdaderas para ningún valor de la variable), ecuaciones condicionales (que son verdaderas para algunos valores de la variable y falsas para otros valores), e identidades (que son verdaderas para todos los valores de la variable). En esta sección se toman en cuenta las **identidades trigonométricas**; identidades que involucran a las funciones trigonométricas. Varias identidades trigonométricas fundamentales ya fueron consideradas en la sección 6.8 y se repiten un poco adelante para una fácil referencia. Estas identidades, así como las reglas básicas del álgebra para manipular y simplificar expresiones algebraicas, pueden ser usadas para demostrar que una variedad de otras ecuaciones también son identidades trigonométricas.

Sugerencias para demostrar identidades

La mayoría de las identidades que aparecen en esta sección no son muy importantes por sí mismas. Lo que es importante son las técnicas que se usan para demostrarlas, y la madurez mental se adquiere al efectuar estas demostraciones. Para demostrar una identidad, se transforma un lado de ella a una expresión idéntica a la del otro lado, o a una expresión que se obtiene del otro lado con procesos similares.

Las identidades trigonométricas fundamentales

Identidades con recíprocos

$$\csc A \equiv \frac{1}{\sin A} \quad \sec A \equiv \frac{1}{\cos A} \quad \cot A \equiv \frac{1}{\tan A}$$

Identidades con razones

$$\tan A \equiv \frac{\sin A}{\cos A} \quad \cot A \equiv \frac{\cos A}{\sin A}$$

Identidades pitagóricas

$$\sin^2 A + \cos^2 A \equiv 1 \quad 1 + \tan^2 A \equiv \sec^2 A \quad 1 + \cot^2 A \equiv \csc^2 A$$

Identidades con cofunciones

$$\begin{array}{lll} \sin\left(A + \frac{\pi}{2}\right) \equiv \cos A & \sin\left(A - \frac{\pi}{2}\right) \equiv -\cos A & \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \equiv \cos A \\ \cos\left(A + \frac{\pi}{2}\right) \equiv -\sin A & \cos\left(A - \frac{\pi}{2}\right) \equiv \sin A & \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \equiv \sin A \\ \tan\left(A + \frac{\pi}{2}\right) \equiv -\cot A & \tan\left(A - \frac{\pi}{2}\right) \equiv -\cot A & \tan\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \equiv \cot A \end{array}$$

Miscelánea de identidades

$$\begin{array}{ll} \sin(-A) \equiv -\sin A & \cos(-A) \equiv \cos A \\ \sin(A \pm 2\pi) \equiv \sin A & \cos(A \pm 2\pi) \equiv \cos A \\ \sin(A \pm \pi) \equiv -\sin A & \cos(A \pm \pi) \equiv -\cos A \\ \sin(\pi - A) \equiv \sin A & \cos(\pi - A) \equiv -\cos A \end{array}$$

La habilidad para demostrar identidades sólo se obtiene con mucha práctica y algunas veces por acierto y error. Varios consejos son útiles.

1. Memorizar las identidades fundamentales y ser capaz de reconocer sus variaciones.
2. Trabajar con un solo lado de la identidad a la vez, empezando con el lado de la identidad que parece más complejo.
3. Recordar que varias operaciones algebraicas, tales como factorizar y agrupar términos iguales, también se aplican a los términos de las funciones trigonométricas.
4. Cuando se trabaje en un lado siempre téngase en mente el otro para recordar a dónde se quiere llegar.
5. Si un lado sólo tiene una función trigonométrica, tratar de eliminar todas las funciones del otro lado, excepto esa función.
6. A veces conviene transformar todas las funciones a senos y cosenos.
7. Si un numerador o un denominador contiene una expresión tal como $1 + \operatorname{sen} A$ (o $1 - \operatorname{sen} A$), intentas multiplicar los dos, numerador y denominador, por $1 - \operatorname{sen} A$ (o $1 + \operatorname{sen} A$).
8. Tal vez lo más importante de todo es intentar algo. Aunque lo que se haya intentado no haya dado resultado, algo se habrá aprendido. Aprender lo que no funciona ayuda a eliminar las posibilidades hasta que se descubra lo que sí funciona.

Formato para demostrar identidades

El formato que se utiliza en la demostración de identidades consta de una línea vertical que separa los dos lados de la ecuación. Esto es para ordenar que no se trabaje con los dos lados al mismo tiempo, por lo menos al principio. Recordar que cualquier variable se puede usar en la identidad.

EJEMPLO 1

Demostrar la identidad: $\sec x \cot x \equiv \csc x$

$\sec x \cot x$	$\csc x$
$\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$	
$\frac{1}{\operatorname{sen} x}$	
$\csc x$	

Como el lado izquierdo es idéntico al lado derecho, la identidad ha sido demostrada.

EJEMPLO 2

Demostrar la identidad: $\cos^2 \theta \cot^2 \theta \equiv \cot^2 \theta - \cos^2 \theta$

$\cos^2 \theta \cot^2 \theta$	$\cot^2 \theta - \cos^2 \theta$
	$-\cos^2 \theta$

$$\begin{aligned}
 & \cos^2 \theta \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1 \right) \\
 & \cos^2 \theta \left(\frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right) \\
 & \cos^2 \theta \cdot \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\
 & \cos^2 \theta \cot^2 \theta
 \end{aligned}$$

Ya que el lado derecho es igual al lado izquierdo, la identidad ha sido demostrada.

EJEMPLO 3

Demostrar la identidad: $\frac{\tan A + \cot A}{\csc A} \equiv \sec A$

$\frac{\tan A + \cot A}{\csc A}$ <p><i>Reemplazamos $\tan A$ por $\frac{\sin A}{\cos A}$ y $\cot A$ por $\frac{\cos A}{\sin A}$.</i></p> $\frac{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A}}{\frac{1}{\sin A}}$ <p><i>Multiplicamos el numerador y el denominador por el denominador común de las fracciones en el numerador.</i></p> $\frac{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A}}{\frac{1}{\sin A}} \cdot \frac{\cos A \sin A}{\cos A \sin A}$ $\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A}$ <p><i>Reemplazamos $\sin^2 A + \cos^2 A$ por 1.</i></p> $\frac{1}{\cos A}$ $\sec A$		$\sec A$
--	--	----------

Ya que el lado izquierdo ha sido transformado en el lado derecho, la identidad se ha demostrado.

Para demostrar algunas identidades se tendrá que trabajar en ambos lados. Esto se ilustra en el ejemplo que aparece a continuación.

EJEMPLO 4

Demostrar la identidad: $\frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \equiv \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}$

$\frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$	$\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}$
$\frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$	$\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}$
$\frac{1 - \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x}$	$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$
$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$	$\tan x$
$\tan x$	

Ya que los dos lados son idénticos a $\tan x$, hemos demostrado la identidad.

EJEMPLO 5

Demostrar la identidad: $\frac{1 - \cos B}{\operatorname{sen} B} \equiv \frac{\operatorname{sen} B}{1 + \cos B}$

$\frac{1 - \cos B}{\operatorname{sen} B}$	$\frac{\operatorname{sen} B}{1 + \cos B}$
$\frac{(1 - \cos B)(1 + \cos B)}{\operatorname{sen} B(1 + \cos B)}$	
$\frac{1 - \cos^2 B}{\operatorname{sen} B(1 + \cos B)}$	
$\frac{\operatorname{sen}^2 B}{\operatorname{sen} B(1 + \cos B)}$	
$\frac{\operatorname{sen} B}{1 + \cos B}$	

En esta ocasión el lado izquierdo ha sido transformado directamente al lado derecho, lo que demuestra la identidad. Se pudo haber empezado en el lado derecho, multiplicando el numerador y el denominador por $1 - \cos B$. Esto hubiera dado el lado izquierdo después de seguir pasos similares a los de arriba.

El ejemplo a continuación muestra que hay que tener cuidado al extraer raíz cuadrada de expresiones trigonométricas.

EJEMPLO 6

Como $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, ¿qué números reales x , con, $0 \leq x < 2\pi$, satisfacen $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$?

Cuando se extrae la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación, recordar que en realidad hay dos raíces, una positiva y otra negativa. Ya que

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x,$$

Si se saca raíz cuadrada en los dos lados,

$$\begin{aligned}\sqrt{\cos^2 x} &= \sqrt{1 - \sin^2 x} \\ |\cos x| &= \sqrt{1 - \sin^2 x}\end{aligned}$$

que es verdadero. Sin embargo, para que

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

sea verdadero, $\cos x$ no tiene que ser negativo (ya que $\sqrt{1 - \sin^2 x}$ no es negativo). Esto sucederá cuando $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2} \leq x < 2\pi$.

Algunas expresiones algebraicas contienen un radical que se puede transformar a una expresión equivalente sin radicales por medio de una **sustitución trigonométrica**. Tales sustituciones tienen un papel muy importante en el cálculo.

EJEMPLO 7

Cálculo

Cambiar $\sqrt{a^2 - x^2}$ a una expresión trigonométrica equivalente sin radicales sustituyendo x por $a \cos \theta$. Suponga que $a > 0$ y que $0 < \theta \leq \pi$.

Sea $x = a \cos \theta$.

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a \cos \theta)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{a^2(1 - \cos^2 \theta)} \\ &= \sqrt{a^2 \sin^2 \theta} \\ &= a \sin \theta\end{aligned}$$

Nótese que esto es cierto cuando $a > 0$ (entonces $\sqrt{a^2} = a$) y cuando $0 \leq \theta \leq \pi$ (entonces $\sin \theta \geq 0$ y $\sqrt{\sin^2 \theta} = \sin \theta$).

Siempre recordar escribir las variables asociadas a la función trigonométrica cuando se demuestran identidades. No ser perezoso y escribir "sen" en vez de "sen x" ya que "sen" no tiene sentido, al menos que se especifique la variable.

8.1. Ejercicios

Demostrar las identidades en los ejercicios 1-54.

1. $\frac{\tan x}{\sec x} \equiv \sin x$
2. $\frac{\csc A}{\sec A} \equiv \cot A$
3. $\frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} \equiv \cos x$
4. $\frac{1 + \tan^2 A}{\sec A} \equiv \sec A$
5. $\frac{1}{1 - \sin^2 x} \equiv 1 + \tan^2 x$
6. $\frac{\sec^2 A - 1}{\sec^2 A} = \sin^2 A$
7. $1 - 2 \sin^2 y \equiv 2 \cos^2 y - 1$
8. $\sin^2 \theta - \tan^2 \theta \equiv -\sin^2 \theta \tan^2 \theta$
9. $\frac{\csc^2 x}{1 + \tan^2 x} \equiv \cot^2 x$
10. $\frac{1 + \cot A}{\csc A} = \sin A + \cos A$
11. $\frac{1 + \cos^2 x}{\sin^2 x} = 2 \csc^2 x - 1$
12. $\sin^2 A \sec A + \sec A \equiv \cos A$
13. $\cos y(\tan y + \cot y) \equiv \csc y$
14. $\sec \theta - \cos \theta \equiv \tan \theta \sin \theta$
15. $\frac{\cos y}{1 - \sin y} = \frac{1 + \sin y}{\cos y}$
16. $\frac{\sec \theta + 1}{\tan \theta} \equiv \frac{\tan \theta}{\sec \theta - 1}$
17. $\frac{1 + \csc x}{\sec x} - \cot x \equiv \cos x$
18. $\frac{\cot A - 1}{\cot A + 1} \equiv \frac{1 - \tan A}{1 + \tan A}$
19. $\sin^4 y + 2 \sin^2 y \cos^2 y + \cos^4 y \equiv 1$
20. $\frac{\sin A}{\tan A} + \frac{\cos A}{\cot A} \equiv \sin A + \cos A$
21. $\frac{1 + \sec y}{\sin y + \tan y} \equiv \csc y$
22. $\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \equiv (\sec \theta + \tan \theta)^2$
23. $\frac{\cos^3 y - \sin^3 y}{\cos y - \sin y} = 1 + \sin y \cos y$
24. $(\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 2$
25. $\cos^4 x - \sin^4 x \equiv 1 - 2 \sin^2 x$
26. $\frac{\sin \theta - 1}{\cos \theta} \equiv \frac{\cos \theta - \cot \theta}{\cos \theta \cot \theta}$
27. $\sec^4 x - \sec^2 x \equiv \tan^4 x + \tan^2 x$
28. $\cos^4 A + \sin^2 A \equiv \sin^4 A + \cos^2 A$
29. $\csc y + \cot y \equiv \frac{\sin y}{1 - \cos y}$
30. $\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta \equiv \frac{\cos \theta(1 + \cot \theta)}{\csc \theta}$
31. $\frac{\sin y}{1 + \cos y} + \frac{1 + \cos y}{\sin y} \equiv 2 \csc y$
32. $\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\cos^2 \theta} \equiv \frac{\tan^2 \theta - 1}{\sin \theta + \cos \theta}$
33. $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 - \sin x} - \sec x \equiv \tan x$
34. $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right)}{1 - \tan A} + \frac{\sin(\pi - A)}{1 - \cot A} \equiv \cos A + \sin A$
35. $(\sin y + \cos y)^2 - (\sin(-y) + \cos(-y))^2 \equiv 4 \sin y \cos y$
36. $\frac{1}{\tan x(\csc x + 1)} = \tan x(\csc x - 1)$
37. $\sin x \tan x + \cos x \cot x \equiv \sec x + \csc x - \cos x - \sin x$
38. $\frac{\sin A + \cos A + 1}{\sin A + \cos A - 1} \equiv \csc A \sec A + \csc A + \sec A + 1$
39. $\frac{1 - 2 \cos^2 y - \sin y}{2 \sin y + 1} \equiv \sin y - 1$
40. $\frac{8 - 2 \tan \theta - 5 \sec^2 \theta}{3 - 5 \tan \theta} \equiv 1 + \tan \theta$
41. $\frac{1 + \sin x}{|\cos x|} \equiv \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$
42. $\frac{|\sin A|}{1 - \cos A} \equiv \sqrt{\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A}}$
43. $\sec y - \tan y \equiv \sqrt{\frac{1 - \sin y}{1 + \sin y}}$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$
44. $\frac{\sec \theta - 1}{\tan \theta} \equiv \sqrt{\frac{\sec \theta - 1}{\sec \theta + 1}}$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$

45. $\log 10^{\sin x} \equiv \sin x$

47. $\ln |\sec x| \equiv -\ln |\cos x|$

49. $\ln |\sec x + \tan x| \equiv -\ln |\sec x - \tan x|$

51. $e^{\ln |\sin y|} \equiv |\sin y|$

53. $\ln e^{\sin^2 x + \cos^2 x} \equiv 1$

46. $10^{\log |\cos A|} \equiv |\cos A|$

48. $\ln |\tan x| \equiv \ln |\sin x| - \ln |\cos x|$

50. $\ln |\csc A + \cot A| \equiv -\ln |\csc A - \cot A|$

52. $e^{\ln |\tan \theta|} \equiv |\tan \theta|$

54. $\ln e^{\tan^2 x - \sec^2 x} \equiv -1$

En los ejercicios 55-60 determinar todos los números reales x , con $0 \leq x < 2\pi$, que hacen que la ecuación dada sea verdadera.

55. $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

56. $\sqrt{1 + \tan^2 x} = \sec x$

57. $\csc x = \sqrt{1 + \cot^2 x}$

58. $\sqrt{\sec^2 x - \tan^2 x} = 1$

59. $\log(\tan x) = \log(\sin x) - \log(\cos x)$

60. $\ln(\sin x) = -\ln(\csc x)$

Cálculo. En los ejercicios 61-63 cambiar la expresión dada a una expresión trigonométrica equivalente sin radicales sustituyendo x por $\cos \theta$. Suponer que $a > 0$ y que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

61. $(a^2 - x^2)^{5/2}$

62. $\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

63. $\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}$

En los ejercicios 64-66 cambia la expresión dada a una expresión trigonométrica equivalente sin radicales, sustituyendo x por $\tan \theta$. Suponer que $a > 0$ y que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

64. $\sqrt{a^2 + x^2}$

65. $\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

66. $(a^2 + x^2)^{5/2}$

En los ejercicios 67-70 escribir cada expresión solamente en términos de la función dada. Suponer que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

67. $\cot \theta \sec^2 \theta$; $\cos \theta$

68. $\frac{1 + \tan^2 \theta}{\tan^2 \theta}$; $\sin \theta$

69. $\sin(\pi - \theta) \tan \theta$; $\cos \theta$

70. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \tan \theta$; $\sin \theta$

En los ejercicios 71-74 Encontrar los valores de A y B que hacen que la ecuación falsa sea y demostrar que la ecuación no es una identidad.

71. $\cos(A - B) = \cos A - \cos B$

72. $\cos(A + B) = \cos A + \cos B$

73. $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$

74. $\sin(A - B) = \sin A - \sin B$

Problemas de repaso

En los ejercicios 75-76 sea $\mathbf{u} = \langle 2, -5 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, 4 \rangle$, escribir cada vector en términos de los vectores unitarios básicos \mathbf{i} y \mathbf{j} .

75. $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$

76. $4\mathbf{u} + \mathbf{v}$

Problemas de repaso

En la sección pasada se vio que las identidades fundamentales tenían funciones trigonométricas de una sola variable real o un sólo ángulo medido en grados o radianes. En esta sección se verán identidades que involucran sumas o diferencias de dos variables o ángulos, tales como $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$. Por ejemplo, se podría demostrar que $\cos(A - B)$ no es igual a $\cos A - \cos B$. Digamos que $A = 60^\circ$ y $B = 30^\circ$.

$$\cos(60^\circ - 30^\circ) = \cos 60^\circ - \cos 30^\circ$$

ya que $\cos(60^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660,$

mientras que $\cos 60^\circ - \cos 30^\circ = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \approx -0.3660.$

Las fórmulas que se derivarán son verdaderas para funciones trigonométricas de números reales, ángulos en radianes y ángulos en grados.

Coseno de una diferencia

$$\cos(A - B) \equiv \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

Obtención de la identidad para $\cos(A - B)$

Para demostrar esta identidad, consideramos el círculo unitario de la figura 1, que ilustra dos ángulos A y B en posición normal. Sea P el punto de intersección del lado terminal de A con el círculo unitario, y Q el punto de intersección del lado terminal de B con el círculo unitario. Entonces las coordenadas de P son $(\cos A, \sin A)$, y las coordenadas de Q son $(\cos B, \sin B)$. Con el uso de la fórmula de la distancia, el cuadrado de la distancia entre P y Q es

$$\begin{aligned} d^2 &= (\cos A - \cos B)^2 + (\sin A - \sin B)^2 \\ &= \cos^2 A - 2 \cos A \cos B + \cos^2 B + \sin^2 A - 2 \sin A \sin B + \sin^2 B \\ &= (\sin^2 A + \cos^2 A) + (\sin^2 B + \cos^2 B) - 2 \cos A \cos B - 2 \sin A \sin B \\ &= 1 + 1 - 2 \cos A \cos B - 2 \sin A \sin B \\ &= 2 - 2 \cos A \cos B - 2 \sin A \sin B. \end{aligned}$$

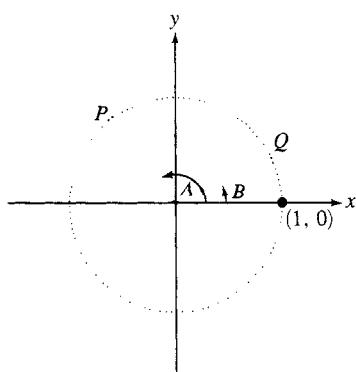


Figura 1. Ángulos A y B

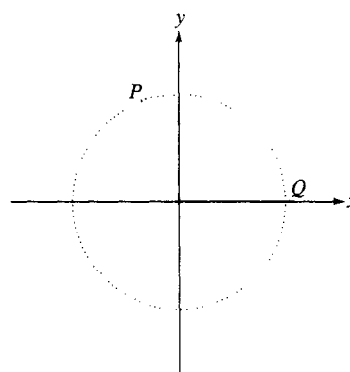


Figura 2. Ángulo $A - B$

Supóngase que giramos el círculo unitario en la dirección de las manecillas del reloj hasta que Q coincida con $(1, 0)$, como lo muestra la figura 2. Así pues, se coloca al ángulo $A - B$ en posición normal. El punto P ahora tiene coordenadas $(\cos(A - B), \sin(A - B))$.

Encontrar el cuadrado de la distancia entre P y Q utilizando las nuevas coordenadas.

$$\begin{aligned}
 d^2 &= [1 - \cos(A - B)]^2 + [0 - \sin(A - B)]^2 \\
 &= 1 - 2 \cos(A - B) + \cos^2(A - B) + \sin^2(A - B) \\
 &= 1 - 2 \cos(A - B) + \cos^2(A - B) + \sin^2(A - B) \\
 &= 1 - 2 \cos(A - B) + 1 \\
 &= 2 - 2 \cos(A - B)
 \end{aligned}$$

Como la distancia entre P y Q es siempre la misma sin importar la rotación del círculo, se tiene que

$$2 - 2 \cos(A - B) = 2 - 2 \cos A \cos B - 2 \sin A \sin B.$$

Si se resta 2 y se multiplica por $-1/2$ se tiene que

Podría ser más fácil recordar esta identidad con palabras: el coseno de la diferencia de dos ángulos (números) es la suma del producto de los cosenos de los ángulos (números) y el producto de los senos de los dos ángulos (números).

EJEMPLO 1

Encontrar el valor exacto de $\cos 15^\circ$ usando el hecho de que $15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$.

$$\begin{aligned}
 \cos 15^\circ &= \cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}\sqrt{2}}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{4}
 \end{aligned}$$

También se debería poder reconocer la fórmula de la diferencia en sentido opuesto.

EJEMPLO 2

Simplificar $\cos 73^\circ \cos 13^\circ + \sin 73^\circ \sin 13^\circ$.

$$\begin{aligned}
 \cos 73^\circ \cos 13^\circ + \sin 73^\circ \sin 13^\circ &= \cos(73^\circ - 13^\circ) \\
 &= \cos 60^\circ = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Identidad para $\cos(A + B)$

La identidad para la suma de dos ángulos (números reales) se obtiene de la identidad de la diferencia tomando en cuenta que $A + B = A - (-B)$.

$$\begin{aligned}
 \cos(A + B) &= \cos(A - (-B)) \\
 &= \cos A \cos(-B) + \sin A \sin(-B) \\
 &= \cos A \cos B + \sin A[-\sin B] \\
 &= \cos A \cos B - \sin A \sin B
 \end{aligned}$$

Coseno de una suma

$$\cos(A + B) \equiv \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

Así como para la identidad de la diferencia, puede ser mejor recordar la identidad de la suma con palabras: el coseno de la suma de dos ángulos (números) es el producto de los cosenos de los ángulos (números) menos el producto de los senos de los ángulos (números).

EJEMPLO 3

Encontrar el valor exacto de $\cos 75^\circ$ usando el hecho de que $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$.

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}\end{aligned}$$

Muchas de las identidades que se verificaron previamente utilizando el círculo unitario se pueden demostrar utilizando las identidades de la suma y de la resta.

EJEMPLO 4

Verificar la identidad: $\cos\left(A + \frac{\pi}{2}\right) \equiv -\operatorname{sen} A$

$$\begin{aligned}\cos\left(A + \frac{\pi}{2}\right) &\equiv \cos A \cos \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \\ &\equiv \cos A \cdot (0) - \operatorname{sen} A \cdot (1) \\ &\equiv 0 - \operatorname{sen} A \\ &\equiv -\operatorname{sen} A\end{aligned}$$

EJEMPLO 5

Dado que $\operatorname{sen} A = 3/5$, con A en el cuadrante II, $\cos B = -12/13$, con B en el cuadrante III, encontrar $\cos(A - B)$ y $\cos(A + B)$.

Para resolver un problema como éste, dibujar los dos ángulos como lo muestra la figura 3 y determinar $\cos A$ y $\operatorname{sen} B$. Ya que $\cos B$ es $-12/13$, $x = -12$, y $r = 13$,

$$\begin{aligned}y^2 + (-12)^2 &= 13^2, \\ y &= -5.\end{aligned}$$

Por lo que $\operatorname{sen} B = -\frac{5}{13}.$

Así mismo, $\cos A = -\frac{4}{5}.$

Sustituir estos valores en las identidades.

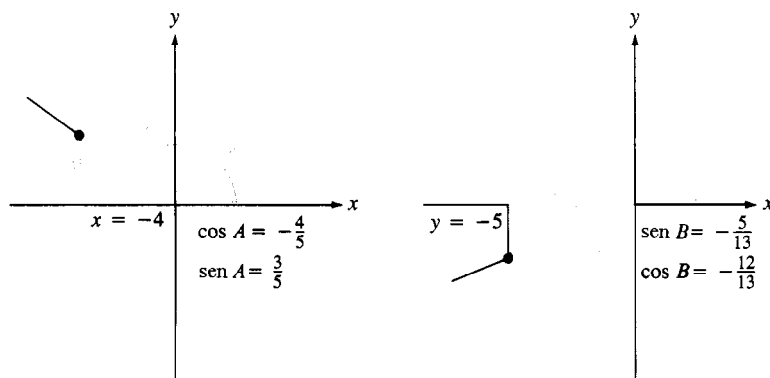


Figura 3

$$\begin{aligned}\cos(A - B) &= \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \\ &= \left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{48}{65} - \frac{15}{65} = \frac{33}{65} \\ \cos(A + B) &= \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \\ &= \left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) - \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{48}{65} + \frac{15}{65} = \frac{63}{65}\end{aligned}$$

Nótese que no fue necesario encontrar el valor de los ángulos A y B para determinar $\cos(A - B)$ y $\cos(A + B)$.

Deducción de la identidad para $\operatorname{sen}(A + B)$

Para obtener las identidades de seno para una suma o una diferencia de dos ángulos (números), se utilizará la identidad para el coseno de una diferencia junto con las identidades.

$$\operatorname{sen} A \equiv \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \equiv \cos A.$$

Sustituir A por $A + B$ en la primera.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(A + B) &\equiv \cos\left[\frac{\pi}{2} - (A + B)\right] \\ &\equiv \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - A\right) - B\right] \\ &\equiv \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \cos B + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \operatorname{sen} B \\ &\equiv \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B\end{aligned}$$

Seno de una suma

$$\operatorname{sen}(A + B) \equiv \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B$$

Nota Recordar esta identidad con palabras: el seno de la suma de dos ángulos (números) es el seno del primero por el coseno del segundo más el coseno de primero por el seno del segundo.

EJEMPLO 6

Encontrar el valor exacto de $\sin \frac{19\pi}{12}$ usando el hecho que $\frac{19\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}$.

$$\begin{aligned}\sin \frac{19\pi}{12} &= \sin \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{6} \right) = \sin \frac{3\pi}{4} \cos \frac{5\pi}{6} + \cos \frac{3\pi}{4} \sin \frac{5\pi}{6} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{-\sqrt{2}\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} = \frac{-\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4}\end{aligned}$$

EJEMPLO 7

Simplificar $\sin 68^\circ \cos 22^\circ + \cos 68^\circ \sin 22^\circ$.

$$\sin 68^\circ \cos 22^\circ + \cos 68^\circ \sin 22^\circ = \sin (68^\circ + 22^\circ) = \sin 90^\circ = 1$$

Identidad para $\sin (A - B)$

Si se utiliza la identidad $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ y se reemplaza B por $-B$, se obtiene la identidad para el seno de una resta.

$$\begin{aligned}\sin(A - B) &\equiv \sin(A + (-B)) \\ &\equiv \sin A \cos(-B) + \cos A \sin(-B) \\ &\equiv \sin A \cos B + \cos A(-\sin B) \\ &\equiv \sin A \cos B - \cos A \sin B\end{aligned}$$

Seno de una diferencia

$$\sin(A - B) \equiv \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

Recordar esta identidad con palabras: el seno de una resta de dos ángulos (números) es el seno del primero por el coseno del segundo menos el coseno del primero por el seno del segundo.

EJEMPLO 8

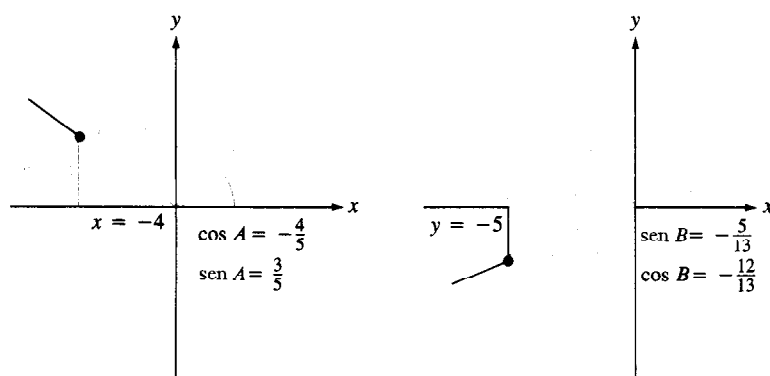
Encontrar el valor exacto de $\sin 15^\circ$ utilizando el hecho de que $15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$.

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(60^\circ - 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}\end{aligned}$$

EJEMPLO 9

Dado que $\operatorname{sen} A = \frac{3}{5}$, con A en el cuadrante II y $\cos B = -\frac{12}{13}$, con B en el cuadrante III, encontrar $\operatorname{sen}(A+B)$ y $\operatorname{sen}(A-B)$.

Dibujar los dos ángulos como en la figura 4 y demostrar que $\cos A = -\frac{4}{5}$ y $\operatorname{sen} B = -\frac{5}{13}$.

**Figura 4**

Sustituir en las identidades.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(A+B) &= \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B \\ &= \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) \\ &= -\frac{36}{65} + \frac{20}{65} = -\frac{16}{65}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(A-B) &= \operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B \\ &= \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) - \left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) \\ &= -\frac{36}{65} - \frac{20}{65} = -\frac{56}{65}\end{aligned}$$

Obtención de la identidad para $\tan(A+B)$

La identidad de la tangente de la suma de dos ángulos o números se puede obtener utilizando las identidades para las sumas de las funciones seno y coseno junto con la identidad \tan

$$\begin{aligned}\tan(A+B) &\equiv \frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\cos(A+B)} \\ &\equiv \frac{\operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B}{\cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B} \\ &\equiv \frac{\frac{\operatorname{sen} A \cos B}{\cos A \cos B} + \frac{\cos A \operatorname{sen} B}{\cos A \cos B}}{\frac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B} - \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\cos A \cos B}} \\ &\equiv \frac{\frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} + \frac{\operatorname{sen} B}{\cos B}}{1 - \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} \cdot \frac{\operatorname{sen} B}{\cos B}} \\ &\equiv \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}\end{aligned}$$

Tangente de una suma

$$\tan (A + B) \equiv \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

Identidad para $\tan (A - B)$

Si se reemplaza B por $-B$ en la identidad para la tangente de una suma, se obtiene la identidad para la tangente de una diferencia.

$$\begin{aligned}\tan (A - B) &\equiv \tan (A + (-B)) \equiv \frac{\tan A + \tan (-B)}{1 - \tan A \tan (-B)} \\ &\equiv \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}\end{aligned}$$

Tangente de una diferencia

$$\tan (A - B) \equiv \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

EJEMPLO 10

Simplificar $\frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{7\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{7\pi}{4}}.$

$$\frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{7\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{7\pi}{4}} \equiv \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} \right) = \tan 2\pi = 0$$

8.2. Ejercicios

En los ejercicios 1-6 encontrar el valor exacto de a) seno, b) coseno y c) tangente del ángulo dado utilizando las identidades para la suma y la resta.

1. $105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$

2. $165^\circ = 135^\circ + 30^\circ$

3. $255^\circ = 300^\circ - 45^\circ$

4. $195^\circ = 225^\circ - 30^\circ$

5. $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

6. $\frac{7\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$

En los ejercicios 7-22 simplificar cada expresión escribiéndola como una función de un solo ángulo.

7. $\cos S \cos T + \sin S \sin T$

8. $\cos M \cos N - \sin M \sin N$

9. $\sin T \cos S + \cos T \sin S$

10. $\sin M \cos N - \cos M \sin N$

11. $\frac{\tan S - \tan T}{1 + \tan S \tan T}$

12. $\frac{\tan M + \tan N}{1 - \tan M \tan N}$

13. $\cos 190^\circ \cos 20^\circ + \sin 190^\circ \sin 20^\circ$

14. $\cos \frac{7\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{7\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{3}$

15. $\sin 190^\circ \cos 20^\circ + \cos 190^\circ \sin 20^\circ$

17. $\cos 2x \cos 5x + \sin 2x \sin 5x$

19. $\sin(-3) \cos 7 + \cos(-3) \sin 7$

21. $\frac{\tan 5 + \tan(-2)}{1 - \tan 5 \tan(-2)}$

16. $\sin \frac{7\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{7\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{3}$

18. $\sin 5x \cos 2x + \cos 5x \sin 2x$

20. $\cos(-3) \cos 7 - \sin(-3) \sin 7$

22. $\frac{\tan 35^\circ - \tan 15^\circ}{1 + \tan 35^\circ \tan 15^\circ}$

23. Dado que $\sin A = \frac{4}{5}$, con A en el cuadrante I y $\cos B = -\frac{3}{5}$, con B en el cuadrante III; encontrar a) $\cos(A+B)$, b) $\cos(A-B)$, c) $\sin(A+B)$, d) $\sin(A-B)$, e) $\tan(A+B)$ y f) $\tan(A-B)$.

24. Dado que $\cos A = \frac{5}{13}$, con A en el cuadrante IV y $\sin B = \frac{-3}{5}$, con B en el cuadrante III; encontrar a) $\cos(A+B)$, b) $\cos(A-B)$, c) $\sin(A+B)$, d) $\sin(A-B)$, e) $\tan(A+B)$ y f) $\tan(A-B)$.

Verifica cada una de las identidades en los ejercicios 25-54.

25. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \equiv \sin A$

26. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \equiv \cos A$

27. $\sin(A + 180^\circ) \equiv -\sin A$

28. $\cos(A + 180^\circ) \equiv -\cos A$

29. $\cos(A - 2\pi) \equiv \cos A$

30. $\sin(A - 2\pi) \equiv \sin A$

31. $\sin(A + 360^\circ) \equiv \sin A$

32. $\cos(A + 360^\circ) \equiv \cos A$

33. $\cos\left(A - \frac{\pi}{2}\right) \equiv \sin A$

34. $\sin\left(A - \frac{\pi}{2}\right) \equiv -\cos A$

35. $\sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right) \equiv \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\sin A + \cos A)$

36. $\cos\left(A + \frac{\pi}{4}\right) \equiv \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\cos A - \sin A)$

37. $\tan(A + 45^\circ) \equiv \frac{1 + \tan A}{1 - \tan A}$

38. $\tan(A - 45^\circ) \equiv \frac{\tan A - 1}{1 + \tan A}$

39. $\sin(A+B) \sin(A-B) \equiv \sin^2 A - \sin^2 B$

40. $\cos(A+B) \cos(A-B) \equiv \cos^2 A - \sin^2 B$

41. $\sin(A+B) + \sin(A-B) \equiv 2 \sin A \cos B$

42. $\cos(A+B) + \cos(A-B) \equiv 2 \cos A \cos B$

43. $\cos(A+B+C) \equiv \cos A \cos B \cos C - \cos A \sin B \sin C - \sin A \cos B \sin C - \sin A \sin B \cos C$

44. $\sin(A+B+C) \equiv \sin A \cos B \cos C + \cos A \sin B \cos C + \cos A \cos B \sin C - \sin A \sin B \sin C$

45. $\sin 2A \equiv 2 \sin A \cos A$

46. $\cos 2A \equiv \cos^2 A - \sin^2 A$

47. $\tan A - \tan B \equiv \frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B}$

48. $\cot A - \tan B \equiv \frac{\cos(A+B)}{\sin A \cos B}$

49. $\frac{\sin(A+B)}{\cos(A-B)} \equiv \frac{\tan A + \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

50. $\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} \equiv \frac{\tan A - \tan B}{\tan A + \tan B}$

51. $\frac{\cos(A+B)}{\sin(A-B)} \equiv \frac{\cot A - \tan B}{1 - \cot A \tan B}$

52. $\frac{\cos(A+B)}{\cos(A-B)} \equiv \frac{1 - \tan A \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

53. $\cot(A+B) \equiv \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$

54. $\cot(A-B) \equiv \frac{\cos A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$

Cálculo. La expresión $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, en donde $f(x)$ es una función dada y h es un número real no nulo, es muy importante en el cálculo. Utilizar esta expresión en los ejercicios 55-56.

55. Si $f(x) = \sin x$, demuestre que

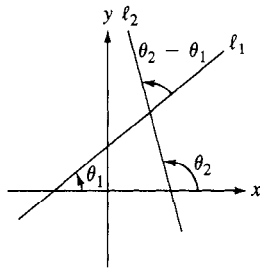
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sin x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\sin h}{h} \right).$$

56. Si $f(x) = \cos x$, demuestre que

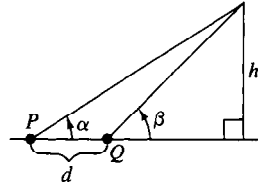
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \cos x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) - \sin x \left(\frac{\sin h}{h} \right).$$

57. Geometría analítica. Supóngase que l_1 y l_2 son dos rectas cuyas pendientes son m_1 y m_2 , respectivamente, como lo muestra la figura. Se puede demostrar que $\tan \theta_1 = m_1$ y que $\tan \theta_2 = m_2$.

Utilizar esta información para demostrar que $\tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$, que l_1 y l_2 son perpendiculares si y sólo si $m_1 = -\frac{1}{m_2}$.



Ejercicio 57



Ejercicio 58

58. Agrimensura. La altura h de un objeto cuando es visto desde dos puntos P y Q alineados con el objeto puede ser calculada si se usan los ángulos de elevación α , desde P y β , desde Q (véase la figura). Demostrar que

$$h = \frac{d \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}$$

en donde d es la distancia entre P y Q . Encontrar la altura de una montaña, aproximado al pie más cercano, si $\alpha = 25^\circ 00'$, $\beta = 29^\circ 30'$, y $d = 2\,500$ ft.

Ejercicios 59-60

Demostrar las identidades de los ejercicios 59-60.

59. $\frac{\tan^2 x}{\sec x + 1} \equiv \frac{1 - \cos x}{\cos x}$

60. $\cos^4 y - \sin^4 y + 1 \equiv 2 \cos^2 y$

Identidades de los múltiplos de los ángulos

Obtención de identidades para ángulos dobles

Al hacer $B = A$ en las identidades para $\operatorname{sen}(A + B)$, $\cos(A + B)$ y $\tan(A + B)$, se obtienen las identidades para $\operatorname{sen} 2A$, $\cos 2A$ y $\tan 2A$.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2A) &= \operatorname{sen}(A + A) = \operatorname{sen} A \cos A + \cos A \operatorname{sen} A \\ &= 2 \operatorname{sen} A \cos A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(2A) &= \cos(A + A) = \cos A \cos A - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} A \\ &= \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A \end{aligned}$$

Se pueden encontrar otras dos formas para $\cos 2A$; una sustituyendo $1 - \operatorname{sen}^2 A$ por $\cos^2 A$ y la otra sustituyendo $1 - \cos^2 A$ por $\operatorname{sen}^2 A$ en $\cos 2A = \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A$.

$$\cos 2A = \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A = (\cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A) - \operatorname{sen}^2 A = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A = \cos^2 A - (1 - \cos^2 A) = 2 \cos^2 A - 1$$

$$\tan(2A) = \tan(A + A) = \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \tan A} = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

Identidades para un ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2A \equiv 2 \operatorname{sen} A \cos A$$

$$\cos 2A \equiv \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A \equiv 1 - 2 \operatorname{sen}^2 A \equiv 2 \cos^2 A - 1$$

$$\tan 2A \equiv \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

Así como para las identidades de suma y resta, es mejor memorizar las identidades para ángulos dobles con palabras, no con la letra A en particular. También recuérdese la primera forma de $\cos 2A$ y desarróllense las otras dos utilizando $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A \equiv 1$ y sustituyendo.

EJEMPLO 1

Dado que $\operatorname{sen} A = \frac{3}{5}$ con A en el cuadrante II, encontrar $\operatorname{sen} 2A$, $\cos 2A$ y $\tan 2A$, y determinar el cuadrante en el cual se encuentra $2A$.

Del dibujo de la figura 5 con A en el cuadrante II y $\operatorname{sen} A = \frac{3}{5}$, se tiene que $\cos A = \frac{-4}{5}$. Sustituir

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2A &= 2 \operatorname{sen} A \cos A = 2 \left(\frac{3}{5} \right) \left(\frac{-4}{5} \right) = 2 \left(-\frac{12}{25} \right) = -\frac{24}{25} \\ \cos 2A &= \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A = \left(\frac{-4}{5} \right)^2 - \left(\frac{3}{5} \right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25} \\ \tan 2A &= \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} = \frac{2 \left(\frac{-3}{4} \right)}{1 - \left(\frac{-3}{4} \right)^2} = -\frac{24}{7}\end{aligned}$$

Ya que $\operatorname{sen} 2A$ es negativo y $\cos 2A$ es positivo, $2A$ está en el cuadrante IV.

EJEMPLO 2

Dado que $\csc Y = -4$ con Y en el cuadrante III, encontrar $\operatorname{sen} 2Y$, $\cos 2Y$ y $\tan 2Y$, y determinar en qué cuadrante está $2Y$.

Ya que $\csc Y = -4$, se sabe que $\operatorname{sen} Y = \frac{1}{\csc Y} = -\frac{1}{4}$. Del dibujo de la figura 6, se tiene que $\cos Y = -\frac{\sqrt{15}}{4}$. Si se sustituye.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2Y &= 2 \operatorname{sen} Y \cos Y = 2 \left(-\frac{1}{4} \right) \left(-\frac{\sqrt{15}}{4} \right) = \frac{2\sqrt{15}}{16} = \frac{\sqrt{15}}{8}, \\ \cos 2Y &= \cos^2 Y - \operatorname{sen}^2 Y = \left(-\frac{\sqrt{15}}{4} \right)^2 - \left(-\frac{1}{4} \right)^2 = \frac{15}{16} - \frac{1}{16} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}, \\ \tan 2Y &= \frac{2 \tan Y}{1 - \tan^2 Y} = \frac{2 \left(\frac{\sqrt{15}}{15} \right)}{1 - \left(\frac{\sqrt{15}}{15} \right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{7}.\end{aligned}$$

Ya que $\operatorname{sen} 2Y$ y $\cos 2Y$ son positivos, $2Y$ está en el cuadrante I.

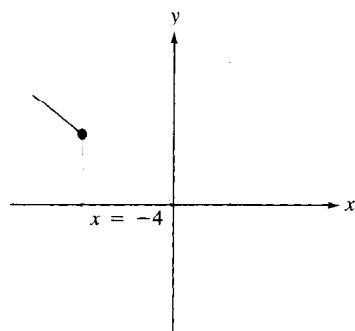


Figura 5. Ángulo A.

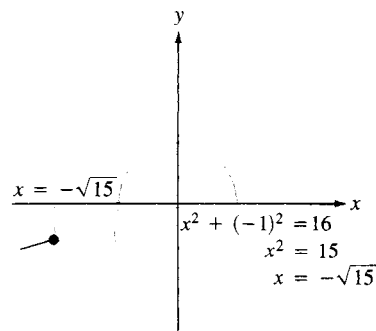


Figura 6. Ángulo Y.

EJEMPLO 3

Encontrar una expresión que sea igual a $\sin 4B$ y que sólo involucre funciones de B .

$$\begin{aligned}
 \sin 4B &= \sin 2(\quad) \\
 &= 2 \sin \quad \cos \quad \quad \quad \text{Identidad de ángulo doble} \\
 &= 2(2 \sin B \cos B)(\cos^2 B - \sin^2 B) \quad \quad \quad \text{Identidad de ángulo doble} \\
 &= 4 \sin B \cos^3 B - 4 \sin^3 B \cos B \quad \quad \quad \text{Distributiva}
 \end{aligned}$$

Se pudieron haber derivado dos formas equivalentes si se hubiera sustituido $\cos 2B$ por $1 - 2 \sin^2 B$ o $\cos^2 B - 1$ en vez de $\cos^2 B - \sin^2 B$.

Deducción de las identidades para reducir potencias

Las identidades del ángulo doble para las funciones seno y coseno se pueden usar para obtener identidades a la tercera potencia que son muy útiles en el cálculo. Las primeras dos se obtienen de $2A \equiv 1 - 2 \sin^2 A$ y $\cos 2A \equiv 2 \cos^2 A - 1$ se despeja $\sin^2 A$ y $\cos^2 A$, respectivamente. La tercera proviene directamente de las primeras dos y del hecho de que $\tan^2 A = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$.

Identidades para reducción de potencias

$$\sin^2 A \equiv \frac{1 - \cos 2A}{2} \quad \cos^2 A \equiv \frac{1 + \cos 2A}{2} \quad \tan^2 A \equiv \frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A}$$

EJEMPLO 4

Expresar $\cos^4 Y$ en términos de la primera potencia de la función coseno.

$$\begin{aligned}
 \cos^4 Y &= (\cos^2 Y)^2 = \left(\frac{1 + \cos 2Y}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{4} (1 + 2 \cos 2Y + \cos^2 2Y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \left(1 + 2 \cos 2Y + \frac{1}{4} \cos 4Y \right) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2Y + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 4Y \\
&= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2Y + \frac{1}{8} \cos 4Y
\end{aligned}$$

Identidades para el semiángulo

Las identidades para el semiángulo se obtienen de las identidades que se expresan mediante reducción de potencias si se reemplaza A por $\frac{A}{2}$ y se extrae raíz cuadrada en ambos lados. El signo adecuado se elige dependiendo del cuadrante en que se encuentre $\frac{A}{2}$.

Identidades para el semiángulo

$$\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \quad \cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \quad \tan \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$$

EJEMPLO 5

Dado que $\sin A = -\frac{3}{5}$ con A en el cuadrante III, encontrar $\sin \frac{A}{2}$ y $\cos \frac{A}{2}$.

Del dibujo de la figura 7, con A en el cuadrante III, $\cos A = -\frac{4}{5}$. Si se sustituye.

$$\begin{aligned}
\sin \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)}{2}} \\
&= \pm \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{9}{10}} \\
&= \pm \frac{3}{\sqrt{10}} = \pm \frac{3\sqrt{10}}{10}.
\end{aligned}$$

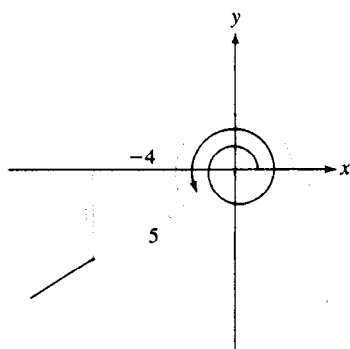


Figura 7

Si se sustituye otra vez,

$$\begin{aligned}\cos \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 + \left(-\frac{4}{5}\right)}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1}{10}} \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{10}} = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}.\end{aligned}$$

Por no tenerse más información sobre el tamaño del ángulo A (A podría ser negativo o mayor que 360°), ni el seno ni el coseno de $\frac{A}{2}$ se pueden especificar como negativo o positivo. ■

Se pueden deducir dos formas posibles para $\tan \frac{A}{2}$. Supóngase que se empieza con la identidad para $\tan^2 \frac{A}{2}$ y se multiplica el numerador y el denominador por $1 - \cos A$.

$$\begin{aligned}\tan^2 \frac{A}{2} &= \frac{(1 - \cos A)(1 - \cos A)}{(1 + \cos A)(1 - \cos A)} \\ &= \frac{(1 - \cos A)^2}{1 - \cos^2 A} \\ &= \frac{(1 - \cos A)^2}{\sin^2 A} \quad 1 - \cos^2 A = \sin^2 A\end{aligned}$$

Extraer raíz cuadrada en ambos lados.

$$\tan \frac{A}{2} = \pm \frac{1 - \cos A}{\sin A}$$

Ya que $-1 \leq \cos A \leq 1$ para cada A , $1 - \cos A$ nunca es negativo, y por tanto el signo de $\frac{1 - \cos A}{\sin A}$ es el mismo que el signo de $\sin A$. Así mismo, $\tan \frac{A}{2}$ y $\sin A$ siempre tienen el mismo signo, como lo muestra la tabla que aparece a continuación.

A	$\frac{A}{2}$	$\sin A$	$\tan \frac{A}{2}$
$0 < A < \pi$	$0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}$	+	+
$\pi < A < 2\pi$	$\frac{\pi}{2} < \frac{A}{2} < \pi$	-	-
$2\pi < A < 3\pi$	$\pi < \frac{A}{2} < \frac{3\pi}{2}$	+	+
$3\pi < A < 4\pi$	$\frac{3\pi}{2} < \frac{A}{2} < 2\pi$	-	-

Como resultado, se puede omitir el signo de \pm y utilizar sólo el signo positivo. De tal manera que,

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{\sin A}.$$

Si se multiplican el numerador y el denominador por $1 + \cos A$ y se utiliza el mismo argumento, se tiene que

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{\sin A}{1 + \cos A}.$$

Identidades para la tangente del semiángulo (forma alternativa)

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{\sin A} \quad \tan \frac{A}{2} = \frac{\sin A}{1 + \cos A}$$

EJEMPLO 6

Dado que $\sin A = -\frac{3}{5}$, con A en el cuadrante III, encontrar $\tan \frac{A}{2}$.

Del dibujo del ángulo A en la figura 7, se tiene otra vez que $\cos A = -\frac{4}{5}$. Si se sustituye,

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{\sin A} = \frac{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)}{-\frac{3}{5}} = \frac{\frac{9}{5}}{-\frac{3}{5}} = -3.$$

EJEMPLO 7

Encontrar el valor exacto de $\sin 22.5^\circ$, $\cos 22.5^\circ$ y $\tan 22.5^\circ$ usando el hecho de que $22.5^\circ = \frac{45^\circ}{2}$.

Ya que 22.5° está en el primer cuadrante, los valores de las tres funciones son todos positivos.

$$\begin{aligned} \sin 22.5^\circ &= \sin \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \\ \cos 22.5^\circ &= \cos \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tan 22.5^\circ &= \tan \frac{45^\circ}{2} = \frac{1 - \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ} \\
 &= \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
 &= \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - 2}{2} = \sqrt{2} - 1
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 8

Demostrar la identidad $\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \equiv \cos x$

Se puede reconocer que el lado izquierdo tiene la forma de una identidad para un ángulo doble, en donde $\frac{x}{2}$ toma el lugar de A . Por tanto,

$$\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \equiv \cos 2\left(\frac{x}{2}\right) \equiv \cos x.$$

Si no se reconoce esta relación, se podría empezar con el lado izquierdo y sustituir directamente para $\cos \frac{x}{2}$ y $\sin \frac{x}{2}$.

$$\begin{aligned}
 \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} &\equiv \left(\pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}\right)^2 - \left(\pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}\right)^2 \\
 &\equiv \frac{1 + \cos x}{2} - \frac{1 - \cos x}{2} \\
 &\equiv \frac{2 \cos x}{2} \equiv \cos x
 \end{aligned}$$

Se concluye esta sección con el primer problema de aplicación visto en la introducción a este capítulo.

EJEMPLO 9

Deportes

Un jugador de fútbol americano patea para gol de campo con un ángulo de inclinación θ con respecto al campo de juego. Puede ser demostrado que la distancia, en ft, que el balón recorre en el aire si no es interrumpido, está dada por

$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{32},$$

en donde v es la velocidad inicial del balón en ft/s. **a)** Encuentre la distancia que recorre el balón si $\theta = 40^\circ$ y $v = 50$ ft/s. **b)** Si v es constante, argumente por qué se alcanza la distancia máxima cuando $\theta = 45^\circ$.

a) Sustituir 40° en vez de θ y 50 en vez de v en la fórmula

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{(50)^2 \sin 2(40^\circ)}{32} = \frac{2500 \sin 80^\circ}{32} \\
 &\approx 76.9 \text{ ft.}
 \end{aligned}$$

- b) Ya que $d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{32}$ y v^2 y 32 son constantes positivas, el valor máximo de d ocurre cuando $\sin 2\theta$ es lo más grande posible. El valor más grande de la función seno es 1, que ocurre a los 90° . Por tanto, el valor máximo de d se logra cuando $2\theta = 90^\circ$ es decir $\theta = 45^\circ$.

8.3. Ejercicios

En los ejercicios 1-8 utilizar la información dada para encontrar a) $\sin 2A$, b) $\cos 2A$, c) $\tan 2A$ y d) el cuadrante en el que se encuentra $2A$.

1. $\sin A = \frac{3}{5}$ con A en el cuadrante I
2. $\sin A = \frac{12}{13}$ con A en el cuadrante I
3. $\cos A = -\frac{12}{13}$ con A en el cuadrante II
4. $\cos A = -\frac{3}{5}$ con A en el cuadrante II
5. $\tan A = \frac{3}{4}$ con A en el cuadrante III
6. $\tan A = \frac{5}{12}$ con A en el cuadrante III
7. $\csc A = -\frac{13}{12}$ con A en el cuadrante IV
8. $\sec A = \frac{5}{4}$ con A en el cuadrante IV

En los ejercicios 9-14, dado el valor de A , encontrar el valor exacto de a) $\sin \frac{A}{2}$, b) $\cos \frac{A}{2}$, y c) $\tan \frac{A}{2}$

9. 30°
10. 330°
11. $\frac{\pi}{4}$
12. $\frac{\pi}{6}$
13. 210°
14. 135°

En los ejercicios 15-16 utilizar la información dada para encontrar $\tan \frac{A}{2}$.

15. $\sin A = \frac{4}{5}$ con A en el cuadrante II
16. $\cos A = -\frac{12}{13}$ con A en el cuadrante III

Utilizar las identidades relativas al semiángulo simplificando cada una de las expresiones en los ejercicios 17-20.

17. $\sqrt{\frac{1 + \cos 4x}{2}}$
18. $\sqrt{\frac{1 - \cos 6y}{2}}$
19. $-\sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$
20. $-\sqrt{\frac{1 + \cos (x^2 + 1)}{2}}$

En los ejercicios 21-24 encontrar una expresión igual a la expresión dada que sólo tenga funciones de A .

21. $\cos 4A$
22. $\sin 3A$
23. $\cos 3A$
24. $\sin 6A$

En los ejercicios 25-28 utilizar las identidades relativas a la reducción de potencias para escribir cada una de las expresiones en términos de la primera potencia de la función coseno.

25. $\sin^4 A$
26. $\cos^2 A \sin^2 A$
27. $\sin^2 A \cos^4 A$
28. $\sin^4 A \cos^2 A$

Verificar cada una de las identidades en los ejercicios 29-48.

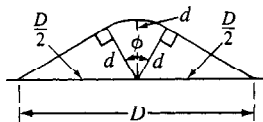
29. $\sin 8A \equiv 2 \sin 4A \cos 4A$
30. $\cos 8A \equiv \cos^2 4A - \sin^2 4A$
31. $\cos^2 5x - \sin^2 5x \equiv \cos 10x$
32. $2 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} \equiv \sin \frac{x}{2}$
33. $\csc 2A \equiv \frac{\csc A}{2 \cos A}$
34. $\sec 2A \equiv \frac{\sec^2 A}{2 - \sec^2 A}$
35. $\cos^4 x - \sin^4 x \equiv \cos 2x$
36. $(\sin x + \cos x)^2 \equiv 1 + \sin 2x$
37. $\sec \frac{A}{2} \equiv \pm \sqrt{\frac{2 \tan A}{\tan A + \sin A}}$
38. $\csc \frac{A}{2} \equiv \pm \sqrt{\frac{2 \tan A}{\tan A - \sin A}}$
39. $\frac{1 - \cos 2x}{\tan x} \equiv \sin 2x$
40. $\frac{1 - \cos 2x}{\sin x} \equiv 2 \sin x$
41. $\cos 2A + \sin 2A \tan A \equiv 1$
42. $\frac{\sin 2A}{1 - \sin^2 A} - \tan A \equiv \tan A$
43. $\frac{\tan A - \sin A}{2 \tan A} \equiv \sin^2 \frac{A}{2}$
44. $\frac{\sin^3 A + \cos^3 A}{\sin A + \cos A} \equiv \frac{2 - \sin 2A}{2}$
45. $2 \cos x - 2 \cos^3 x \equiv \sin x \sin 2x$
46. $\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} \equiv \sec x$

$$47. \cos 2A \equiv \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$48. \tan \frac{A}{2} \equiv \csc A - \cot A$$

49. **Deportes.** Un golfista le pega a una pelota a un ángulo de inclinación de 35° con respecto a la horizontal. Si la velocidad inicial de la pelota es 125 ft/s, aproximando al pie más cercano, ¿qué distancia recorre la pelota en el aire? [Sugerencia: Refiérase al ejemplo 9].

50. **Ingeniería.** La figura muestra una vista parcial del domo de un estadio cuya altura es d y cuyo diámetro es D . Demuestre que el ángulo ϕ , que subtiende la parte del techo, que es de un arco circular, está relacionado con d y D según la ecuación $\sin \frac{\phi}{2} = \frac{2d}{D}$. ¿Cuál es el valor de ϕ aproximado a la décima de grado más cercana, cuando la altura del domo es 175 ft y el diámetro es 500 ft?



51. Suponer que $\sin A = 3/5$, con A en el cuadrante II y que $\cos B = 12/13$, con B en el cuadrante IV. Encontrar
 a) $\cos(A + B)$, b) $\cos(A - B)$, c) $\sin(A + B)$, d) $\sin(A - B)$, e) $\tan(A + B)$, y d) $\tan(A - B)$.

Verificar cada una de las identidades en los ejercicios 52-53.

$$52. \frac{\sin(A + B)}{\cos A \cos B} \equiv \tan A + \tan B$$

$$53. \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \equiv \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta}$$

Los ejercicios 54-55 muestran material de la próxima sección. Desarrollar cada función utilizando las fórmulas de esta sección.

$$54. y = A \cos B(x - c)$$

$$55. y = A \sin B(x + c)$$

En esta sección se desarrollan varias identidades para escribir el producto de las funciones seno y coseno como una suma o resta de tales funciones, y viceversa. Estas identidades son útiles para aplicaciones en el cálculo y para dibujar ciertas gráficas de funciones más complicadas. Éstas provienen directamente de las identidades para suma y diferencia de las funciones seno y coseno.

Identidades para productos

$$\sin A \cos B \equiv \frac{1}{2}[\sin(A + B) + \sin(A - B)]$$

$$\cos A \sin B \equiv \frac{1}{2}[\sin(A + B) - \sin(A - B)]$$

$$\cos A \cos B \equiv \frac{1}{2}[\cos(A + B) + \cos(A - B)]$$

$$\sin A \sin B \equiv -\frac{1}{2}[\cos(A + B) - \cos(A - B)]$$

Verificación de las identidades para productos

La primera de las identidades para productos se puede verificar si se suman los lados izquierdos y derechos de las identidades para $\sin(A + B)$ y $\sin(A - B)$.

$$\begin{aligned}\sin(A + B) &\equiv \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \sin(A - B) &\equiv \sin A \cos B - \cos A \sin B \\ \hline \sin(A + B) + \sin(A - B) &\equiv 2 \sin A \cos B\end{aligned}$$

Si se dividen los dos lados entre 2, se tiene que

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A + B) + \sin(A - B)].$$

Las tres identidades restantes se pueden demostrar de manera similar.

EJEMPLO 1 Expresar un producto como una suma

Expresar cada uno de los siguientes productos como una suma.

- a) $\sin 3x \cos x$

Utilizar la primera identidad relativa al producto con $A = 3x$ y $B = x$.

$$\begin{aligned}\sin 3x \cos x &\equiv \frac{1}{2}[\sin(3x + x) + \sin(3x - x)] \\ &\equiv \frac{1}{2}[\sin 4x + \sin 2x]\end{aligned}$$

Se pudo también haber usado la segunda identidad con $A = x$ y $B = 3x$.

$$\begin{aligned}\cos x \sin 3x &\equiv \frac{1}{2}[\sin(3x + x) - \sin(3x - x)] \\ &\equiv \frac{1}{2}[\sin 4x - \sin(-2x)]\end{aligned}$$

Ya que $\sin(-2x) = -\sin 2x$, las representaciones son idénticas.

- b) $\cos 2y \cos 5y$

Utilizar la tercera identidad relativa al producto con $A = 2y$ y $B = 5y$.

$$\begin{aligned}\cos 2y \cos 5y &\equiv \frac{1}{2}[\cos(5y + 2y) + \cos(5y - 2y)] \\ &\equiv \frac{1}{2}[\cos 7y + \cos(-3y)]\end{aligned}$$

Esto también se puede escribir como $\frac{1}{2}[\cos 7y + \cos 3y]$ ya que $\cos(-3y) \equiv \cos 3y$.

Las identidades relativas a productos también pueden ser usadas para evaluar funciones trigonométricas como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Evaluar una función trigonométrica

Evaluar $\sin 45^\circ \sin 15^\circ$ utilizando la identidad adecuada para productos.

Utilizar la cuarta identidad para productos con $A = 45^\circ$ y $B = 15^\circ$.

$$\begin{aligned}\sin \quad \sin &= -\frac{1}{2}[\cos (\quad) - \cos (\quad)] \\ &= -\frac{1}{2}[\cos 60^\circ - \cos 30^\circ]\end{aligned}$$

Ya que $\cos 30^\circ = \sqrt{\frac{3}{2}}$ y $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, esto se puede simplificar aún más.

$$\begin{aligned}\sin 45^\circ \sin 15^\circ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right] = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}\end{aligned}$$

Graficación

Recordar de la sección 6.7 que para graficar sumas o diferencias de las funciones seno y coseno se gráfica cada función separadamente y luego se suman sus ordenadas gráficamente. Por lo tanto, para graficar una función que es un producto de las funciones seno o coseno, primero utilizar una de las identidades relativas a productos para expresar la función como una suma o diferencia y luego utilizar los métodos de suma de ordenadas.

EJEMPLO 3

Graficar la función $y = 4 \sin x \cos^2 x$.

Primero escribir la función como $y = 2(2 \sin x \cos x) \cos x$, y después utilizar la fórmula de un ángulo doble $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ para escribir y en la forma

$$y = 2 \sin 2x \cos x.$$

Entonces, con la fórmula para $\sin A \cos B$, con $A = 2x$ y $B = x$, se tiene que

$$\begin{aligned}y &= 2 \cdot \frac{1}{2}[\sin(2x + x) + \sin(2x - x)] \\ &= \sin 3x + \sin x.\end{aligned}$$

Se gráfica $y = \sin 3x$ y $y = \sin x$ en el mismo sistema de coordenadas, y se suma sus ordenadas para obtener la gráfica de $y = \sin 3x + \sin x = 4 \sin x \cos^2 x$, como lo muestra la figura 8.

x	$\sin x$	$\sin 3x$	$\sin 3x + \sin x$
0	0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	0.5	1	1.5
$\frac{\pi}{3}$	0.866	0	0.866
$\frac{\pi}{2}$	1	-1	0
$\frac{2\pi}{3}$	0.866	0	0.866
$\frac{5\pi}{6}$	0.5	1	1.5
π	0	0	0

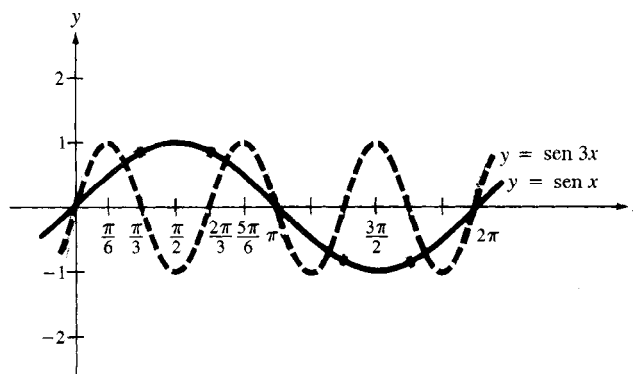


Figura 8

Deducción de las identidades para sumas

Las identidades para producto se pueden utilizar en la obtención de cuatro identidades para sumas. Supóngase que $A + B = C$ y que $A - B = D$. Si se despejan las dos variables A y B en este sistema de dos ecuaciones, se tiene que

$$A = \frac{C+D}{2} \quad \text{y} \quad B = \frac{C-D}{2}.$$

Si se sustituyen estos valores de A y B en la identidad para $\sin A \cos B$,

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \cos\left(\frac{C-D}{2}\right) &= \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{C+D}{2} + \frac{C-D}{2}\right) + \sin\left(\frac{C+D}{2} - \frac{C-D}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned} \sin C + \sin D &= 2 \sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \cos\left(\frac{C-D}{2}\right). \end{aligned}$$

Otras tres identidades más se pueden obtener de manera similar, y las cuatro se muestran a continuación.

Identidades para sumas

$$\begin{aligned} \sin C + \sin D &= 2 \sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \cos\left(\frac{C-D}{2}\right) \\ \sin C - \sin D &= 2 \cos\left(\frac{C+D}{2}\right) \sin\left(\frac{C-D}{2}\right) \\ \cos C + \cos D &= 2 \cos\left(\frac{C+D}{2}\right) \cos\left(\frac{C-D}{2}\right) \\ \cos C - \cos D &= -2 \sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \sin\left(\frac{C-D}{2}\right) \end{aligned}$$

EJEMPLO 4

Escribir cada una de las siguientes expresiones como un producto.

a) $\sin 2A - \sin 6A$

Utilizar la segunda identidad para sumas con $C = 2A$ y $D = 6A$.

$$\begin{aligned} \sin \quad - \sin &= 2 \cos\left(\frac{\quad}{2}\right) \sin\left(\frac{\quad}{2}\right) \\ &= 2 \cos 4A \sin(-2A) \\ &= -2 \cos 4A \sin 2A \end{aligned}$$

b) $\cos 2x - \cos x$

Utilizar la cuarta identidad para sumas con $C = 2x$ y $D = x$.

$$\cos \quad - \cos = -2 \sin\left(\frac{\quad}{2}\right) \sin\left(\frac{\quad}{2}\right)$$

$$= -2 \operatorname{sen} \frac{3x}{2} \operatorname{sen} \frac{x}{2}$$

EJEMPLO 5

Evaluar $\operatorname{sen} 105^\circ + \operatorname{sen} 195^\circ$ utilizando la identidad para sumas apropiadas.

Utilizar la primera identidad para sumas con $C = 105^\circ$ y $D = 195^\circ$.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} C + \operatorname{sen} D &= 2 \operatorname{sen} \left(\frac{C+D}{2} \right) \cos \left(\frac{C-D}{2} \right) \\ &= 2 \operatorname{sen} 150^\circ \cos (-45^\circ) \end{aligned}$$

ya que $\operatorname{sen} 150^\circ = \frac{1}{2}$ y $\cos (-45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, esto se puede simplificar aún más.

$$\operatorname{sen} 105^\circ + \operatorname{sen} 195^\circ = 2 \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

EJEMPLO 6

Verificar la identidad. $\frac{\cos 4x - \cos 6x}{\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 6x} \equiv \tan x$

Utilizar la cuarta y las primeras identidades relativas a sumas en el numerador y en el denominador del lado izquierdo.

$$\begin{aligned} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 6x} &\equiv \frac{-2 \operatorname{sen} \left(\frac{4x+6x}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{4x-6x}{2} \right)}{2 \operatorname{sen} \left(\frac{4x+6x}{2} \right) \cos \left(\frac{4x-6x}{2} \right)} \\ &\equiv \frac{-2 \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} (-x)}{2 \operatorname{sen} 5x \cos (-x)} \\ &\equiv -\frac{\operatorname{sen} (-x)}{\cos (-x)} \\ &\equiv -\frac{-\operatorname{sen} (x)}{\cos x} \\ &\equiv \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \equiv \tan x \end{aligned}$$

Obtención de la fórmula de reducción

Muchos problemas aplicados a la física (que involucran electricidad, calor, sistemas de masa-resorte, por ejemplo) pueden ser descritos por una función como

$$y = M \cos Bx + N \operatorname{sen} Bx.$$

Esta representación de y se puede transformar a la forma senoidal

$$y = A \cos B(x - C).$$

En esta forma, es más fácil determinar la amplitud, $|A|$, el periodo, $2\pi/B$, el defasamiento $|C|$, y la gráfica. Para poder establecer esta relación, supóngase que se empieza por desarrollar $\cos B(x - C) = \cos (Bx - BC)$, utilizando la fórmula para la diferencia de cosenos.

$$\begin{aligned} y &= A \cos (Bx - BC) = A[\cos Bx \cos BC + \operatorname{sen} Bx \operatorname{sen} BC] \\ &= A \cos BC \cos Bx + A \operatorname{sen} BC \operatorname{sen} Bx \end{aligned}$$

Para que y , expresada de esta forma sea igual a $M \cos Bx + N \operatorname{sen} Bx$,

$$A \cos BC = M \quad \text{y} \quad A \operatorname{sen} BC = N.$$

Si elevamos los dos lados al cuadrado nos da

$$A^2 \cos^2 BC = M^2 \quad \text{y} \quad A^2 \operatorname{sen}^2 BC = N^2.$$

Si se suma,

$$\begin{aligned} A^2 \cos^2 BC + A^2 \operatorname{sen}^2 BC &= M^2 + N^2 \\ A^2(\cos^2 BC + \operatorname{sen}^2 BC) &= M^2 + N^2 \\ A^2 &= M^2 + N^2 \\ A &= \sqrt{M^2 + N^2}. \end{aligned}$$

Además, al considerar razones se tiene que

$$\frac{N}{M} = \frac{A \operatorname{sen} BC}{A \cos BC} = \frac{\operatorname{sen} BC}{\cos BC} = \tan BC.$$

Con

$$\cos BC = \frac{M}{A} = \frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} BC = \frac{N}{A} = \frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2}},$$

el ángulo BC debe de ser tal que

$$\tan BC = \frac{N}{M}$$

y el punto (M, N) está en su lado terminal (véase la figura 9)

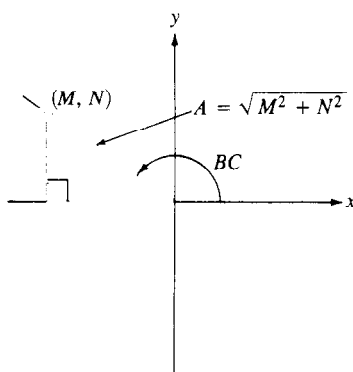


Figura 9

Estas observaciones se resumen en el teorema que sigue.

Fórmula de reducción

Si $y = M \cos Bx + N \sin Bx$, entonces y se puede representar por

$$y = A \cos B(x - C) = A \cos (Bx - BC)$$

en donde $A = \sqrt{M^2 + N^2}$, $\tan BC = N/M$ el punto (M, N) está en su lado terminal y BC es tal que $|BC|$ es lo más pequeño posible.


EJEMPLO 7

Expresar $y = \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x$ en la forma $y = A \cos B(x - C)$ y escribir su amplitud, periodo y defasamiento.

Ya que $M = 1$ y $N = \sqrt{3}$, se localiza el punto $(M, N) = (1, \sqrt{3})$ y se determina BC (véase la figura 10). Ya que $\tan BC = \sqrt{3}/1$, entonces BC es igual a $\pi/3$. Así mismo, ya que $A = \sqrt{M^2 + N^2}$, $A = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$. Entonces,

$$y = 2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right),$$

o
$$y = 2 \cos 2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right).$$

Por tanto, la amplitud es 2, el periodo es π y el defasamiento es $\pi/6$ hacia la derecha. 

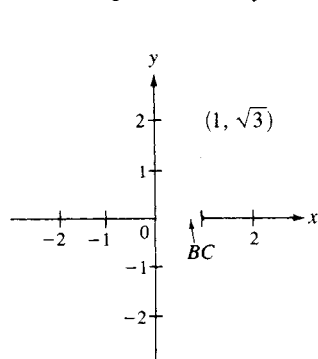


Figura 10

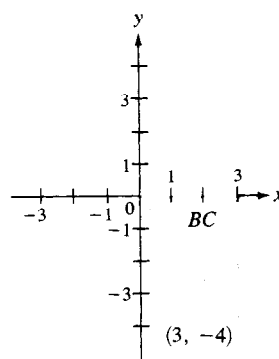


Figura 11

EJEMPLO 8

Expresar $y = 3 \cos 2\pi x - 4 \sin 2\pi x$ en la forma $y = A \cos B(x - C)$ y escribir su amplitud, periodo y defasamiento.

Ya que $M = 3$ y $N = -4$, se encuentra al punto $(M, N) = (3, -4)$ y determinamos BC (véase la figura 11). Entonces $A = \sqrt{M^2 + N^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$. Ya que

$$\tan BC = \frac{N}{M} = -\frac{4}{3} \approx -1.333,$$

si se utiliza una calculadora se encuentra que $BC = -0.927$ rad. Entonces

$$y = 5 \cos(2\pi x + 0.927),$$

$$y = 5 \cos 2\pi \left(x + \frac{0.927}{2\pi} \right).$$

o

La amplitud es 5, el periodo es 1, y el desfase es $0.927/2\pi \approx 0.148$ unidades hacia la izquierda.

EJEMPLO 9

Graficar la función $y = \sin 2x + \cos 2x$ con $M = N = 1$, $A = \sqrt{M^2 + N^2} = \sqrt{2}$.

Ya que $\tan BC = 1$ y $(M, N) = (1, 1)$ está en el primer cuadrante $BC = \pi/4$. Entonces

$$y = \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos 2 \left(x - \frac{\pi}{8} \right).$$

La gráfica se dio en la sección 6.7, ejemplo 4 (figura 53). En ese entonces se encontró la gráfica mediante la suma de ordenadas. Sin embargo, una vez que la función ha sido reducida a su forma senoidal, sería más fácil encontrar su gráfica teniendo por conocido que su amplitud es $\sqrt{2}$, el periodo π , y el desfase $\pi/8$ unidades hacia la derecha.

8.4. Ejercicios

En los ejercicios 1-6 expresar cada producto como una suma.

- | | | |
|-----------------------|------------------------|------------------------|
| 1. $\sin 2x \cos x$ | 2. $\cos 3y \sin 2y$ | 3. $2 \cos 4u \cos u$ |
| 4. $4 \sin v \sin 3v$ | 5. $4 \cos 3x \sin 4x$ | 6. $2 \sin 4y \cos 5y$ |

En los ejercicios 7-12 evaluar cada expresión con el uso de la identidad para productos apropiada.

- | | | |
|------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|
| 7. $\sin 75^\circ \cos 15^\circ$ | 8. $\cos 75^\circ \cos 15^\circ$ | 9. $\sin 15^\circ \sin 105^\circ$ |
| 10. $\cos 15^\circ \sin 105^\circ$ | 11. $2 \cos 105^\circ \cos 165^\circ$ | 12. $2 \sin 195^\circ \sin 75^\circ$ |

En los ejercicios 13-16 graficar cada función cambiándola a una suma y sumando las ordenadas.

- | | |
|-----------------------------|--|
| 13. $y = 2 \cos 2x \sin x$ | 14. $2 \cos x \sin 3x$ |
| 15. $y = 4 \sin^2 x \cos x$ | 16. $y = 2 \cos^2 x \sin x - 2 \sin^3 x$ |

En los ejercicios 17-22 escribir cada expresión como un producto.

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|------------------------|
| 17. $\sin 5x - \sin x$ | 18. $\sin 7y - \sin 3y$ | 19. $\cos 2u + \cos u$ |
| 20. $\sin 5v + \sin 2v$ | 21. $\cos 4x - \cos 3x$ | 22. $\cos y - \cos 3y$ |

En los ejercicios 23-28 evaluar cada expresión utilizando la identidad para sumas apropiadas.

- | | | |
|--------------------------------------|--|---|
| 23. $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$ | 24. $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$ | 25. $\cos 15^\circ + \cos 105^\circ$ |
| 26. $\sin 15^\circ - \sin 105^\circ$ | 27. $\frac{1}{2}[\cos 105^\circ - \cos 165^\circ]$ | 28. $\frac{1}{2}[\sin 195^\circ + \sin 75^\circ]$ |

En los ejercicios 29-34 expresar la función dada en la forma senoidal $y = A \cos B(x - C)$ y dar su amplitud, periodo y desfase.

- | | | |
|--|---|--------------------------------------|
| 29. $y = \cos x - \sin x$ | 30. $y = \cos x + \sin x$ | 31. $y = \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x$ |
| 32. $y = \sqrt{3} \cos \pi x + \sin \pi x$ | 33. $y = 4 \sin 2\pi x - 3 \cos 2\pi x$ | 34. $y = 12 \sin x + 5 \cos x$ |

En los ejercicios 35-38 reducir cada función a la forma senoidal y luego graficarla.

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 35. $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x$ | 36. $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ |
| 37. $y = \sin x + \cos x$ | 38. $y = \cos x - \sin x$ |

Verificar cada identidad en los ejercicios 39-46.

$$39. \frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x - \cos 3x} \equiv \cot x$$

$$40. \frac{\cos 3x - \cos 5x}{\sin 5x + \sin 3x} \equiv \tan x$$

$$41. \frac{\sin 8x + \sin 3x}{\cos 8x - \cos 3x} \equiv -\cot\left(\frac{5}{2}x\right)$$

$$42. \frac{\sin 8x - \sin 3x}{\cos 8x + \cos 3x} \equiv \tan\left(\frac{5}{2}x\right)$$

$$43. \frac{\cos x - \cos 3x}{\cos x + \cos 3x} \equiv \tan x \tan 2x$$

$$44. \frac{\sin x + \sin 3x}{\sin x - \sin 3x} \equiv -\cot x \tan 2x$$

$$45. \frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} \equiv \tan\left(\frac{x+y}{2}\right) \cot\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$46. \frac{\cos x - \cos y}{\cos x + \cos y} \equiv -\tan\left(\frac{x+y}{2}\right) \tan\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$47. \text{ Verificar la identidad para producto } \cos A \cos B \equiv \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)].$$

$$48. \text{ Verificar la identidad para producto } \sin A \sin B \equiv -\frac{1}{2}[\cos(A+B) - \cos(A-B)].$$

$$49. \text{ Verificar la identidad para suma } \cos C + \cos D \equiv 2 \cos\left(\frac{C+D}{2}\right) \cos\left(\frac{C-D}{2}\right).$$

$$50. \text{ Verificar la identidad para suma } \cos C - \cos D \equiv -2 \sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \sin\left(\frac{C-D}{2}\right).$$

En los ejercicios 51-52 utilizar una calculadora y verificar la identidad $\sin A \cos B \equiv \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]$, dados los valores de A y B .

$$51. A = 27^\circ 42' \text{ y } B = 171^\circ 31'$$

$$52. A = 0.413 \text{ y } B = 2.437$$

En los ejercicios 53-54 utilizar una calculadora y verificar la identidad $\sin C + \sin D \equiv 2 \sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$, dados los valores de C y D .

$$53. C = 1.305 \text{ y } D = 0.567$$

$$54. C = 123^\circ 52' \text{ y } D = 12^\circ 15'$$

55. Supóngase que $\cos A = -3/5$ con A en el cuadrante III. Encontrar a) $\sin 2A$, b) $\cos 2A$, c) $\tan 2A$ y d) el cuadrante en el cual se encuentra $2A$.

56. Supóngase que $\sin A = 12/13$ con A en el cuadrante II. Encontrar a) $\sin \frac{A}{2}$, b) $\cos \frac{A}{2}$, c) $\tan \frac{A}{2}$ y d) el cuadrante en el cual se encuentra $\frac{A}{2}$.

Naturaleza de las soluciones

Gran parte de trabajo desarrollado con la trigonometría se refiere a identidades, o sea, ecuaciones que son verdaderas para todos los valores de la variable. En esta sección se tomará en cuenta las ecuaciones condicionales; aquellas que son verdaderas sólo para ciertos valores de la variable. Una ecuación condicional que involucra una o más funciones trigonométricas se llama **ecuación trigonométrica**. Una **solución** de una ecuación trigonométrica es el valor de la variable (ángulo) que hace verdadera la ecuación. Por ejemplo, la ecuación

$$\operatorname{sen} x = 1$$

tiene como solución $x = 90^\circ$. Y además, cualquier otro ángulo que sea de la forma

$$90^\circ \pm k \cdot 360^\circ$$

también es una solución. Cuando se resuelven ecuaciones trigonométricas, se conviene en que sólo se especificarán las soluciones iguales o mayores que 0° y menores que 360° , ya que todas las soluciones también se

pueden dar en radianes. Por ejemplo, $x = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi$ son soluciones de la ecuación anterior.

Método de solución

A diferencia de otro tipo de ecuaciones, tales como las lineales, cuadráticas, con fracciones y ecuaciones con radicales, no existe ningún método de solución que sirva para todas las ecuaciones trigonométricas. Sin embargo, la regla que se da a continuación proporciona de algunos consejos que pueden ser útiles.

Para resolver una ecuación trigonométrica

1. Si se trata de una sola función de un solo ángulo, despeje la función y resuelva.
2. Si todos los términos se pueden agrupar en un solo lado de la ecuación y la expresión resultante se puede factorizar, haga cada factor igual a cero (con el uso de la regla del producto nulo y resuelva).
3. Si se presenta más de una función de una sola variable, utilice identidades para reescribir la expresión en términos de una sola función de una sola variable, después aplique el paso 1 o el paso 2 (si es posible).
4. Si se trata de varios ángulos, utilice las identidades para reescribir la función en términos de funciones de un solo ángulo, y después aplique los pasos 1, 2 o 3 (si es posible).

Los cuatro ejemplos que aparecen a continuación ilustran, en orden, estas cuatro recomendaciones.

EJEMPLO 1

Resolver $2 \cos A - 1 = 0$.

Ya que se tiene una sola función de un solo ángulo, se despeja $\cos A$.

$$\begin{aligned} 2 \cos A &= 1 \\ \cos A &= \frac{1}{2} = 0.5 \end{aligned}$$

Como $\cos A > 0$, el ángulo A está en el cuadrante I o en el cuadrante IV. Se debe poder reconocer que $A = 60^\circ$ es la solución en el cuadrante I, y que $A = 300^\circ$ es la solución en el cuadrante IV, ya que el ángulo de referencia de 300° es de 60° . Por lo tanto, las soluciones son 60° y 300° ; o en radianes, $\pi/3$ y $5\pi/3$.

EJEMPLO 2

Resolver $2 \operatorname{sen}^2 x = \sqrt{3} \operatorname{sen} x$.

Escribir todos los términos en el lado izquierdo de la ecuación y factorizar.

$$2 \operatorname{sen}^2 x - \sqrt{3} \operatorname{sen} x = 0$$

$$\operatorname{sen} x (2 \operatorname{sen} x - \sqrt{3}) = 0 \quad \text{Factorizar.}$$

Aplicar la regla del producto nulo

$$\operatorname{sen} x = 0 \quad \text{o} \quad 2 \operatorname{sen} x - \sqrt{3} = 0$$

$$2 \operatorname{sen} x = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Una vez más se debe reconocer inmediatamente que 0° y 180° son las soluciones de la primera ecuación. Ya que $\operatorname{sen} x = \sqrt{3}/2 > 0$, las soluciones de la segunda ecuación deben estar en los cuadrantes I y II. Se debe recordar que $\operatorname{sen} 60^\circ = \sqrt{3}/2$, de tal manera que 60° y 120° (con ángulo de referencia de 60°) son las otras dos soluciones. Así pues, las soluciones son 0° , 60° , 120° y 180° , o en radianes, 0 , $\pi/3$, $2\pi/3$, y π .

Si se hubiera dividido entre $\operatorname{sen} x$ en el ejemplo 2, dos de las soluciones, 0° y 180° , se hubieran perdido. *Nunca* dividir ambos lados de la ecuación entre una expresión que contenga a la variable.

EJEMPLO 3

Resolver $\cos^2 B - \operatorname{sen}^2 B - \operatorname{sen} B = 1$.

En este caso hay más de una función, pero una sola variable. Si se sustituye $1 - \operatorname{sen}^2 B$ en lugar de $\cos^2 B$, se tiene que

$$1 - \operatorname{sen}^2 B - \operatorname{sen}^2 B - \operatorname{sen} B = 1$$

$$-2 \operatorname{sen}^2 B - \operatorname{sen} B = 0.$$

$$\operatorname{sen} B (-2 \operatorname{sen} B - 1) = 0.$$

Si se factoriza

Igualé cada factor a cero.

$$\operatorname{sen} B = 0 \quad \text{o} \quad -2 \operatorname{sen} B - 1 = 0$$

$$-2 \operatorname{sen} B = 1$$

$$\operatorname{sen} B = -\frac{1}{2} = -0.5$$

Las soluciones de la primera ecuación son 0° y 180° . La segunda ecuación tiene soluciones en los cuadrantes III y IV, en donde la función de seno es negativa. Como el ángulo de referencia es 30° , el ángulo en el cuadrante III es 210° ($180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$) y el ángulo en el cuadrante IV es 330° ($360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$). Así pues, las soluciones son 0° , 180° , 210° , y 330° , o 0 , π , $7\pi/6$ y $11\pi/6$.

EJEMPLO 4

Resolver $\operatorname{sen} 2y + 2 \cos y = 0$.

Esta ecuación contiene dos ángulos diferentes, $2y$ y y . Primero se tiene que reescribir la ecuación con el uso de funciones de un solo ángulo. Si se sustituye $\operatorname{sen} 2y$ por $2 \operatorname{sen} y \cos y$,

Si se factoriza

$$2 \operatorname{sen} y \cos y + 2 \cos y = 0.$$

$$2 \cos y (\operatorname{sen} y + 1) = 0.$$

Se aplica la regla del producto nulo.

$$\begin{aligned} 2 \cos y &= 0 & \text{o} & & \sin y + 1 &= 0 \\ \cos y &= 0 & & & \sin y &= -1 \\ y &= \frac{\pi}{2} \text{ o } \frac{3\pi}{2} & & & y &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Las soluciones son $\pi/2$ y $3\pi/2$ o 90° y 270° .

EJEMPLO 5

Resolver $2 \sin^2 A = 1$.

Primero despejar $\sin A$.

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 A &= 1 \\ \sin^2 A &= \frac{1}{2} \\ \sin A &= \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Ya que $\sin A$ es positivo y negativo, las soluciones están en los cuatro cuadrantes. Los cuatro ángulos cuyo seno es $\sqrt{2}/2$ o $-\sqrt{2}/2$ son 45° , 135° , 225° y 315° o en radianes, $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$ y $7\pi/4$.

A veces una ecuación trigonométrica es cuadrática en una de las funciones trigonométricas. El método que se utiliza en estos casos se muestra en el ejemplo que aparece a continuación.

EJEMPLO 6

Resolver $3 \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0$.

El lado izquierdo de la ecuación la forma cuadrática

$$3u^2 + 2u - 1 = 0,$$

en donde $u = \cos x$. Si se factoriza, se tiene que

$$(3u - 1)(u + 1) = 0$$

lo que da

$$(3 \cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$$

al sustituir u por $\cos x$. Igualar cero cada factor y resolver.

$$\begin{aligned} 3 \cos x - 1 &= 0 & \text{o} & & \cos x + 1 &= 0 \\ 3 \cos x &= 1 & & & \cos x &= -1 \\ \cos x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Las soluciones de la primera ecuación están en los cuadrantes I y IV (en donde la función coseno es positiva). Ahora se necesita una calculadora.

$$\begin{aligned} \text{ALG: } & 1 \div 3 = \text{INV} \cos \rightarrow 70.528779 \\ \text{RPN: } & 1 \text{ ENTER } 3 \div \text{INV} \cos \rightarrow 70.528779 \end{aligned}$$

Aproximando al minuto más cercano, las soluciones son $70^\circ 32'$ y $289^\circ 28'$ o 1.2310 y 5.0522 rad. La única solución de la segunda ecuación es 180° o π rad.

EJEMPLO 7

Resolver $\sin x = 1 - \cos x$.

Primer método: Si se elevan al cuadrado los dos lados se puede escribir la ecuación sólo en términos de $\cos x$.

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= (1 - \cos x)^2 \\ \sin^2 x &= 1 - 2 \cos x + \cos^2 x \\ 1 - \cos^2 x &= 1 - 2 \cos x + \cos^2 x \\ 0 &= 2 \cos^2 x - 2 \cos x \\ 0 &= 2 \cos x (\cos x - 1) \\ 2 \cos x &= 0 \quad \text{o} \quad \cos x - 1 = 0 \\ \cos x &= 0 \quad \quad \quad \cos x = 1 \\ x &= 90^\circ, 270^\circ \quad \quad \quad x = 0^\circ\end{aligned}$$

Recordar que cuando se resuelven ecuaciones con radicales y se elevan al cuadrado los dos lados, pueden aparecer raíces extrañas, por lo que se deben comprobar todas las soluciones posibles. Es fácil verificar que 90° y 0° son correctas mientras que 270° no lo es. Por lo que 0° y 90° son las únicas dos soluciones.

Segundo método: Primero escribir la ecuación en la forma

$$\sin x + \cos x = 1,$$

y luego utilizar la fórmula de reducción dada en la sección 8.4 para escribir el lado izquierdo como

$$\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{o} \quad \sqrt{2} \cos (x - 45^\circ) \quad (\text{véase el ejercicio 37}). \text{ Así pues, se tiene que resolver.}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \cos (x - 45^\circ) &= 1 \\ \cos (x - 45^\circ) &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Las soluciones para $x - 45^\circ$ son 45° y 315° de tal manera que $x = 90^\circ$ y $x = 360^\circ$. Pero ya que se quiere que las soluciones sean iguales o mayores que 0° y menores que 360° , se utiliza 0° en vez de 360° . Con este método se evita el problema de raíces extrañas.

Las funciones trigonométricas que involucran a un solo factor de un múltiplo de un ángulo requieren de una consideración especial.

EJEMPLO 8

Resolver $2 \sin 3x = 1$.

Primero despeja $\sin 3x$.

$$\begin{aligned}2 \sin 3x &= 1 \\ \sin 3x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

En vez de tratar de escribir $\sin 3x$ en términos de funciones de x , primero se despeja $3x$. Para obtener todas las soluciones de x que satisfacen $0^\circ \leq x < 360^\circ$, se tienen que encontrar todas las soluciones de $3x$ que satisfacen a $0^\circ \leq 3x < 3(360)^\circ = 1\,080^\circ$. Ya que $\sin 3x = 1/2$,

$$3x = 30^\circ, 390^\circ, \text{ y } 750^\circ, \quad \text{ya que } \sin^{-1}(1/2) = 30^\circ$$

$$3x = 150^\circ, 510^\circ, \text{ y } 870^\circ. \quad \text{ya que } \sin^{-1}(1/2) = 150^\circ$$

Si se divide cada una de estas soluciones entre 3, se tiene que

$$x = 10^\circ, 50^\circ, 130^\circ, 170^\circ, 250^\circ, \text{ y } 290^\circ.$$

Algunas ecuaciones trigonométricas se pueden simplificar si se usa una de las identidades que involucran una de las factorizaciones que se presentan en la sección 8.4.

EJEMPLO 9

Resolver $\sin x - \sin 3x + \cos 2x = 0$.

Primero utilizar la identidad relativa a sumas en $\sin x - \sin 3x$.

$$\begin{aligned} \sin x - \sin 3x &\equiv 2 \cos \left(\frac{x + 3x}{2} \right) \sin \left(\frac{x - 3x}{2} \right) \\ &\equiv 2 \cos 2x \sin(-x) \\ &\equiv -2 \cos 2x \sin x \end{aligned}$$

Sustituir en la ecuación original.

$$\begin{aligned} -2 \cos 2x \sin x + \cos 2x &= 0 \\ \cos 2x(-2 \sin x + 1) &= 0 \\ \cos 2x = 0 \text{ or } -2 \sin x + 1 &= 0 \\ \sin x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La primera ecuación tiene soluciones para $2x$

$$90^\circ, 270^\circ, 450^\circ \text{ y } 630^\circ.$$

Para encontrar los valores de x , divida cada uno de éstos entre 2. Las soluciones para la segunda ecuación son 30° y 150° . Por tanto, todas las soluciones son $30^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ y 225° y 315° .

Se concluye este capítulo con el segundo problema de aplicación que aparece en la introducción al mismo.

EJEMPLO 10

Hidrología

Un proyecto para la desviación de agua del río Colorado en Arizona utiliza un canal en forma de un trapecioide isósceles que es más ancho en la parte de arriba que en la base. Si la parte inferior y los dos lados

del canal miden 8 yd y θ es el ángulo agudo que se forma entre un lado del canal y el nivel del piso, demostrar que el área transversal del canal que determina la capacidad de flujo, están dada por

$$A = 64 \sin \theta (1 + \cos \theta).$$

Utilizar esta fórmula para encontrar θ cuando $A = 48\sqrt{3} \text{ ft}^2$. El dibujo de la figura 12 muestra una vista parcial del canal.

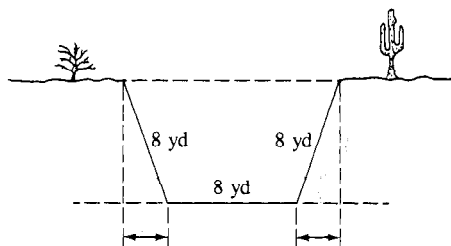


Figura 12

Si se utiliza las variables de la figura 12, el área de la sección transversal del trapecioide es

$$A = ab - 2\left(\frac{1}{2}bc\right) = ab - bc = b(a - c),$$

en donde $\frac{1}{2}bc$ es el área de cada uno de los triángulos. Así mismo,

$$a = 8 + 2c,$$

$$b = 8 \sin \theta,$$

y

$$c = 8 \cos \theta.$$

Por tanto,

$$a = 8 + 2c = 8 + 16 \cos \theta.$$

Si se sustituye en la ecuación,

$$\begin{aligned} A &= b(a - c) \\ &= 8 \sin \theta (8 + 16 \cos \theta - 8 \cos \theta) \\ &= 8 \sin \theta (8 + 8 \cos \theta) \\ &= 64 \sin \theta (1 + \cos \theta). \end{aligned}$$

Sea $A = 48\sqrt{3}$ y despejar θ .

$$\begin{aligned} 48\sqrt{3} &= 64 \sin \theta (1 + \cos \theta) \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} &= \sin \theta (1 + \cos \theta) \end{aligned}$$

Elevar al cuadrado ambos lados.

$$\frac{27}{16} = \sin^2 \theta (1 + \cos \theta)^2$$

$$\frac{27}{16} = \sec^2 \theta (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta)$$

$$\frac{27}{16} = (1 - \cos^2 \theta)(1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta)$$

Después de multiplicar y agrupar los términos semejantes esto se reduce a

$$16 \cos^4 x + 32 \cos^3 x - 32 \cos x + 11 = 0,$$

que es la ecuación polinomial en donde $u = \cos x$ dada por

$$16u^4 + 32u^3 - 32u + 11 = 0.$$

Las soluciones posibles de números racionales para esta ecuación son de la forma p/q en donde q divide a 16 y p divide a 11. Ya que u es $\cos x$ y solamente interesan las soluciones para x entre 0° y 90° (x es un ángulo agudo), sólo aquellos valores de p/q que son positivos y menores que 1 se necesitan tomar en cuenta. Estas posibilidades son: $11/16$, $1/16$, $1/8$, $1/4$ y $1/2$. Si se utiliza división sintética es fácil demostrar que $1/2$ es la única solución racional. De hecho, $1/2$ es una raíz doble y la única solución real. Por lo que, $u = \cos \theta = 1/2$ lo que significa que $\theta = 60^\circ$.

8.5. Ejercicios

En los ejercicios 1-50 resolver cada ecuación. En los ejercicios 1-20 de todas las soluciones que sean iguales o mayores que 0 y menores que 2π . En los ejercicios 21-50 de todas las soluciones que sean iguales o mayores que 0° y menores que 360° . En donde sea apropiado, aproximar las respuestas al minuto más cercano.

1. $2 \sin A - 1 = 0$
2. $2 \cos A + \sqrt{3} = 0$
3. $\tan x - \sqrt{3} = 0$
4. $\csc B + \sqrt{2} = 0$
5. $2 \cos^2 y = \sqrt{3} \cos y$
6. $\tan^2 y - \tan y = 0$
7. $\sin^2 x - \cos^2 x - \cos x = 1$
8. $\tan^2 x + 2 \sec^2 x - 3 = 0$
9. $\sin 2B + 2 \sin B = 0$
10. $\cos 2B - \cos B = 0$
11. $\tan^2 A - 1 = 0$
12. $3 \csc^2 A - 4 = 0$
13. $2 \sin^2 B + \sin B - 1 = 0$
14. $2 \cos^2 B - 3 \cos B + 1 = 0$
15. $4 \cos^2 y + 3 \cos y - 1 = 0$
16. $5 \sin^2 y + 4 \sin y - 1 = 0$
17. $\cos 2A + \sin^2 A = 1$
18. $\cos 2A - 2 = 3 \sin A$
19. $\cos^4 x = \sin^2 x + 1$
20. $\sin^4 x = \cos^2 x - 1$
21. $2 \cos (B - 90^\circ) = \sin^2 B + \cos^2 B$
22. $2 \sin (B + 90^\circ) = \sec^2 B - \tan^2 B$
23. $2 \cos A \sin A - \cos^2 A \sin A = 0$
24. $\sin^2 A \cos A + \sin A \cos A = 0$
25. $\csc x = 1 - \cot x$
26. $\sin x = 1 + \cos x$
27. $\sin 2B = \frac{1}{2}$
28. $2 \cos 2B = \sqrt{3}$
29. $\cot 3y = -1$
30. $2 \sin 3y = -\sqrt{3}$
31. $\cos^2 3A - 3 \cos 3A + 2 = 0$
32. $\sin^2 4A + 3 \sin 4A - 4 = 0$
33. $2 + \sin x = 2.5640$
34. $4 - \cos x = 4.5664$
35. $4 \sin B \cos B = 1$
36. $2 \cos^2 B = 2 \sin^2 B + 1$
37. $\sin 3y + \sin 5y = 0$
38. $\cos 3y - \cos y = 0$

$$39. 2 \sin\left(\frac{3A}{2}\right) \cos\left(\frac{A}{2}\right) = \sin A$$

$$41. \sin 4x = -\sin 2x$$

$$43. 2 \cos^3 B + \cos^2 B - 2 \cos B - 1 = 0$$

$$45. 2 \sin^2 y = 5 - 2 \cos^2 y$$

$$47. 12 \cos^2 A + 13 \cos A + 3 = 0$$

$$49. 2 \tan^2 x - 9 \tan x - 5 = 0$$

$$40. 2 \cos\left(\frac{3A}{2}\right) \cos\left(\frac{A}{2}\right) = \cos 2A$$

$$42. \cos 9x = -\cos 3x$$

$$44. 2 \sin^3 B - \sin^2 B - 2 \sin B + 1 = 0$$

$$46. 3 \csc^2 y + 1 = 3 \cot^2 y$$

$$48. 12 \sin^2 A - 5 \sin A - 2 = 0$$

$$50. 3 \sec^2 x + 5 \sec x - 12 = 0$$

51. **Cálculo.** Con el uso de una técnica que se desarrolló en el cálculo, un ingeniero podría obtener la ecuación $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + \cos \theta = 0$ de la fórmula $A = 64 \sin \theta(1 + \cos \theta)$, que nos da el área transversal del canal descrito en el ejemplo 10. La solución de esta ecuación da el valor de θ que determina la capacidad máxima del canal. Encontrar este valor de θ .

52. **Física.** El movimiento en un sistema de masa-resorte está descrito por $y = 4 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, en donde t es el tiempo en segundos. Los tiempos en el que peso pasa por el punto de equilibrio ocurren cuando $y = 0$. Encontrar todos estos tiempos t , de tal manera que $0 \leq t \leq 2$.

53. **Electrónica.** Un generador produce corriente alterna de acuerdo con la ecuación $I = 40 \sin 120\pi t$, en donde t es el tiempo en segundos e I es la corriente en amperes. ¿Cuál es el valor más pequeño de t para el que $I = 20$?

54. **Negocios.** Las ventas semanales de miles de artículos de un producto que tiene un récord de ventas en la temporada se aproxima por $n = 65.25 + 30.0 \sin \frac{\pi t}{26}$, en donde t es el tiempo en semanas con $t = 1$ correspondiente a la primera semana del año. ¿Durante cuáles dos semanas es la venta igual a 72 500 artículos?

55. Expresar $2 \cos 6x \sin 2x$ como una suma.

56. Expresar $\sin 7x + \sin x$ como un producto.

57. Expresar $y = -\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x$ en la forma senoidal $y = A \cos B(x - C)$ y escribir su amplitud, período y defasamiento.

58. Verificar la identidad $\frac{\cos 7x - \cos x}{\sin 7x + \sin x} = -\tan 3x$.

En la próxima sección se estudiarán las funciones trigonométricas inversas. Como repaso de las funciones inversas, encontrar la inversa de cada una de las funciones en los ejercicios 59-60.

$$59. f(x) = 5x - 3$$

$$60. f(x) = \sqrt{x + 3}$$

En la sección 3.5 se introdujo la notación para la inversa de una función. Recordar que para que una función tenga una inversa, la función debe ser uno a uno de su dominio. Una función f es uno a uno si cada uno de los elementos en la imagen de f tiene uno y sólo un elemento correspondiente en el dominio. Ya que las funciones trigonométricas son periódicas, no son uno a uno y no pueden tener función inversa que cumpla esa condición. Por ejemplo, como

$$\sin 0 = 0 \quad \text{y} \quad \sin \pi = 0,$$

dos números en el dominio de la función seno (0 y π) corresponden al mismo número 0 en la imagen. Sin embargo, es posible imponer una restricción en el dominio de cada función trigonométrica para que en este intervalo la función restringida sea uno a uno y sí tenga función inversa. Estas funciones inversas, llamadas funciones trigonométricas inversas, se estudian por separado, empezando por la *función inversa del seno*.

Inversa del seno

Recordar que la gráfica de la inversa de una función se puede obtener si se refleja la gráfica de la función dada con respecto a la recta $y = x$. Considerar la gráfica de la función de seno $y = \sin x$ de la figura 13. Si se refleja con respecto a la línea $y = x$, esto es, si se gráfica al punto (b, a) para cada punto (a, b) , se obtiene la gráfica de la figura 14.

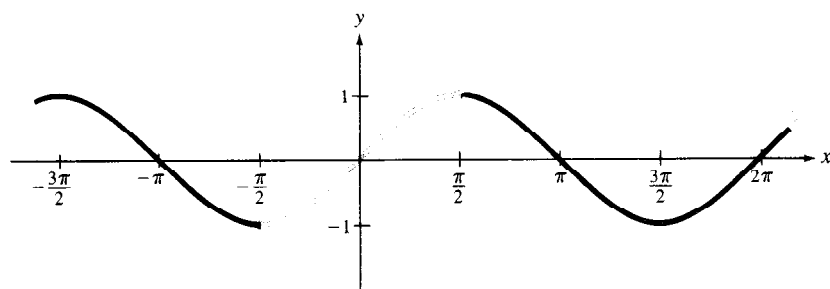


Figura 13. Función seno.

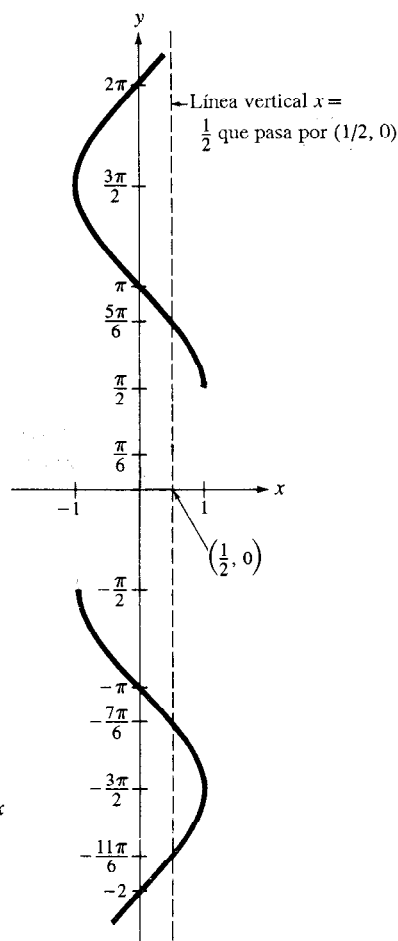


Figura 14. Inversa del seno

La gráfica resultante *no* es la gráfica de una función, ya que un valor de x entre -1 y 1 corresponde a muchos valores de y . Por ejemplo, una recta vertical a través de $(\frac{1}{2}, 0)$ corta la gráfica en un número infinito de puntos, cuatro de los cuales son

$$y \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{6}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{7\pi}{6}\right), \quad y \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{11\pi}{6}\right).$$

Sin embargo, se restringe el dominio de la función seno en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. La gráfica de esta función seno restringida es la curva en color de la figura 13, y la gráfica correspondiente que se muestra en color en la figura 14, es ahora la gráfica de la función con dominio $[-1, 1]$.

Inversa de la función seno

La inversa de la función de seno (ángulo cuyo seno es), denotada por sen^{-1} o por arcsen , está dada por

$$y = \text{sen}^{-1} x \text{ si y sólo si } x = \text{sen } y \quad y \quad y \text{ satisface } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

El dominio de sen^{-1} es el intervalo cerrado $[-1, 1]$ y su imagen es el intervalo cerrado

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

La notación $\text{sen}^{-1} x$ no debe ser confundida con la notación exponencial; es la notación para la función (recuérdese que se usa f^{-1} para la inversa de f). La notación arcsen se origina del círculo unitario, ya que $\text{arcsen } x$ es el "arco" en el círculo cuyo seno es x . Aunque el dominio y la imagen de la función sen^{-1} son conjuntos de números reales, a veces pensamos en $\text{sen}^{-1} x$ como "el ángulo cuyo seno es x ." Por supuesto, no hay problema en pensar de esta manera, ya que la imagen de sen^{-1} se puede considerar como ángulos medidos en radianes. De hecho, cuando sea apropiado, se puede considerar a la imagen como ángulos medidos en grados.

Ya se han mostrado el uso de las teclas de una calculadora $\boxed{\text{sen}^{-1}}$ o $\boxed{\text{INV}} \boxed{\text{sen}}$ o $\boxed{\text{ARC}} \boxed{\text{sen}}$, y ahora la razón para esta notación debe ser obvia.

EJEMPLO 1

Evaluar las expresiones que aparecen a continuación.

a) $\text{sen}^{-1} \frac{1}{2}$

Recordar que $\text{sen}^{-1} \frac{1}{2}$ representa "el número entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ cuyo seno es $\frac{1}{2}$." Esto, si $x = \text{sen}^{-1} \frac{1}{2}$, entonces $\text{sen } x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{\pi}{6}$. Recordar que hay infinidad de números (ángulos) cuyo seno es $\frac{1}{2}$ ($\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}$, y así consecutivamente), pero sólo $\frac{\pi}{6}$ está en la imagen de la inversa de la función seno (en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$).

b) $\text{arcsen} \frac{\sqrt{2}}{2}$

El número en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cuyo seno es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ es $\frac{\pi}{4}$. Por tanto,

$$\text{arcsen} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Sen $\frac{3\pi}{4}$ también es $\frac{\sqrt{2}}{2}$, pero $\frac{3\pi}{4}$ no está en la imagen de la inversa de la función seno.

c) $\text{sen}^{-1}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Tener cuidado con una expresión como ésta, ya que es fácil confundirse y encontrar en su lugar $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Se utiliza una calculadora puesta en modo de radianes para evaluar $\text{sen}^{-1}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ como se muestra a continuación.

ALG: $\boxed{\pi} \boxed{\div} 4 \boxed{+/-} \boxed{=} \boxed{\text{INV}} \boxed{\text{sen}} \rightarrow \boxed{-0.9033391}$

RPN: $\boxed{\pi} 4 \boxed{\div} \boxed{\text{CHS}} \boxed{\text{INV}} \boxed{\text{sen}} \rightarrow \boxed{-0.9033391}$.

Así pues, el número cuyo seno es $-\frac{\pi}{4}$ es aproximadamente -0.9033 , aproximado a cuatro cifras decimales. Por tanto,

$$\text{sen}^{-1}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \approx -0.9033.$$

d) $\arcsen(0.2153)$

ALG & RPN: $0.2153 \boxed{\text{INV}} \boxed{\sin} \rightarrow \boxed{0.216999}$.

Así pues, $\arcsen(0.2153) \approx 0.2170$.

Recordar que para las funciones mutuamente inversas, f y f^{-1} ,

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = x.$$

Por tanto, para las funciones seno y la inversa del seno,

$$\text{sen}(\text{sen}^{-1}(x)) = x \quad \text{y} \quad \text{sen}^{-1}(\text{sen}(x)) = x.$$

Si se usa la notación alterna estas identidades se convierten en

$$\text{sen}(\arcsen(x)) = x \quad \text{y} \quad \arcsen(\text{sen}(x)) = x.$$

EJEMPLO 2

Evaluar las siguientes expresiones.

a) $\text{sen}(\text{sen}^{-1} 0.5)$

Ya que 0.5 satisface $-1 \leq 0.5 \leq 1$, al usar la identidad dada anteriormente,

$$\text{sen}(\text{sen}^{-1} 0.5) = 0.5.$$

b) $\arcsen\left(\text{sen} \frac{5\pi}{4}\right)$

Ya que $\frac{5\pi}{4}$ no está entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, no se puede usar la identidad anterior. Sin embargo, como $\sin -\frac{5\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, y $-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$,

$$\arcsen\left(\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \arcsen\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

También se puede hacer esto si primero se escribe $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\arcsen\left(\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \arcsen\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

Se puede usar una calculadora para hacer estos problemas.

ALG: 5 \times π \div 4 $=$ \sin INV \sin \rightarrow -0.7853982

RPN: 5 ENTER π \times 4 \div \sin INV \sin \rightarrow -0.7853982

La pantalla muestra una aproximación $-\frac{\pi}{4}$.

c) $\sin^{-1}\left(\cot\frac{3\pi}{4}\right)$

Ya que $\cot\frac{3\pi}{4} = -1$, se tiene que

$$\sin^{-1}\left(\cot\frac{3\pi}{4}\right) = \sin^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

d) $\tan\left(\arcsen\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

Ya que $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, $\arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$. Así pues,

$$\tan\left(\arcsen\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Con una calculadora,

ALG: 1 \div 2 $+/-$ $=$ INV \sin \tan \rightarrow -0.5773503

RPN: 1 ENTER 2 \div CHS INV \sin \tan \rightarrow -0.5773503

La pantalla muestra una aproximación de $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Inversa del coseno

Para definir la inversa de la función coseno, se tiene que restringir el dominio a un intervalo en donde $y = \cos x$ sea uno a uno. El intervalo que se escogió es $[0, \pi]$. La gráfica de $y = \cos x$ aparece en la figura 15 con la porción restringida en color. Al reflejar esta gráfica con respecto a la recta $y = x$ se obtiene la

gráfica de la relación inversa como en la figura 16, en donde la porción en color muestra la gráfica de la inversa de la función coseno.

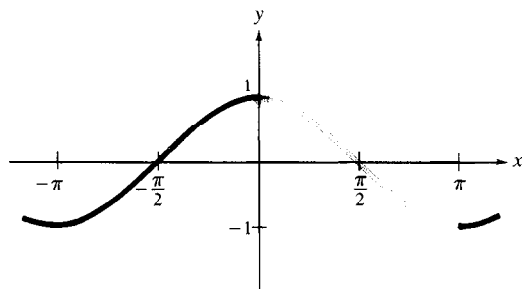


Figura 15

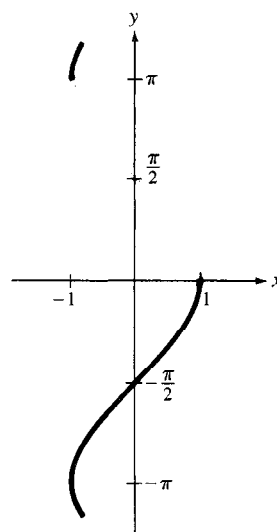


Figura 16

Inversa de la función coseno

La inversa de la función coseno (ángulo cuyo coseno es), denotada por \cos^{-1} o arcos, está dada por

$$y = \cos^{-1} x \text{ si y sólo si } x = \cos y \text{ y satisface } 0 \leq y \leq \pi.$$

El dominio de \cos^{-1} es el intervalo cerrado $[-1, 1]$ y su imagen es el intervalo cerrado $[0, \pi]$.

Así como para las funciones seno y su inversa, las siguientes son identidades:

$$\begin{aligned} \cos(\cos^{-1} x) &= x, \text{ para } -1 \leq x \leq 1 \\ \cos^{-1}(\cos x) &= x, \text{ para } 0 \leq x \leq \pi \end{aligned}$$

EJEMPLO 3

Evaluar las siguientes expresiones.

a) $\cos^{-1} \frac{1}{2}$

Si $x = \cos^{-1} \frac{1}{2}$, esto es equivalente a $\cos x = \frac{1}{2}$ en donde, por definición, $0 \leq x \leq \pi$. Por lo que, $x = \frac{\pi}{3}$ y $\cos^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

b) $\cos^{-1} \frac{\pi}{6}$

No confundirse al leer esto como $\cos \frac{\pi}{6}$. Utilizar una calculadora puesta en el modo de radianes.

$$\text{ALG: } \boxed{\pi} \boxed{\div} \boxed{6} \boxed{=} \boxed{\text{INV}} \boxed{\cos} \rightarrow \boxed{1.0197267}$$

$$\text{RPN: } \boxed{\pi} \boxed{6} \boxed{\div} \boxed{\text{INV}} \boxed{\cos} \rightarrow \boxed{1.0197267}$$

Por lo que el numerador cuyo coseno es $\frac{\pi}{6}$ es aproximadamente 1.0197, aproximado a cuatro cifras decimales. Así pues,

$$\cos^{-1} \frac{\pi}{6} \approx 1.0197.$$

c) $\cos (\cos^{-1} 0.2515)$

Ya que 0.2515 satisface $-1 \leq 0.2515 \leq 1$, si se usa la identidad anterior,

$$\cos (\cos^{-1} 0.2515) = 0.2515.$$

d) $\arccos \left(\cos \frac{3\pi}{2} \right)$

Ya que $\frac{3\pi}{2}$ no está entre 0 y π , la identidad anterior no se aplica. Sin embargo, ya que $\cos \frac{3\pi}{2} = \cos \frac{\pi}{2}$ y $0 \leq \frac{\pi}{2} \leq \pi$,

$$\arccos \left(\cos \frac{3\pi}{2} \right) = \arccos \left(\cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Con una calculadora,

$$\text{ALG: } 3 \boxed{\times} \boxed{\pi} \boxed{\div} 2 \boxed{-} \boxed{\cos} \boxed{\text{INV}} \boxed{\cos} \rightarrow \boxed{1.5707963}$$

$$\text{RPN: } 3 \boxed{\text{ENTER}} \boxed{\pi} \boxed{\times} 2 \boxed{\div} \boxed{\cos} \boxed{\text{INV}} \boxed{\cos} \rightarrow \boxed{1.5707963}$$

La pantalla muestra una aproximación de $\frac{\pi}{2}$.

e) $\cos^{-1} \left(\tan \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right)$

Con una calculadora,

$$\text{ALG: } 5 \boxed{\times} \boxed{\pi} \boxed{\div} 6 \boxed{+/-} \boxed{=} \boxed{\tan} \boxed{\text{INV}} \boxed{\cos} \rightarrow \boxed{0.9553166}$$

$$\text{RPN: } 5 \boxed{\text{ENTER}} \boxed{\pi} \boxed{\times} 6 \boxed{\div} \boxed{\text{CHS}} \boxed{\tan} \boxed{\text{INV}} \boxed{\cos} \rightarrow \boxed{0.9553166}$$

la pantalla muestra una aproximación de $\cos^{-1} \left(\tan \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right)$ como 0.9553, aproximado a cuatro cifras decimales.

Inversa de la tangente

Si se restringe el dominio de la función tangente al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, se obtiene una función uno a uno que tiene inversa. La gráfica de $y = \tan x$ se muestra en la figura 17, en donde la porción en color es la parte restringida. Si se refleja esta gráfica con respecto a la recta $y = x$, esto da la relación inversa que se muestra en la figura 18, en donde la porción en color muestra la gráfica de la inversa de la función tangente.

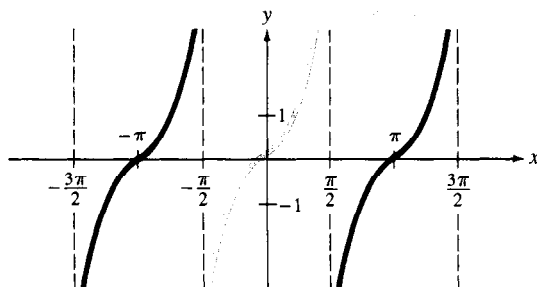


Figura 17

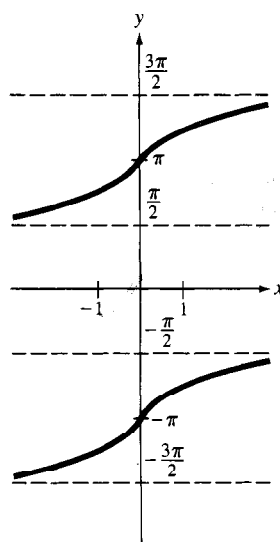


Figura 18

Inversa de la función tangente

La **inversa de la función tangente** (ángulo cuya tangente es), denotada por \tan^{-1} o \arctan , está dada por

$$y = \tan^{-1} x \text{ si y sólo si } x = \tan y \text{ y satisface } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

El dominio de \tan^{-1} es todo el conjunto de los números reales y su imagen es el intervalo abierto $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Las identidades para la inversa de la tangente son:

$$\begin{aligned} \tan(\tan^{-1} x) &= x \text{ para cualquier número real } x \\ \tan^{-1}(\tan x) &= x \text{ para } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 4

Evaluar las siguientes expresiones.

a) $\tan^{-1}(-1)$

Si $x = \tan^{-1}(-1)$, esto es equivalente a $\tan x = -1$, en donde por definición $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Por lo que $x = -\frac{\pi}{4}$ y $\tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

b) $\sin\left(\arctan \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Si $x = \arctan \frac{\sqrt{3}}{3}$, entonces $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ en donde $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, y $x = \frac{\pi}{6}$. Ya que $\sec \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sec \left(\arctan \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Se puede verificar esto con el uso de una calculadora.

ALG: 3 $\sqrt{}$ \div 3 $=$ INV tan sen \rightarrow 0.5
 RPN: 3 $\sqrt{}$ 3 \div INV tan sen \rightarrow 0.5

c) $\tan^{-1} \left(\sec \frac{\pi}{6} \right)$

Con el uso de una calculadora,

ALG: π \div 6 $=$ cos 1/x INV tan \rightarrow 0.8570719
 RPN: π 6 \div cos 1/x INV tan \rightarrow 0.8570719

La pantalla muestra una aproximación de $\tan^{-1} \left(\sec \frac{\pi}{6} \right)$ como 0.8571, aproximado a cuatro cifras decimales.

Las tres funciones trigonométricas restantes pueden tener inversa que se definen de manera similar. Sin embargo, no tienen un gran uso y no hay un acuerdo general sobre los dominios de la inversa de las funciones secante y cosecante. Una posibilidad para cada una aparece en los ejercicios 64-66.

Algunas expresiones pueden ser evaluadas mediante una técnica que no requiere el uso de una calculadora. Esto se muestra en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 5

Sin usar calculadora, evaluar $\sin \left(\arccos \frac{4}{5} \right)$.

Primero dibuje un triángulo rectángulo como el de la figura 19 y llámelo de tal manera que uno de sus ángulos agudos, digamos A , tenga coseno $4/5$. Así pues,

$$\arccos \frac{4}{5} = A.$$

Mediante el uso del teorema de Pitágoras, se tiene que el lado $a = 3$. Así,

$$\sin \left(\arccos \frac{4}{5} \right) = \sin A = \frac{3}{5}.$$

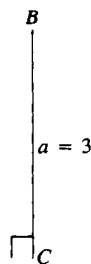


Figura 19

EJEMPLO 6

Simplificar $\cos(\tan^{-1} x)$.

Sea $A = \tan^{-1} x$, dibujar un triángulo como el de la figura 20 en el cual $\tan A = x = \frac{x}{1}$. Por el teorema de Pitágoras,

$$c^2 = 1^2 + x^2$$

$$c = \sqrt{1 + x^2}.$$

Por lo que,

$$\cos(\tan^{-1} x) = \cos A = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

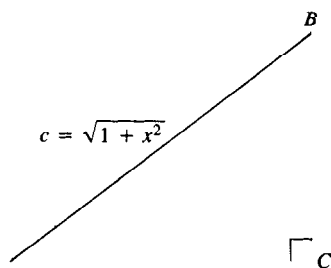


Figura 20

En algunos problemas de aplicación, se necesita aplicar las fórmulas de suma, resta, semiángulo o ángulo doble.

EJEMPLO 7

Evaluar $\sin[\arctan 1/2 + \arcsen 4/5]$.

Sea $A = \arctan 1/2$ y $B = \arcsen 4/5$. Entonces

$$\begin{aligned} \sin\left[\arctan \frac{1}{2} + \arcsen \frac{4}{5}\right] &= \sin[A + B] \\ &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \end{aligned}$$

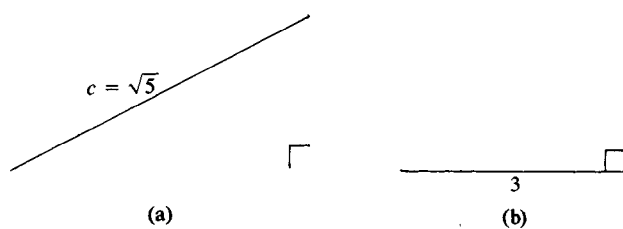


Figura 21

De la figura 21 a) y 21 b), $\sin A = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos B = \frac{3}{5}$, $\cos A = \frac{2}{\sqrt{5}}$ y $\sin B = \frac{4}{5}$. Si se sustituye,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left[\arctan \frac{1}{2} + \operatorname{arcsen} \frac{4}{5}\right] &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{3}{5\sqrt{5}} + \frac{8}{5\sqrt{5}} = \frac{11}{5\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{25}.\end{aligned}$$

8.6. Ejercicios

En los ejercicios 1-30 evaluar cada una de las expresiones.

1. $\operatorname{arcsen} \frac{1}{2}$
2. $\arccos \frac{1}{2}$
3. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
4. $\tan^{-1} 1$
5. $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
6. $\cos^{-1}(\sqrt{3})$
7. $\operatorname{arcsen} \sqrt{3}$
8. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
9. $\tan^{-1} \sqrt{3}$
10. $\arctan(-\sqrt{3})$
11. $\operatorname{sen}^{-1} \frac{\pi}{6}$
12. $\cos^{-1} \frac{\pi}{6}$
13. $\arccos(0.7254)$
14. $\arctan(0.7254)$
15. $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
16. $\cos\left(\cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
17. $\tan(\tan^{-1} \sqrt{3})$
18. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\sin \frac{7\pi}{6}\right)$
19. $\cos^{-1}\left(\cos \frac{7\pi}{6}\right)$
20. $\tan^{-1}\left(\tan \frac{7\pi}{6}\right)$
21. $\operatorname{sen}(\cos^{-1} 0.4251)$
22. $\cos(\tan^{-1} 5)$
23. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\sin \frac{\pi}{3}\right)$
24. $\tan^{-1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$
25. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\csc \frac{\pi}{4}\right)$
26. $\cos^{-1}\left(\sec\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right)$
27. $\cot(\operatorname{sen}^{-1} 0.4556)$
28. $\sec(\tan^{-1} 2.4560)$
29. $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{arcsen} 0.1135)$
30. $\cos^{-1}(\arccos 0.7885)$

Sin el uso de una calculadora, evaluar cada una de las expresiones en los ejercicios 31-49.

31. $\cos\left(\operatorname{arcsen} \frac{4}{5}\right)$
32. $\operatorname{sen}\left(\arccos \frac{3}{5}\right)$
33. $\tan\left(\operatorname{arcsen} \frac{3}{5}\right)$
34. $\tan\left(\arccos \frac{4}{5}\right)$
35. $\cos\left(\operatorname{arcsen}\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$
36. $\operatorname{sen}\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$
37. $\operatorname{sen}\left(\arccos \frac{1}{3}\right)$
38. $\cos(\arctan 2)$
39. $\tan\left(\operatorname{arcsen} \frac{1}{2}\right)$
40. $\operatorname{sen}\left[2 \arccos \frac{3}{5}\right]$
41. $\cos\left[2 \operatorname{arcsen} \frac{3}{5}\right]$
42. $\tan\left[2 \arccos \frac{3}{5}\right]$
43. $\cos\left[\frac{1}{2} \operatorname{arcsen} \frac{1}{2}\right]$
44. $\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2}\right]$
45. $\tan\left[\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2}\right]$
46. $\operatorname{sen}\left[\arccos \frac{1}{2} + \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
47. $\operatorname{sen}\left[\arccos \frac{1}{2} - \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
48. $\operatorname{sen}\left[\arctan \frac{4}{3} + \arccos \frac{4}{5}\right]$
49. $\cos\left[\arctan \frac{4}{3} - \operatorname{arcsen} \frac{3}{5}\right]$

Simplificar cada una de las expresiones de los ejercicios 50-55.

50. $\operatorname{sen}(\cos^{-1} x)$
51. $\operatorname{sen}(\arctan x)$
52. $\tan(\operatorname{sen}^{-1} x)$
53. $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x)$
54. $\cos(\tan^{-1} x)$
55. $\tan(\cos^{-1} x)$

Verificar las identidades en los ejercicios 56-59.

56. $\operatorname{arcsen} x + \arccos x \equiv \frac{\pi}{2}$
57. $\arctan x + \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \equiv \frac{\pi}{2}$
58. $\operatorname{sen}^{-1}(-x) \equiv -\operatorname{sen}^{-1} x$
59. $\tan^{-1}(-x) \equiv -\tan^{-1} x$

En los ejercicios 60-63 dar un ejemplo para demostrar que cada ecuación no es una identidad.

60. $(\operatorname{sen}^{-1} x)^2 + (\cos^{-1} x)^2 = 1$
61. $\operatorname{sen}^{-1} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

62. $\cos^{-1} x = \frac{1}{\cos x}$

63. $\frac{\sec^{-1} x}{\cos^{-1} x} = \tan^{-1} x$

64. Definir la inversa de la función cotangente si se restringe el dominio al intervalo abierto $(0, \pi)$.

65. Definir la inversa de la función secante si se restringe el dominio a los intervalos $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ o $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

66. Definir la inversa de la función cosecante si se restringe el dominio a los intervalos $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ o $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

67. Utilizar una calculadora para encontrar $\arcsin(\sin 2)$. Explicar por qué la respuesta no es 2.

68. Utilizar una calculadora para encontrar $\arccos(\cos(-2))$. Explicar por qué la respuesta no es -2 .

69. Utilizar una calculadora para encontrar $\arcsin(\sin(-1))$. Explicar por qué la respuesta tiene que ser -1 .

Comparar este resultado con el ejercicio 67.

70. Utilizar una calculadora para encontrar $\arccos(\cos(1))$. Explicar por qué la respuesta tiene que ser 1. Comparar este resultado con ejercicio 68.

Para repaso

En los ejercicios 71-74 resolver cada ecuación. Escribir todos los resultados que sean mayores o iguales a 0° y menores que 360° . Aproximar los resultados al minuto más cercano, en donde sea apropiado.

71. $4 \cos^2 A = 3$

72. $\cos 2B = \cos^2 B$

73. $\tan y - 1 = 1.539$

74. $20 \sin^2 y - \sin y - 1 = 0$

75. **Militar.** La carga del cañón de un barco destructor alcanza una velocidad de 1 500 ft/s. La distancia que recorre la carga está dada por $d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{32}$, en donde v es la velocidad inicial de carga y θ es el ángulo de elevación del cañón. ¿A qué ángulo debe estar el cañón para que haga blanco en un transportador enemigo que se encuentra a 1 mi del destructor?

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 8

Demostrar las identidades en los ejercicios 1-14.

1. $\frac{1}{1 + \sin x} + \frac{1}{1 - \sin x} = \frac{2}{\cos^2 x}$

2. $\tan x + \cos x = 2 \csc 2x$

3. $\frac{\sec y}{\tan y + \cot y} = \sin y$

4. $\frac{1}{\cot B - \tan B} = \frac{\sin 2B}{4 \cos^2 B - 2}$

5. $\cot \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$

6. $\frac{1 - \cos 2A}{2 \tan^2 A} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{1 + \tan^2 A}$

7. $\frac{\sin 2y}{1 - \cos^2 y} = \frac{2}{\tan y}$

8. $\sin 2B - \tan B \cos 2B = \frac{\sin 2B}{2 \cos^2 B}$

9. $\frac{\sin(x-y)}{\sin x \sin y} = \cot y - \cot x$

10. $\sin 3x + \sin x = 2 \sin 2x \cos x$

11. $4 \sin A \cos A \cos 2A = \sin 4A$

12. $\frac{1 - \tan B}{1 + \tan B} = \frac{\cot B - 1}{\cot B + 1}$

13. $\frac{\tan y + \sec y}{\csc y + \cot y} = \frac{\sec y}{\cot y}$

14. $\frac{2 \tan x + \sec^2 x}{\sin^2 x} = (\csc x + \sec x)^2$

15. Expresar $\tan \theta \csc^2 \theta$ en términos de $\sin \theta$ solamente. Suponer que θ satisface $0 < \theta < \pi/2$.

En los ejercicios 16-27 suponer que $\sin A = 12/13$, con A en el cuadrante II y que $\cos A = 4/5$, con B en el cuadrante IV. Encontrar el valor de la función trigonométrica que se pide.

16. $\sin(A + B)$ 17. $\cos(A + B)$ 18. $\tan(A + B)$ 19. $\sin(A - B)$
20. $\cos(A - B)$ 21. $\tan(A - B)$ 22. $\sin 2A$ 23. $\cos 2A$
24. $\tan 2A$ 25. $\sin \frac{A}{2}$ 26. $\cos \frac{A}{2}$ 27. $\tan \frac{A}{2}$

28. $4 \sin 5x \cos 3x$

29. $\cos 15^\circ \cos 45^\circ$

Resolver cada ecuación en los ejercicios 33-40.

33. $\sqrt{3} \tan A - 1 = 0$

34. $\sqrt{2} \cos x \operatorname{sen} x = \cos x$

35. $\cos 2B = \operatorname{sen} B$

36. $4 \sin^2 2\theta = 1$

37. $\tan v + 4 = 6.194$

38. $\sec^2 x - \sec x - 2 = 0$

39. $\cos 3x - \cos 5x = 0$

40. $\csc x + \cot x = 1$

Evaluar cada expresión en los ejercicios 41-52.

41. $\arctan 1$

42. $\arcsen\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

43. $\arccos \left(-\frac{1}{2} \right)$

44. $\sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

45. $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$

46. $\cos^{-1} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

47. $\sin\left(\arccos \frac{1}{2}\right)$

48. $\arccos (\cos 0)$

49. $\cos (\tan^{-1} 3)$

50. $\sin \left[2 \arcsin \frac{1}{3} \right]$

51. $\cos \left[\frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$

52. $\sin \left[\arctan \frac{3}{4} - \arccos \frac{3}{5} \right]$

Simplificar cada expresión en los ejercicios 53-54.

53. $\sin(\tan^{-1} 2x)$

54. $\cos (\sin^{-1} 2x)$

55. Deportes. Un jugador de béisbol le pega a la pelota con un ángulo de inclinación θ con respecto a la horizontal.

La distancia que recorre la pelota en el aire está dada por $d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{32}$, en donde v es la velocidad inicial de la pelota en ft/s. Encuentre θ si la pelota llega hasta la base de la reja del jardín central a 420 ft del *home*, y la velocidad inicial es de 125 ft/s.

Capítulo



El estudio de la **geometría analítica** comprende la descripción de figuras geométricas en términos de ecuaciones algebraicas. En este estudio será necesario resolver dos tipos de problemas.

1. Dada una figura o curva encontrar una ecuación que describa la curva.
2. Dada una ecuación, graficar la curva correspondiente en un sistema de coordenadas.

El interés principal se concentrará en las curvas llamadas **secciones cónicas**, cuyo nombre proviene del hecho de que pueden obtenerse al intersecar un cono circular recto con un plano. En este capítulo se describirán en forma geométrica el círculo, la elipse, la hipérbola y la parábola, y se obtendrá una ecuación para cada sección cónica que corresponda a tales descripciones.

Otro modo de abordar el estudio de las **secciones cónicas** es describirlas como casos particulares de una ecuación general, a la que se llama **ecuación de segundo grado** o **ecuación cuadrática** con dos variables.

Así, si A, B y C son tales que

donde al menos una de las constantes A, B o C es diferente de cero. En el capítulo 3 se estudió la parábola como la gráfica de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, la cual es un caso particular de la ecuación cuadrática general.

El estudio de la geometría de las cónicas se remonta a Menecmo, un geómetra de la Academia de Platón. Es probable que los griegos hayan utilizado estas curvas sobre todo para resolver problemas de construcción, pero las aplicaciones de la geometría de las cónicas continúan extendiéndose en los tiempos modernos. Las propiedades de reflexión de una superficie parabólica permiten utilizarla en telescopios,

unidades de radar y sistemas de navegación. Los planetas y los satélites siguen órbitas elípticas y las partículas atómicas viajan en rutas hiperbólicas.

En este capítulo se estudiarán con detalle dos aplicaciones, que se presentan a continuación.

Espacio exterior

Una compañía de comunicaciones ha determinado que la órbita más económica para uno de sus laboratorios espaciales es una elipse cuya distancia máxima a la superficie de la Tierra sea de 200 mi y su distancia mínima de 100 mi. Tomando en cuenta que el radio de la Tierra es de 4 000 millas determínese la ecuación de la elipse. ¿Cuál será la distancia recorrida por el laboratorio espacial en una revolución?

Arquitectura

Una cúpula tiene una superficie parabólica. Con objeto de obtener la mejor iluminación en el piso, se tiene que colocar una fuente de luz en el foco de la superficie. Si 10.0 m hacia abajo de la parte superior de la cúpula el diámetro es 15.0 m, ¿cuál es la mejor ubicación de la fuente de luz?

En el primero de estos problemas se aplica la elipse (véase el ejemplo 3 de la sección 6.2), mientras que el segundo muestra uno de los muchos usos de la parábola (véase el ejemplo 5 de la sección 6.4).

En este capítulo se estudian todas las secciones cónicas y sus correspondientes ecuaciones. Además, las ecuaciones generales se adaptan a la forma ordinaria para determinar qué tipo de sección cónica representan; este proceso comprende la rotación de ejes. Se introducen las coordenadas polares para extender el análisis de graficación. Y por último, se utilizan las coordenadas polares para describir propiedades adicionales de los números complejos.

Secciones cónicas

La figura 1 muestra cómo es posible obtener el círculo, la elipse, la hipérbola y la parábola al intersectar un cono circular recto de dos ramas con un plano.

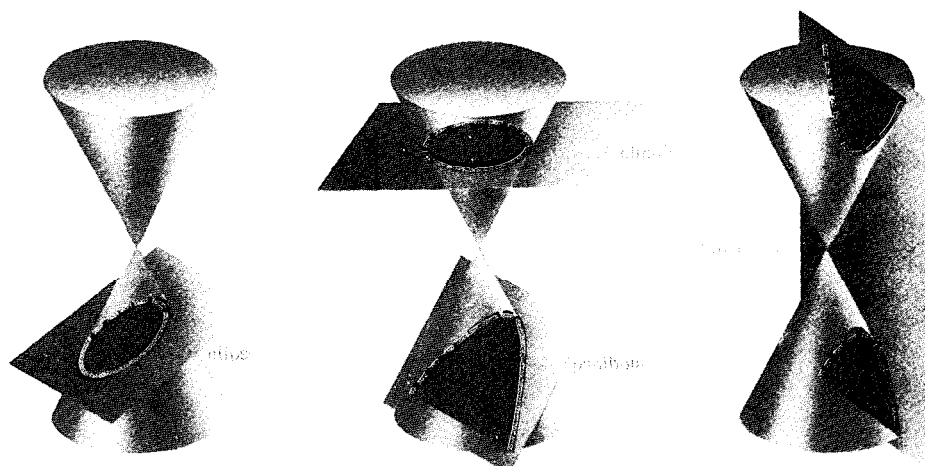


Figura 1. Cónicas.

Secciones cónicas degeneradas

El círculo es un caso especial de la elipse, en el cual el plano es perpendicular al eje del cono. Observar que en la figura 1 ninguno de los planos pasa a través del vértice del cono. Cuando el plano de intersección sí pasa a través del vértice, se obtienen las **secciones cónicas degeneradas** que se ilustran en la figura 2. En este capítulo el análisis se centra en las secciones cónicas de la figura 1.

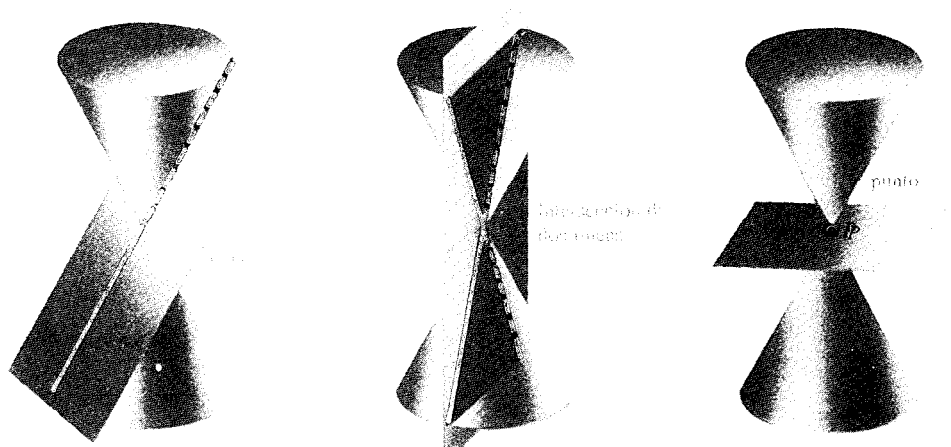


Figura 2. Cónicas degeneradas.

La primera sección cónica a tratar es el *círculo*. Para obtener la ecuación del círculo primero hay que definirlo en términos geométricos.

El círculo

Sean (h, k) un punto cualquiera en el plano y r cualquier número real positivo. La colección de todos los puntos del plano que están a r unidades es un **círculo con centro** (h, k) y **radio** r .

Ecuación de un círculo

La fórmula de la distancia

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

que da la distancia entre dos puntos con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , sirve para derivar la ecuación de un círculo. Sea (x, y) un punto arbitrario de un círculo con radio r y centro en (h, k) (véase la figura 3).

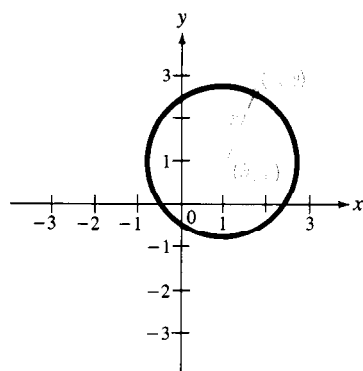


Figura 3. Círculo.

Puesto que cada punto (x, y) está a r unidades de (h, k) ,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} \\ r^2 &= (x - h)^2 + (y - k)^2. \end{aligned}$$

Se eleva al cuadrado a cada miembro.

La ecuación

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

se denomina la **forma ordinaria** de la ecuación del círculo con centro (h, k) y radio r .

Cuando $(h, k) = (0, 0)$, entonces la ecuación de un círculo con centro en el origen es $x^2 + y^2 = r^2$. Si se desarrolla la forma ordinaria, el resultado es la **forma general** de la ecuación de un círculo.

$$\begin{aligned} (x - h)^2 + (y - k)^2 &= r^2 \\ x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 &= r^2 \\ x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) &= 0 \end{aligned}$$

Ésta es una ecuación de segundo grado con **forma general**

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad A \neq 0, \text{ y } C \neq 0, \text{ y } D^2 + E^2 - 4AC > 0.$$

EJEMPLO 1

Encontrar las formas estándar y general de la ecuación de un círculo con centro $(2, -1)$ y radio 3. Se sustituyen $h = 2$, $k = -1$, y $r = 3$ en la forma ordinaria.

$$\begin{aligned}(x - h)^2 + (y - k)^2 &= r^2 \\(x - 2)^2 + (y - (-1))^2 &= 3^2 && \text{Sustitución al signo de } h, k \\(x - 2)^2 + (y + 1)^2 &= 9 && \text{Forma estándar}\end{aligned}$$

Desarrollando la forma ordinaria,

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 &= 9 \\x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 &= 0. && \text{Forma general}\end{aligned}$$

Como indica el ejemplo 1, la obtención de la forma general a partir de la forma ordinaria no es otra cosa que eliminar algebraicamente los paréntesis. Sin embargo, para encontrar la forma ordinaria a partir de la forma general de la ecuación, deben completarse los cuadrados tanto en x como en y .

EJEMPLO 2

Determinar la forma ordinaria de la ecuación $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$, y graficar luego el círculo.

Primero, se agrupan los términos x y los términos y , y luego se coloca el término constante a la derecha, dejando espacio para intercalar los números que completan ambos cuadrados.

$$x^2 - 6x \quad + y^2 + 2y \quad = 6$$

Para completar el cuadrado en x se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente de x , o sea $(-3)^2$ o 9. En forma análoga, se suma $(1)^2$ o 1 para completar el cuadrado en y . Una vez que se ha sumado 9 y 1 al lado izquierdo de la ecuación, se suma $9 + 1$ o 10 al lado derecho para conservar la igualdad.

$$\begin{aligned}x^2 - 6x \quad + y^2 + 2y \quad &= 6 + 10 \\(x - 3)^2 + (y + 1)^2 &= 16 \\(x - 3)^2 + (y + 1)^2 &= 4^2\end{aligned}$$

Puesto que $x - h = x - 3$, $h = 3$. Asimismo, $y - k = y + 1 = y - (-1)$ implica que $k = -1$. Así, el centro del círculo es $(3, -1)$ y el radio es 4 (véase la figura 4).

Por lo general, la ecuación cuadrática de dos variables de la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

donde $A = C \neq 0$, puede escribirse en la forma ordinaria de la ecuación de un círculo al dividir entre A y completar los cuadrados. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
 3x^2 + 3y^2 + 12x - 24y - 15 &= 0 \\
 x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 &= 0 \\
 x^2 + 4x + \quad + y^2 - 8y + \quad &= 5 + \quad \\
 (x + 2)^2 + (y - 4)^2 &= 5^2.
 \end{aligned}$$

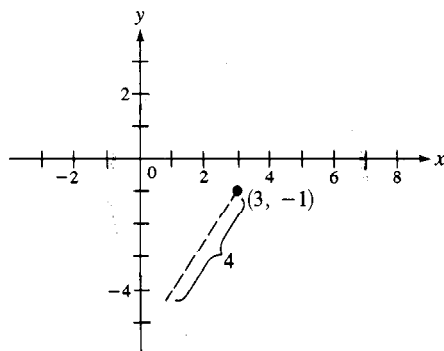


Figura 4

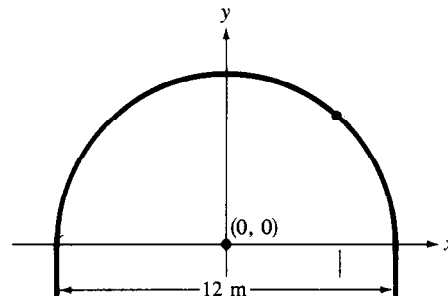


Figura 5. Túnel de la autopista.

PRIMICIÓN. Hay dos ecuaciones que parecen ser ecuaciones de un círculo pero que en realidad son secciones cónicas degeneradas. Por ejemplo, al completar los cuadrados en $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$, se obtiene:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 0.$$

Puesto que $(2, -3)$ es la única solución de esta ecuación, la gráfica es el simple punto $(2, -3)$, el cual puede concebirse como un círculo puntual o de radio nulo. Por otra parte, no hay puntos que satisfagan la ecuación $2x^2 + 2y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$ porque al completar los cuadrados se obtiene:

$$(x + 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}.$$

Es obvio que el lado izquierdo de esta ecuación es no negativo y, en consecuencia, la ecuación no tiene soluciones reales.

Para concluir esta sección se considerará una aplicación del círculo.

EJEMPLO 3 El túnel de la autopista

Ingeniería

Según un proyecto, un túnel de una autopista va a tener la forma de un semicírculo con diámetro de 12.0 m. Encontrar una ecuación para el semicírculo y determinar el espacio libre vertical en un punto de 4.0 m de la línea central.

Para esto, se establece un sistema de coordenadas con la línea central de la carretera en $(0, 0)$, como muestra la figura 5. La ecuación del círculo del cual el semicírculo es la mitad superior se transforma en:

$$\begin{aligned}
 (x - 0)^2 + (y - 0)^2 &= 6^2 \\
 x^2 + y^2 &= 36.
 \end{aligned}$$

Despejando y ,

$$y^2 = 36 - x^2$$

$$y = \pm \sqrt{36 - x^2}.$$

Al utilizar sólo el valor positivo de y para la mitad superior del círculo,

$$y = \sqrt{36 - x^2}.$$

El espacio libre vertical a 4.0 m de la línea central puede encontrarse al asignar $x = 4.0$ m.

$$y = \sqrt{36 - (4.0)^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} \approx 4.5$$

Así, el espacio libre vertical es aproximadamente de 4.5 m.

9.1. EJERCICIOS

Encontrar las formas ordinaria y general de la ecuación de cada círculo descrito en los ejercicios 1-6.

1. Centro $(-3, 2)$, radio 1
2. Centro $(5, -3)$, radio 2
3. Centro $\left(\frac{1}{4}, -1\right)$, radio 3
4. Centro $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, radio 1
5. Centro $(0, 0)$, radio 1
6. Centro $\left(0, \frac{1}{5}\right)$, radio 4

Encontrar la forma ordinaria de la ecuación de cada círculo descrito en los ejercicios 7-18.

7. Centro en $(0, 0)$, que pasa a través de $(0, 5)$
8. Centro en $(0, 0)$, que pasa a través de $(6, 8)$
9. Centro en $(1, -5)$, que pasa a través de $(7, 3)$
10. Centro en $(-1, -2)$, que pasa a través de $(4, -3)$
11. Centro en $(4, -1)$, radio $\sqrt{3}$
12. Centro en $(-3, 5)$, radio $\sqrt{6}$
13. Centro en $(6, 8)$, tangente al eje x
14. Centro en $(-5, 3)$, tangente al eje y
15. Puntos extremos de un diámetro en $(1, -4)$ y $(5, 2)$
16. Puntos extremos de un diámetro en $(0, 6)$ y $(6, 0)$
17. Puntos extremos de un diámetro en $(-7, 8)$ y $(4, 7)$
18. Puntos extremos de un diámetro en $(3, -2)$ y $(10, -9)$

En los ejercicios 19-24 graficar cada círculo.

19. $x^2 + y^2 = 16$
20. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$
21. $x^2 + y^2 + 4y = 5$
22. $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$
23. $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$
24. $x^2 + y^2 + 10x + 2y + 10 = 0$

En los ejercicios 25-30, determinar la forma ordinaria de cada ecuación.

25. $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$
26. $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 17 = 0$
27. $4x^2 + 4y^2 - 4x + 24y - 63 = 0$
28. $16x^2 + 16y^2 - 8x - 8y - 62 = 0$

29. $9x^2 + 9y^2 + 6x - 6y - 142 = 0$

30. $3x^2 + 3y^2 - 18x + 6y + 30 = 0$

Resolver:

31. **Ingeniería.** Un canal cuya sección transversal es un semicírculo tiene 10 ft de profundidad en el centro. Encontrar una ecuación para el semicírculo y usarla para determinar la profundidad a 4 ft del borde.
32. **Ingeniería.** Un túnel de autopista con forma de semicírculo va a tener un espacio libre vertical de 6.2 m a una distancia de 4.8 m de la línea central. Con una aproximación de decímetros ¿cuál debe ser el ancho del túnel medido transversalmente a la carretera? Debe darse la ecuación para el semicírculo.

LA ELIPSE

Para construir una elipse, supóngase que un hilo está atado a dos puntos fijos sobre una hoja de papel. Entonces, se mantiene tenso el hilo con un lápiz y se desliza éste alrededor de los puntos, sin aflojar el hilo. (véase la figura 6).

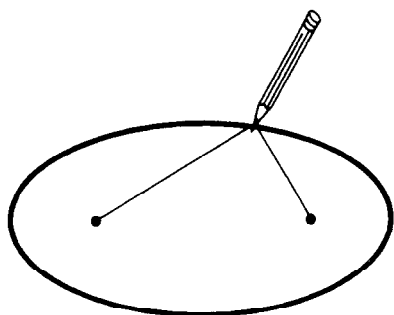


Figura 6. Construcción de la elipse.

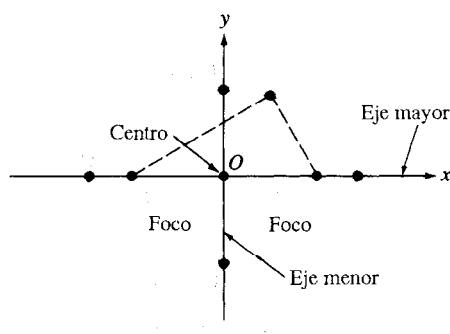


Figura 7. Elipse.

Debe observarse que al no cambiar la longitud del hilo en este proceso, la suma de las distancias desde los puntos fijos hasta cada punto en la curva permanece constante. Esto conduce a la definición de una elipse.

La elipse

Sea F_1 y F_2 dos puntos fijos en un plano. Una elipse con focos F_1 y F_2 es la colección de todos los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a F_1 y F_2 es una constante. El punto medio del segmento que une F_1 con F_2 se denomina centro de la elipse.

Ecuación de una elipse

Para desarrollar la ecuación de una elipse se considera la elipse con centro en el origen, mostrada en la figura 7. A los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ se les denomina **vértices** de la elipse. Al segmento que une a los vértices, que pasa a través de los focos y tiene una longitud $2a$, se le llama **eje mayor**. Y al segmento que pasa a través del centro de la elipse con puntos extremos $(0, -b)$ y $(0, b)$ se le conoce como **eje menor**. Debe observarse que el eje menor tiene una longitud $2b$ y la distancia entre los focos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ es $2c$.

Si $P(x, y)$ es cualquier punto sobre la elipse, entonces por definición:

$$PF_1 + PF_2 = \text{una constante.}$$

Si el punto P está en $(a, 0)$, entonces $PF_1 = a + c$ $PF_2 = a - c$ de modo que:

$$PF_1 + PF_2 = (a + c) + (a - c) = 2a.$$

Así, la suma de las distancias debe ser $2a$. Utilizando el punto $P(x, y)$, por la fórmula de la distancia:

$$PF_1 = \sqrt{(x - (-c))^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

$$PF_2 = \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

$$PF_1 + PF_2 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

Se despeja un radical y se elevan al cuadrado ambos lados.

$$\begin{aligned}\sqrt{(x + c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \\ (x + c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2 \\ x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\ 4xc - 4a^2 &= -4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \\ xc - a^2 &= -a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}\end{aligned}$$

De nuevo, se elevan al cuadrado ambos lados:

$$\begin{aligned}x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 &= a^2[(x - c)^2 + y^2] \\ &= a^2[x^2 - 2xc + c^2 + y^2] \\ &= a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 \\ x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 &= -a^2(a^2 - c^2)\end{aligned}$$

Se multiplica por -1 en ambos lados.

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Si el punto P está en $(0, b)$, como en la figura 8, $PF_1 = PF_2 = a$ (ya que $PF_1 + PF_2 = 2a$ y $PF_1 = PF_2$). Puesto que $PO = b$, $F_2O = c$, por el teorema de Pitágoras,

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ de modo que } a^2 - c^2 = b^2.$$

Se sustituye $a^2 - c^2$ por b^2 en la ecuación de arriba, y luego se divide cada término entre a^2b^2 .

$$\begin{aligned}x^2 + a^2y^2 &= a^2 \\ \frac{x^2b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} &= \frac{a^2b^2}{a^2b^2}\end{aligned}$$

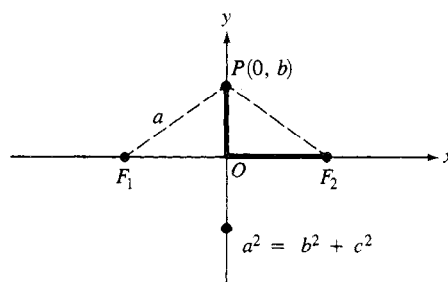


Figura 8

Esta ecuación es la **forma ordinaria** de la ecuación de una elipse, con centro en el origen, cuyas intersecciones con el eje x son $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ y con el eje y son $(0, b)$ y $(0, -b)$. Recuerdese que los focos están sobre el eje x en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ y que $a > b$.

Elipse con eje mayor horizontal

La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde $a > b$, es una elipse con una gráfica como la mostrada en la figura 9. Aquí a , b , y c están relacionadas por $b^2 = a^2 - c^2$.

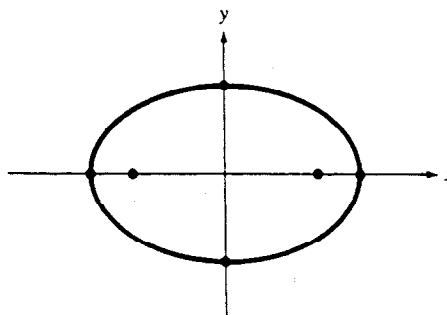


Figura 9

EJEMPLO 1

Encontrar la ecuación de la elipse con focos en $(-\sqrt{5}, 0)$ y $(\sqrt{5}, 0)$ e intersecciones con el eje x en $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.

Puesto que los focos están sobre el eje x , se sabe que $a = 3$. Así

$$b^2 = a^2 - c^2 = (3)^2 - (\sqrt{5})^2 = 4$$

$$b = 2.$$

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

Se sustituye $a = 3$ y $b = 2$ en la forma ordinaria.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Una elipse puede tener su eje mayor sobre el eje y con puntos extremos $(0, -a)$ y $(0, a)$. Los focos están en $(0, -c)$ y $(0, c)$; los puntos extremos del eje menor son $(-b, 0)$ y $(b, 0)$.

Elipse con eje mayor vertical

La ecuación

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

donde $a > b$, es una elipse con una gráfica como la mostrada en la figura 10. Aquí a , b , y c están relacionadas por $b^2 = a^2 - c^2$.

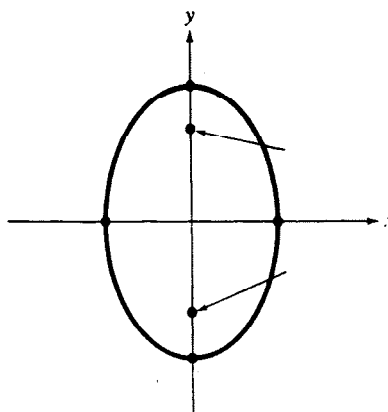


Figura 10

EJEMPLO 2

Graficar la ecuación

$$25x^2 + 16y^2 = 400.$$

Se divide entre 400.

$$\frac{25x^2}{400} + \frac{16y^2}{400} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Obsérvese que al ser $25 > 16$ ésta es la forma ordinaria de una elipse con eje mayor vertical. Además, $a^2 = 25$, o $a = 5$, y $b^2 = 16$ lo cual significa $b = 4$. Las intersecciones con el eje x son $(-4, 0)$ y $(4, 0)$ mientras que las intersecciones con el eje y son $(0, -5)$ y $(0, 5)$.

Otra manera de encontrar las intersecciones con el eje x es poner $y = 0$ en la ecuación original y despejar x .

$$\frac{x^2}{16} + \frac{0^2}{25} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} = 1$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

Así, las intersecciones con el eje x son $(4, 0)$ y $(-4, 0)$. En forma análoga, al poner $x = 0$, se obtiene que las intersecciones con el eje y son $(0, -5)$ y $(0, 5)$. La figura 11 muestra la gráfica de esta elipse.

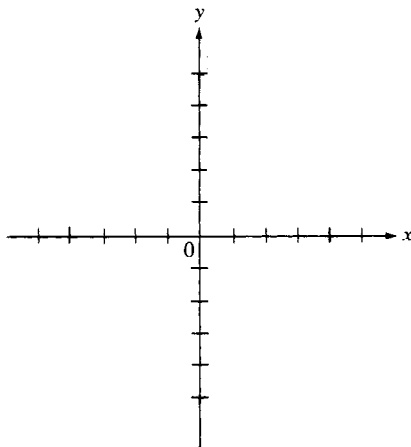


Figura 11

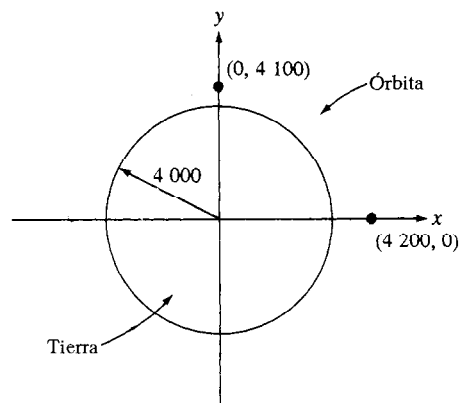


Figura 12. Órbita del laboratorio espacial.

Ahora es posible resolver el primer problema presentado en la introducción de este capítulo.

EJEMPLO 3

Espacio exterior

Una compañía de comunicaciones ha determinado que la órbita más económica para uno de sus laboratorios espaciales es una elipse cuya distancia máxima a la superficie de la Tierra sea de 200 mi y su distancia mínima de 100 mi. Tomando en cuenta que el radio de la tierra es de 4 000 mi, determínese la ecuación de la elipse. ¿Cuál es la distancia recorrida por el laboratorio espacial en una revolución?

El sistema de coordenadas en la figura 12 se ha colocado de modo que la elipse tenga el máximo de la órbita sobre el eje x ; por consiguiente, el mínimo está sobre el eje y . Así, $a = 4200$ y $b = 4100$. La ecuación es:

$$\frac{x^2}{(4\,200)^2} + \frac{y^2}{(4\,100)^2} = 1.$$

Hay que observar que para esta elipse a y b tienen relativamente el mismo tamaño. si $a = b$, entonces la ecuación será un círculo. A partir de esta información es relativamente fácil calcular la distancia recorrida por el laboratorio espacial en una revolución. Se calcula la circunferencia de un círculo con radio $r = \frac{a+b}{2}$.

$$\begin{aligned} C &= 2\pi r = 2\pi \left(\frac{4\,200 + 4\,100}{2} \right) \\ &\approx 26\,100 \text{ mi} \end{aligned}$$

Así, el laboratorio espacial recorre aproximadamente 26 100 mi en cada revolución.

Traslación de ejes

Para analizar una elipse con centro en algún punto (h, k) , se usa la *traslación de ejes*. Considérese la elipse de la figura 13 con centro en (h, k) en un sistema de coordenadas xy rectangulares.

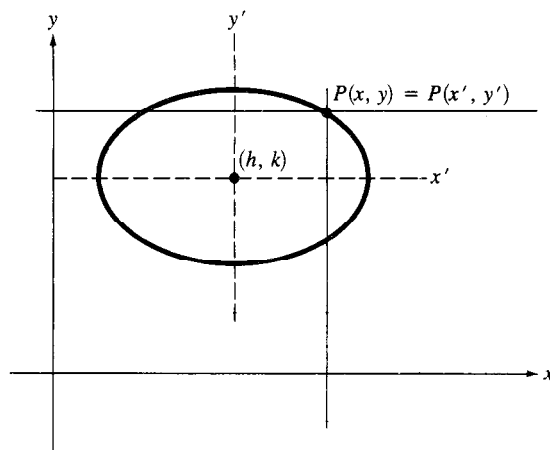


Figura 13. Traslación de ejes.

Ahora se establece un nuevo sistema de coordenadas $x' y'$ con origen en (h, k) en el sistema de coordenadas xy . Nótese que las coordenadas de un punto sobre la elipse, $P(x, y) = P(x', y')$, satisfacen

$$\begin{aligned}
 x &= x' + h \\
 y &= y' + k \\
 x' &= x - h \\
 y' &= y - k.
 \end{aligned}$$

Estas son ecuaciones de transformación, las cuáles son válidas cuando se lleva a cabo una **traslación de ejes**. Esto significa que se establece un nuevo sistema de coordenadas de tal manera que el eje x' sea paralelo al eje x y el eje y' sea paralelo al eje y .

La ecuación para la elipse de la figura 13 es de la forma:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

en el sistema de coordenadas $x' y'$. Considerando que $x' = x - h$ y $y' = y - k$, en el sistema de coordenadas xy se tiene:

como la forma ordinaria de la ecuación de la elipse con centro en (h, k) y eje mayor horizontal. Si el eje mayor es vertical, la ecuación es:

EJEMPLO 4

Encontrar la forma ordinaria y graficar la elipse que tiene $b = 4$ y focos en $(-1, 3)$ y $(5, 3)$.
El centro de la elipse es el punto medio del segmento que une a los focos.

$$h = \frac{-1 + 5}{2} = 2 \quad y \quad k = \frac{3 + 3}{2} = 3$$

Así, $(h, k) = (2, 3)$. Además $2c = 5 - (-1) = 6$, por lo que $c = 3$.

$$a^2 = b^2 + c^2 = (4)^2 + (3)^2 = 25$$

Por consiguiente, $a = 5$ y la forma ordinaria de la elipse es:

$$\frac{(x - 2)^2}{25} + \frac{(y - 3)^2}{16} = 1.$$

La gráfica interseca la recta $y = 3$ en los puntos $a = 5$ unidades a cada lado del centro $(2, 3)$ y a la recta $x = 2$ en los puntos $b = 4$ unidades arriba y abajo del centro $(2, 3)$. Véase la figura 14.

Si en forma ordinaria se eliminan los paréntesis, se obtiene la **forma general de la ecuación de una elipse**.

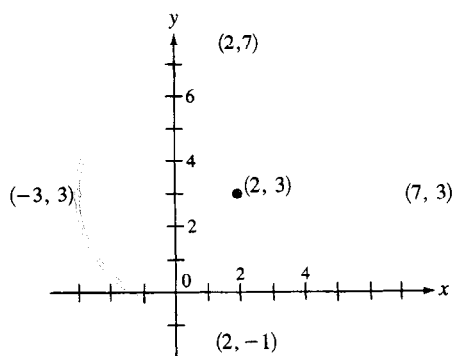


Figura 14

Para la ecuación represente una elipse, A y C deben tener el mismo signo y no ser iguales. Con el fin de convertir la forma general a la forma ordinaria, se procede como con el círculo y se completan los cuadrados.

EJEMPLO 5

Escribir $36x^2 + 64y^2 + 108x - 128y - 431 = 0$ en la forma ordinaria.

$$\begin{aligned} 36x^2 + 108x + 64y^2 - 128y &= 431 \\ 36(x^2 + 3x) + 64(y^2 - 2y) &= 431 \\ 36\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) + 64(y^2 - 2y + 1) &= 431 \end{aligned}$$

No sólo debe sumarse $9/4$ y 1 en el lado derecho ya que están multiplicados en el lado izquierdo por 36 y 64 , respectivamente.

$$\begin{aligned} 36\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 64(y - 1)^2 &= 576 \\ \frac{36\left(x + \frac{3}{2}\right)^2}{576} + \frac{64(y - 1)^2}{576} &= \frac{576}{576} \\ \frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2}{16} + \frac{(y - 1)^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

La ecuación es una elipse con centro en $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$, $a = 4$, y $b = 3$.

9.2. Ejercicios

Encontrar en los ejercicios 1-10, la ecuación de cada elipse con centro en el origen.

1. Coordenadas al origen en $(\pm 7, 0)$ y $(0, \pm 6)$
2. Coordenadas al origen en $(\pm 6, 0)$ y $(0, \pm 7)$
3. Focos $(\pm 3, 0)$ e intersecciones con el eje x en $(\pm 5, 0)$

4. Focos $(\pm\sqrt{7}, 0)$ e intersecciones con el eje y en $(0, \pm 4)$
5. Focos $(0, \pm 3)$ e intersecciones con el eje x en $(\pm 4, 0)$
6. Focos $(0, \pm\sqrt{7})$ e intersecciones con el eje y en $(0, \pm\sqrt{11})$
7. Longitud del eje mayor 12 e intersecciones con el eje y en $(0, \pm 5)$
8. Longitud del eje menor 6 y focos $(0, \pm 6)$
9. El eje mayor tiene coordenadas al origen en $(\pm 10, 0)$ y pasa a través de $(5, \sqrt{3})$. [Sugerencia: Para encontrar b , se emplea la ecuación en la forma ordinaria.]
10. El eje menor tiene coordenadas al origen en $(\pm 2, 0)$ y pasa a través de $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$. Encontrar en los ejercicios 11-16, la ecuación de cada elipse.
11. Centro en $(5, -2)$, $a = 4$, y focos $(3, -2)$ y $(7, -2)$
12. Centro en $(-2, 5)$, $b = 4$, y focos $(-2, 3)$ y $(-2, 7)$
13. Focos $(\pm 4, 3)$ e intersecciones con el eje y en $(0, 0)$ y $(0, 6)$
14. Focos $(5, \pm 3)$ e intersecciones con el eje x en $(4, 0)$ y $(6, 0)$
15. Focos $(7, -1)$ y $(7, -7)$ y $a = 8$
16. Focos $(-2, -3)$ y $(4, -3)$ y $b = 7$

Graficar cada elipse en los ejercicios 17-24.

17. $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$
18. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$
19. $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$
20. $\frac{(x+3)^2}{49} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$
21. $4x^2 + 25y^2 - 24x + 50y - 39 = 0$
22. $4x^2 + 9y^2 - 16x + 36y + 16 = 0$
23. $16x^2 + 4y^2 + 32x - 20y + 5 = 0$
24. $36x^2 + 25y^2 - 36x - 50y - 191 = 0$

Escribir en los ejercicios 25-30, cada ecuación en la forma $\frac{(x-h)^2}{m} + \frac{(y-k)^2}{n} = 1$.

25. $8x^2 + 7y^2 - 56 = 0$
26. $10x^2 + 12y^2 - 60 = 0$
27. $9x^2 + 50y^2 + 54x - 300y + 306 = 0$
28. $16x^2 + 21y^2 - 128x + 210y + 753 = 0$
29. $4x^2 + 9y^2 + 16x + 88 = 0$
30. $100x^2 + 4y^2 - 300x + 16y + 241 = 0$

Resolver:

31. **Ingeniería.** Se va a construir una pista elíptica de equitación en un terreno rectangular que mide 3 mi por 6 mi. ¿Cuál será la ecuación para la elipse si la pista tiene que tocar el centro de cada uno de los cuatro límites de la propiedad?
32. **Espacio exterior.** Se va a poner un satélite en órbita elíptica alrededor de una de las lunas de un planeta. La luna es una esfera con radio de 900 km. Determinar una ecuación para la elipse si la distancia al satélite desde la superficie de la luna varía de 200 km a 300 km. ¿Cuál es la distancia recorrida por el satélite en una revolución?
33. **Ingeniería.** Un túnel de ferrocarril tiene forma de semielipse con el eje mayor horizontal. La altura del túnel en el centro es de 30 ft y el espacio libre vertical debe ser de 25 ft en un punto de 20 ft del centro. Encontrar una ecuación para la elipse.
34. **Ingeniería.** Un puente sobre un canal tiene forma de semielipse. La ecuación de la elipse es $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ para un sistema de coordenadas centrado en medio del canal, con el eje horizontal x en posición transversal al canal. Despejar y en la ecuación y determinar el espacio libre vertical apropiado para botes a 3.0 m de la orilla del canal.
35. **Carpintería.** Las dimensiones de una tabla rectangular son de m por n unidades, donde $m > n$. Para construir la cubierta elíptica más grande de una mesa, deben determinarse los focos de la elipse. ¿Qué tan lejos del lado corto de la tabla estarán localizados los focos?

36. Se amarra una cuerda a los focos mencionados en el ejercicio 35 y se tensa con un lápiz para delinear la elipse. ¿Qué longitud de cuerda debe utilizarse?

Para repasar:

Encontrar la ecuación de cada círculo descrito en los ejercicios 37-38.

37. Centro en $(2, -5)$, que pasa a través de $(4, -1)$
 38. Puntos extremos de un diámetro en $(-3, 2)$ y $(6, 1)$

Escribir en los ejercicios 39-40, la ecuación en la forma ordinaria.

39. $x^2 + y^2 + 4x - 16y + 59 = 0$ 40. $36x^2 + 36y^2 - 36x + 24y - 131 = 0$

9.3. LA HIPÉRBOLA

La definición de la hipérbola se parece mucho a la que se dio para la elipse en la sección anterior. La única diferencia es que la hipérbola es una *diferencia* de distancias en lugar de una *suma*.

La hipérbola

Son F_1 y F_2 dos puntos fijos en un plano. Una **hipérbola** con focos F_1 y F_2 es la colocación de todos los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a F_1 y F_2 es una constante.

El punto medio del segmento que une a F_1 y F_2 se denomina el *centro* de la hipérbola.

Ecuación de una hipérbola

Para desarrollar la ecuación de una hipérbola se considera la gráfica de la figura 15.

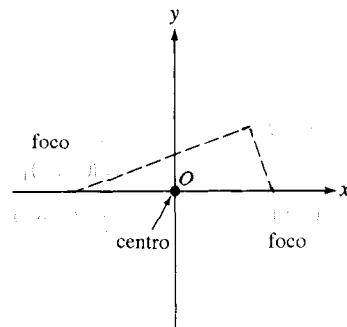


Figura 15. Hipérbola.

Es posible demostrar que la diferencia de las distancias es la constante $2a$, y así:

$$PF_1 - PF_2 = 2a.$$

Si se elige un punto sobre el otro lado o **rama** de la hipérbola, se escribirá:

$$PF_2 - PF_1 = 2a.$$

En cualquiera de los dos casos es cierto que

$$|PF_1 - PF_2| = 2a.$$

Haciendo uso de esta relación y de técnicas semejantes a las que sirvieron para la elipse, es posible derivar la forma ordinaria de la ecuación de una hipérbola. Debe notarse que $a < c$ para la hipérbola, y se define b utilizando:

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

Los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ se denominan vértices, y al segmento que une los vértices se le llama **eje transverso** de la hipérbola. La recta que atraviesa $(0, -b)$ y $(0, b)$ es el **eje conjugado**.

Hipérbola con eje transverso horizontal

La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tiene como su gráfica una hipérbola con centro en $(0, 0)$, focos en $(\pm c, 0)$, y vértices en $(\pm a, 0)$. Aquí a , b y c están relacionadas por $b^2 = c^2 - a^2$.

EJEMPLO 1

Encontrar la ecuación de una hipérbola como focos $(\pm 5, 0)$ y $b = 2$.

Puesto que $c = 5$ y $b = 2$ es posible determinar a .

$$\begin{aligned} a^2 &= c^2 - b^2 \\ a^2 &= 5^2 - 2^2 = 21 \end{aligned}$$

Así, los vértices son $(\sqrt{21}, 0)$ y $(-\sqrt{21}, 0)$ por consiguiente, la ecuación es:

$$\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Graficar una hipérbola requiere un método diferente al utilizado para la elipse. En primer lugar, la hipérbola tiene sólo dos coordenadas al origen. Si $y = 0$, puede mostrarse que los vértices son las intersecciones con el eje x .

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{0}{b^2} &= 1 \\ x &= \pm a \end{aligned}$$

Sin embargo, si $x = 0$, la ecuación $-\frac{y^2}{b^2} = 1$ no tiene solución y no hay intersecciones con el eje y .

Asíntotas

Para obtener más información con respecto a la gráfica de una hipérbola, se resuelve:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

para y .

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{x^2 - a^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

Para $|x|$ muy grandes $x^2 - a^2 \approx x^2$ y la hipérbola se acercará a las rectas

$$y = \pm \frac{b}{a}x.$$

Puesto que la hipérbola se aproxima a las rectas $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$ a medida que $|x|$ se agranda, estas rectas se denominan **asíntotas**.

Para graficar una hipérbola se trazan las asíntotas como se muestra en la figura 16. El mejor procedimiento es construir un rectángulo con lados paralelos a los ejes y que pase a través de los puntos $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ y $(0, -b)$. Las asíntotas cruzarán luego las esquinas de este rectángulo. Después se trazan los vértices $(a, 0)$ y $(-a, 0)$. La hipérbola pasa a través de los vértices y se aproxima a las asíntotas.

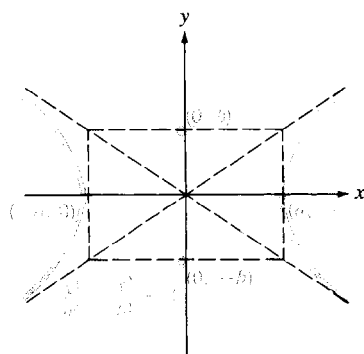


Figura 16. Asíntotas.

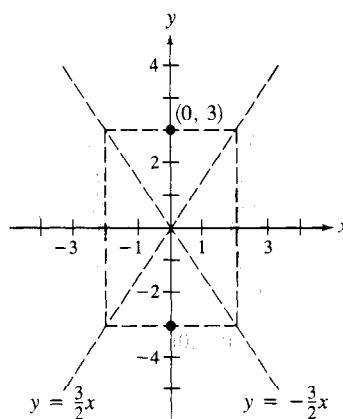


Figura 17

EJEMPLO 2

Graficar la hipérbola con ecuación $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Puesto que es posible escribir la ecuación como $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$, $a = 2$ y $b = 3$. (Obsérvese que a no necesita ser mayor que b , como en el caso de la elipse.) Después se construye el rectángulo cuyos lados pasan a través de los puntos $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 3)$ y $(0, -3)$. Se dibujan las asíntotas a través de las

esquinas del rectángulo. La hipérbola pasa a través de los vértices $(2, 0)$ y $(-2, 0)$ y se aproxima a las asintotas como muestra la figura 17.

En los párrafos anteriores, el análisis se ha centrado sólo en las hipérbolas con eje transversal a lo largo del eje x y eje conjugado a lo largo del eje y . Si el término y^2 es positivo y el término x^2 es negativo en la forma ordinaria, la hipérbola tendrá el eje transversal a lo largo del eje y . La forma ordinaria de la ecuación correspondiente a estas hipérbolas se da en el siguiente teorema.

Hipérbola con el eje transversal vertical

La ecuación

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

tiene como su gráfica una hipérbola con centro en $(0, 0)$, focos en $(0, \pm c)$, y vértices en $(0, \pm a)$. Aquí a , b y c están relacionados por $b^2 = c^2 - a^2$.

Las asintotas para estas hipérbolas son $y = \pm \frac{a}{b}x$, pero el procedimiento para construirlas es el mismo. Véase la figura 18.

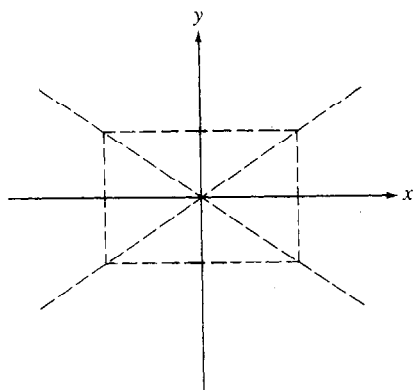


Figura 18

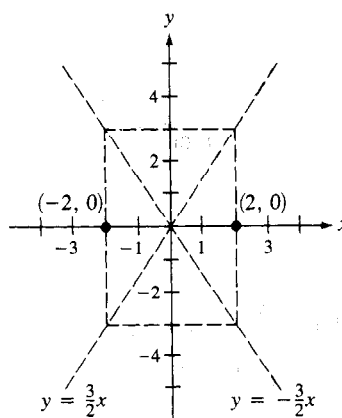


Figura 19

EJEMPLO 3

Graficar la hipérbola con focos en $(0, \pm\sqrt{13})$ y vértices $(0, \pm 3)$. Conociéndose $c = \sqrt{13}$ y $a = 3$, encontrar b .

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 - a^2 \\ &= (\sqrt{13})^2 - (3)^2 = 13 - 9 = 4 \\ b &= 2 \end{aligned}$$

La ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1.$$

Se construye un rectángulo a través de $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 3)$, y $(0, -3)$ y se trazan las asíntotas a través de las esquinas, $(2, 3)$, $(-2, 3)$, $(-2, -3)$, y $(2, -3)$. La hipérbola, que se muestra en la figura 19, cruza los vértices $(0, 3)$ y $(0, -3)$ y se aproxima a las asíntotas.

Si se trasladan los ejes, es posible extender el análisis a las hipérbolas con centros en puntos diferentes del origen. La forma ordinaria de una hipérbola con centro (h, k) y eje transverso horizontal es:

Si la hipérbola tiene un eje transverso vertical, la forma ordinaria es

EJEMPLO 4

Graficar la hipérbola

$$\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1.$$

Puesto que

$$\frac{(x - (-1))^2}{3^2} - \frac{(y - 2)^2}{4^2} = 1,$$

$(h, k) = (-1, 2)$, $a = 3$, y $b = 4$. Primero se localiza el centro, $(-1, 2)$, y luego se trazan las rectas $x = -1$ y $y = 2$. Estas rectas pueden considerarse como nuevos ejes de coordenadas, con la hipérbola dada centrada en el origen de este sistema. Se traza el rectángulo y las asíntotas, con $a = 3$ y $b = 4$, con respecto a estos nuevos ejes. Puesto que la hipérbola tiene un eje transverso horizontal, se sabe que pasa a través de los puntos a 3 unidades a la derecha y a la izquierda de $(-1, 2)$, es decir, a través de $(2, 2)$ y $(-4, 2)$. Con esta información es posible dibujar la gráfica, como en la figura 20.

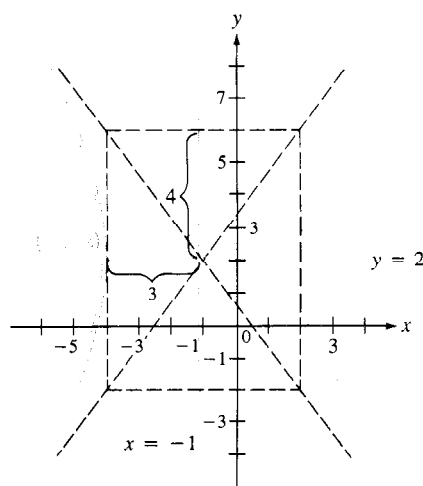


Figura 20

Si se desarrolla la ecuación del ejemplo 4, el resultado es la forma general de la hipérbola.

$$16x^2 - 9y^2 + 32x + 36y - 164 = 0$$

Todas las hipérbolas analizadas en esta sección pueden escribirse en la forma general:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

donde A y C tienen signos opuestos. si se da la forma general, hay que completar los cuadrados para encontrar la forma ordinaria.

EJEMPLO 5

Escribir la ecuación $25x^2 - 9y^2 - 100x - 54y - 206 = 0$ en la forma ordinaria.

$$\begin{aligned} 25x^2 - 100x - 9y^2 - 54y &= 206 \\ 25(x^2 - 4x) - 9(y^2 + 6y) &= 206 \\ 25(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 + 6y + 9) &= 206 + 100 - 81 \\ 25(x - 2)^2 - 9(y + 3)^2 &= 225 \\ \frac{(x - 2)^2}{9} - \frac{(y + 3)^2}{25} &= 1 \\ \frac{(x - 2)^2}{3^2} - \frac{(y + 3)^2}{5^2} &= 1 \end{aligned}$$

Considera la ecuación cuadrática más general,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

conduce a otro tipo de ecuación cuya gráfica es una hipérbola. En el ejemplo 6 se analiza el caso en que todas las constantes son nulas, excepto B y F .

EJEMPLO 6

Graficar $2xy - 6 = 0$.

Simplificar se obtiene $xy = 3$, que se gráfica uniendo los puntos como en la figura 21. La gráfica es una hipérbola que tiene los ejes de coordenadas como asíntotas. Obsérvese que la gráfica parece estar "girada" con respecto a las gráficas estudiadas con anterioridad.

x	y
1	3
2	3/2
3	1
-1	-3
-2	-3/2
-3	-1

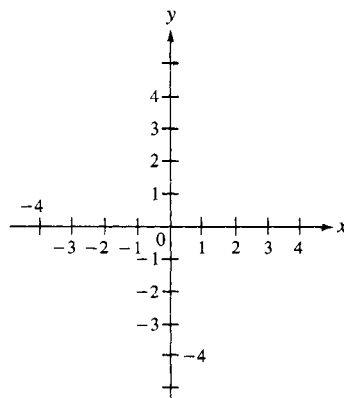


Figura 21

9.3. Ejercicios

Encontrar la forma ordinaria de la ecuación de cada hipérbola en los ejercicios 1-12.

1. Focos en $(\pm 5, 0)$ y vértices en $(\pm 3, 0)$
2. Focos en $(0, \pm 5)$ y vértices en $(0, \pm 3)$
3. $a = b = 3$, eje transversal a lo largo del eje y y centro en el origen
4. $a = b = 5$, eje transversal a lo largo del eje x y centro en el origen
5. Focos $(\pm 7, 0)$ y la longitud del eje transversal es 10
6. Focos $(0, \pm 8)$ y la longitud del eje conjugado es 4
7. Vértices $(0, \pm 6)$ y asíntotas $y = \pm \frac{3}{4}x$
8. Vértices $(\pm 5, 0)$ y asíntotas $y = \pm x$
9. Centro en $(-3, 2)$, focos $(-3, 8)$ y $(-3, -4)$, y vértices $(-3, 6)$ y $(-3, -2)$
10. Centro en $(5, 3)$, focos $(0, 3)$ y $(10, 3)$ y la longitud del eje transversal es 6
11. Vértices $(\pm 4, 0)$ y que pasa a través de $(8, 6)$
12. Vértices $(0, \pm 2)$ y que pasa a través de $(6, 4)$

Dibujar la gráfica de cada hipérbola en los ejercicios 13-20.

13. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$

14. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{25} = 1$

15. $\frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$

16. $\frac{(y+1)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$

17. $x^2 - y^2 - 4x + 2y + 12 = 0$

18. $4x^2 - y^2 + 32x + 2y + 59 = 0$

19. $xy = -2$

20. $5xy - 10 = 0$

En los ejercicios 21-26 escríbase cada ecuación en la forma: $\frac{(x-h)^2}{m} - \frac{(y-k)^2}{n} = 1$ o

$$\frac{(y-k)^2}{m} - \frac{(x-h)^2}{n} = 1.$$

21. $x^2 - y^2 + 25 = 0$

22. $2y^2 - 3x^2 + 6 = 0$

23. $16y^2 - 9x^2 - 192y - 54x + 351 = 0$

24. $18x^2 - 7y^2 + 180x + 28y + 359 = 0$

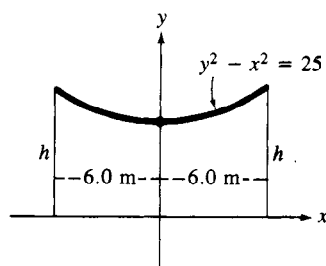
25. $4x^2 - y^2 + 32x + 2y + 63 = 0$

26. $25x^2 - 9y^2 - 100x - 54y + 19 = 0$

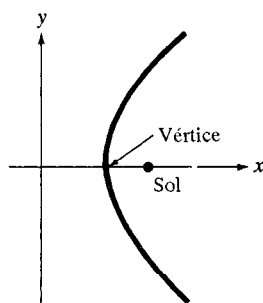
Resolver:

27. **Arquitectura.** El techo de un edificio tiene la forma de la hipérbola $y^2 - x^2 = 25$, donde x y y están en metros.

Tomando en cuenta la figura, determinar la altura h de las paredes exteriores.



28. **Astronomía.** Un cometa sigue la trayectoria hipérbola descrita por la ecuación $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, donde x y y están en millones de millas. Si, como se muestra en la figura, el sol está en el foco de esta trayectoria, ¿qué tan cerca del sol está el vértice de la trayectoria del cometa?



29. Determinar los coeficientes de la ecuación cuadrática general $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ cuando la forma normal de la ecuación es $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.
30. Determinar las ecuaciones de las rectas de intersección que resultan de la hipérbola degenerada $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 0$.

Determinar la forma ordinaria de la ecuación de cada elipse en los ejercicios 31-32.

31. Focos $(0, \pm\sqrt{11})$ y longitud del eje menor igual a 4
32. Focos $(+6, 2)$ e intersecciones con el eje y $(0, -1)$ y $(0, 5)$

En los ejercicios 33-34, escribir cada ecuación en la forma: $\frac{(x-h)^2}{m} + \frac{(y-k)^2}{n} = 1$.

33. $8x^2 + 4y^2 - 24y + 4 = 0$
34. $15x^2 + 7y^2 - 60x + 56y + 67 = 0$

En la sección 3.6 se hizo un análisis de las parábolas como gráficas de funciones cuadráticas. Ahora se enunciará una definición geométrica de la parábola.

La parábola

Sea F un punto fijo y L una recta fija en el plano. Una **parábola** con **foco** F y **directriz** L es el conjunto de todos los puntos en el plano que equidistan de F y L .

Ecuación de una parábola

La recta que pasa a través del foco de una parábola perpendicular a la directriz se denomina eje de simetría, y el punto de intersección de la parábola y el **eje de simetría** se le llama **vértice**. Como referencia,

la figura 22 puede servir para desarrollar la ecuación de la parábola. Obsérvese que esta parábola abre hacia la derecha y que tiene vértice en el origen $(0, 0)$, foco $(p, 0)$ en el eje x positivo y como directriz la recta $x = -p$.

Para obtener la ecuación para la parábola de arriba, nótese primero que

$$PF = \sqrt{(x - p)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - p)^2 + y^2} \quad \text{y} \quad PQ = x + p.$$

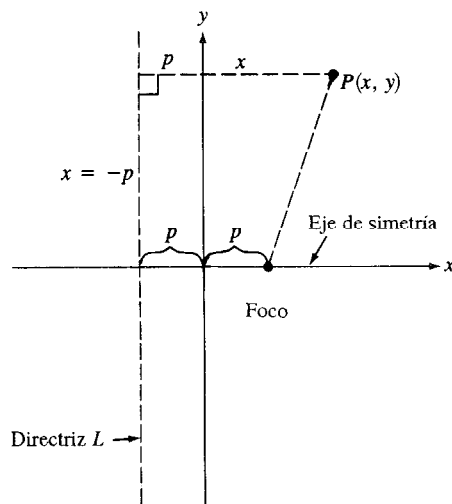


Figura 22. Parábola.

Por la definición de parábola, $PF = PQ$.

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - p)^2 + y^2} &= x + p \\ (x - p)^2 + y^2 &= (x + p)^2 \\ x^2 - 2px + p^2 + y^2 &= x^2 + 2px + p^2 \\ y^2 &= 4px \end{aligned}$$

De manera semejante, puede mostrarse que las tres parábolas que aparecen en la figura 23 tienen ecuaciones de la forma ordinaria dada.

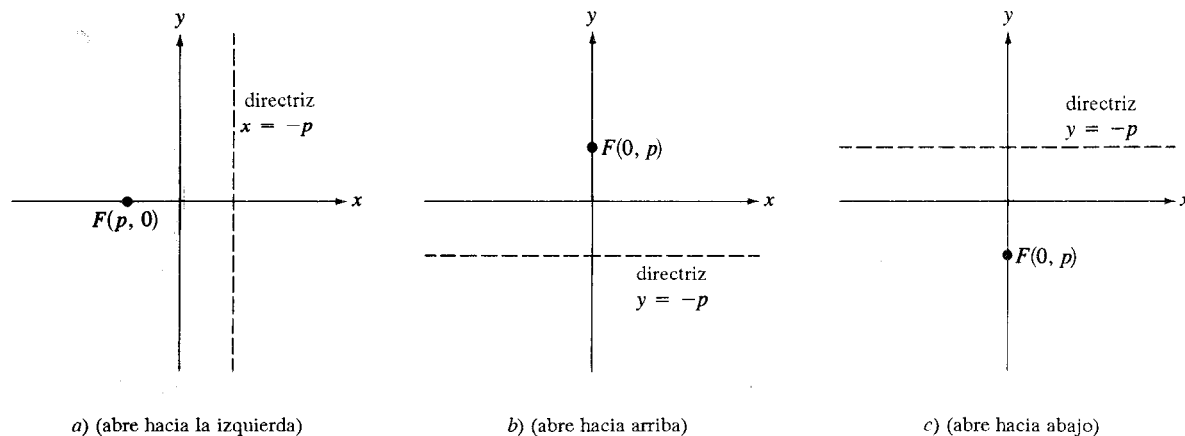


Figura 23. Parábolas.

Forma ordinaria de una Parábola con vértice en el origen

Una parábola con vértice en el origen y cuyo eje de simetría es uno de los ejes de coordenadas tiene una de las siguientes ecuaciones de la forma ordinaria.

1. $y^2 = 4px$ El foco es $(p, 0)$ y la directriz es $x = -p$.
Abre a la derecha si $p > 0$ y a la izquierda si $p < 0$.
2. $x^2 = 4py$ El foco es $(0, p)$ y la directriz es $y = -p$.
Abre hacia arriba si $p > 0$ y hacia abajo si $p < 0$.

EJEMPLO 1

Dar la forma ordinaria de la ecuación de una parábola con vértice en el origen que abre hacia arriba y tiene foco en $(0, 2)$.

De acuerdo con el teorema, la ecuación a utilizar es $x^2 = 4py$. Éste es el caso mostrado en la figura 23 b). Puesto que el foco es $(0, 2)$, $p = 2$. Así,

$$x^2 = 4(2)y = 8y.$$

La ecuación deseada es $x^2 = 8y$.

Por supuesto, también es posible determinar el vértice, el foco y la directriz cuando se da la ecuación de una parábola.

EJEMPLO 2

Determinar el vértice, el foco y la directriz, y graficar la parábola cuya ecuación es $y^2 = -6x$.

Primero se escribe la ecuación en la forma $y^2 = 4px$.

$$4p = -6$$

$$p = -\frac{3}{2}$$

Así, la ecuación es $y^2 = 4\left(-\frac{3}{2}\right)x$. Con base en el teorema, el vértice es $(0, 0)$, el foco es $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, y la directriz es $x = -\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$. Para graficar la parábola de la figura 24 se han trazado dos puntos adicionales, $\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$ y $\left(-\frac{3}{2}, -3\right)$.

Vértice en (h, k)

Para estudiar las parábolas con vértice en el punto (h, k) deben trasladarse los ejes. Las ecuaciones resultantes se proporcionan en el siguiente teorema.

Forma ordinaria de una parábola con vértice en (h, k)

Una parábola con vértice en (h, k) y eje de simetría paralelo a uno de los ejes de coordenadas tiene una de las siguientes ecuaciones de la forma ordinaria.

1. $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ El foco es $(h + p, k)$ y la directriz es $x = h - p$.
Abre a la derecha si $p > 0$ y a la izquierda si $p < 0$.
2. $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ El foco es $(h, k + p)$ y la directriz es $y = k - p$.
Abre hacia arriba si $p > 0$ y hacia abajo si $p < 0$.

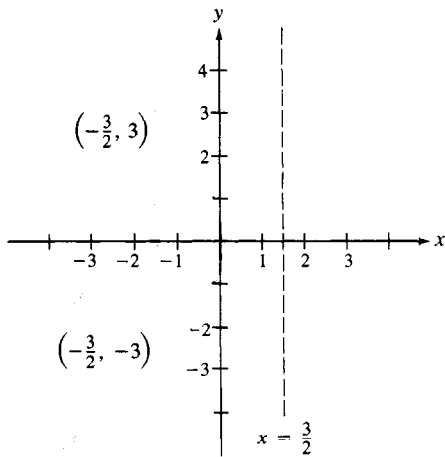


Figura 24

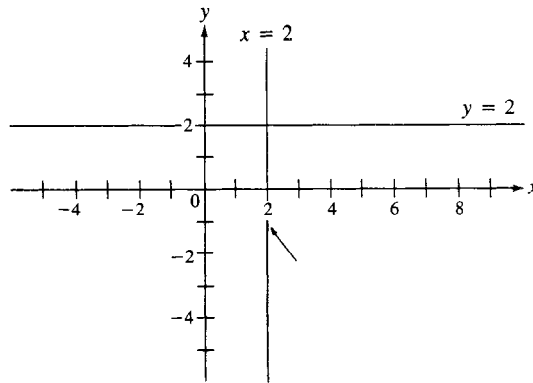


Figura 25

EJEMPLO 3

Determinar el vértice, el foco y la directriz, y graficar la parábola cuya ecuación es $(x - 2)^2 = -12(y + 1)$.

Se escribe la ecuación como $(x - 2)^2 = -12[y - (-1)]$ para mostrar que $h = 2$ y $k = -1$. Así, el vértice es $(2, -1)$. Puesto que

$$\begin{aligned} 4p &= -12 \\ p &= -3, \end{aligned}$$

el foco es $(h, k + p) = (2, -1 - 3) = (2, -4)$. Es decir, el foco está 3 unidades abajo del vértice. La directriz es la recta horizontal $y = k - p = -1 - (-3) = 2$. Para dibujar la gráfica se dibujan los puntos adicionales $(-4, -4)$ y $(8, -4)$ (véase la figura 25).

EJEMPLO 4

Determinar la ecuación de una parábola con vértice $(2, -3)$, eje de simetría $y = -3$, y que pasa a través del punto $(4, -1)$.

Puesto que el eje de simetría $y = -3$ es paralelo al eje x , la ecuación de la parábola tiene la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$. Ya que el vértice es $(2, -3)$, la ecuación se transforma:

$$[y - (-3)]^2 = 4p(x - 2)$$

$$(y + 3)^2 = 4p(x - 2).$$

Ahora, lo único que sigue siendo una incógnita es p . Y entonces, para encontrar p , es posible basarse en el hecho de que la parábola pasa a través del punto $(4, -1)$.

$$(y + 3)^2 = 4p(x - 2)$$

$$(-1 + 3)^2 = 4p(4 - 2)$$

$$4 = 8p$$

$$\frac{1}{2} = p$$

Así, la ecuación está determinada por completo.

$$(y + 3)^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)(x - 2)$$

$$(y + 3)^2 = 2(x - 2)$$

A continuación se resolverá el segundo problema de aplicación expuesto en la introducción de este capítulo.

EJEMPLO 5

Arquitectura

Una cúpula tiene una superficie parabólica. Con el objeto de obtener la mejor iluminación en el piso, se tiene que colocar una fuente de luz en el foco de la superficie. Si 10.0 m hacia abajo de la parte superior de la cúpula el diámetro es 15.0 m, ¿cuál será la mejor ubicación de la fuente de luz?

Piénsese en un plano que corta a la cúpula para formar la parábola que aparece en la figura 26. El vértice de la parábola está en $(0, 0)$ y la parábola abre hacia abajo. Así, la ecuación es $x^2 = 4py$. Puesto que el diámetro es de 15.0 m cuando y es -10.0 m los puntos $(-7.5, -10)$ y $(7.5, -10)$ están en la parábola. Utilícese $(7.5, -10)$ en la ecuación para encontrar p .

$$x^2 = 4py$$

$$(7.5)^2 = 4p(-10)$$

$$p \approx -1.4$$

Así, la fuente de luz debería colocarse a 1.4 m por debajo de la parte superior de la cúpula.

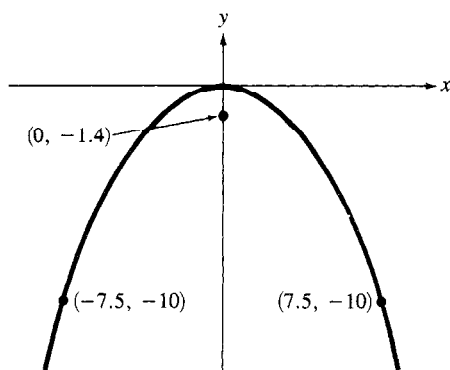


Figura 26

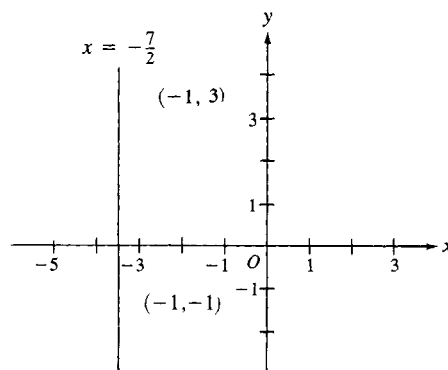


Figura 27

Si se desarrolla la ecuación de una parábola, el resultado es la forma general de la ecuación. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}(y + 1)^2 &= 5(x - 3) \\ y^2 + 2y + 1 &= 5x - 15 \\ y^2 - 5x + 2y + 16 &= 0.\end{aligned}$$

En la forma general, una parábola puede escribirse así:

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (A, E \neq 0) \quad \text{o} \quad Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (C, D \neq 0).$$

Para convertir la forma general a la forma ordinaria basta con completar el cuadrado de la variable elevada al cuadrado.

EJEMPLO 6 EJEMPLO 6

Escribir la ecuación $y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$ en la forma ordinaria determinar el vértice, el foco y la directriz. Asimismo, graficar la ecuación.

Se completa el cuadrado correspondiente a y .

$$\begin{aligned}y^2 - 2y &= 2x + 5 && \text{Se despeja } x \text{ de la ecuación dada.} \\ y^2 - 2y + 1 &= 2x + 5 + 1 && \text{Se suma 1 a ambos miembros.} \\ (y - 1)^2 &= 2x + 6 \\ (y - 1)^2 &= 2(x + 3)\end{aligned}$$

La parábola abre a la derecha y el vértice es $(-3, 1)$. Puesto que $4p = 2$, $p = \frac{1}{2}$. Así, el foco está $\frac{1}{2}$ unidad a la derecha de $(-3, 1)$. El foco es:

$$(h + p, k) = \left(-3 + \frac{1}{2}, 1\right) = \left(-\frac{5}{2}, 1\right).$$

La directriz es la recta vertical $x = h - p = -3 - \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$. Para graficar la parábola se traza los puntos adicionales $(-1, -1)$ y $(-1, 3)$ (véase la figura 27).

9.4. Ejercicios

En los ejercicios 1-12, determinar la ecuación de cada parábola.

1. Vértice en el origen y foco $\left(0, \frac{3}{2}\right)$
2. Vértice en $(0, 0)$ y foco $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$
3. Vértice en $(0, 0)$ y foco $(-3, 0)$
4. Vértice en el origen y foco $(0, -1)$
5. Directriz $x = -3$ y foco $(3, 0)$
6. Directriz $y = 5$ y foco $(0, -5)$
7. Directriz $y = -1$ y foco $(4, 5)$
8. Directriz $x = 8$ y foco $(-2, 6)$
9. Vértice $(4, -6)$, eje de simetría $x = 4$, y que pasa a través de $(0, -8)$
10. Vértice $(-5, -1)$, eje de simetría $y = -1$, y que pasa a través de $(-2, -4)$
11. Vértice $(8, -7)$, eje de simetría paralelo al eje x y que pasa a través de $(6, -8)$
12. Vértice $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, eje de simetría paralelo al eje y y que pasa a través de $\left(-\frac{9}{2}, 6\right)$

Dibujar la gráfica de cada parábola en los ejercicios 13-20.

- | | | |
|---------------------------------------|------------------------------|----------------------------|
| 13. $y^2 = 2x$ | 14. $x^2 = -4y$ | 15. $(x - 2)^2 = -(y + 1)$ |
| 16. $(y - 1)^2 = 8(x + 3)$ | 17. $x^2 - 4y + 8 = 0$ | 18. $x^2 - 4x - 2y = 0$ |
| 19. $y^2 + 4x + y - \frac{47}{4} = 0$ | 20. $y^2 + 4x - 6y + 15 = 0$ | |

En los ejercicios 21-26, escribir cada parábola en la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ o $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ y determinar el vértice, el foco y la directriz.

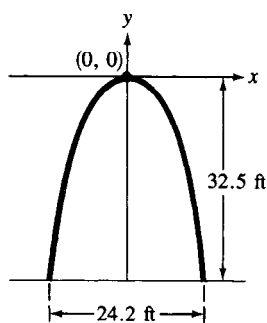
- | | |
|-------------------------------|----------------------------------|
| 21. $y^2 - 12x + 24 = 0$ | 22. $x^2 - 10x - 6y + 25 = 0$ |
| 23. $x^2 + 8x + 9y + 25 = 0$ | 24. $y^2 + 5x - 16y + 74 = 0$ |
| 25. $4x^2 - 12x - 2y - 3 = 0$ | 26. $25y^2 - 75x - 20y - 11 = 0$ |

En los ejercicios 27-34, completar los cuadrados para determinar si la ecuación representa un círculo, una elipse, hipérbola, parábola o sección cónica degenerada.

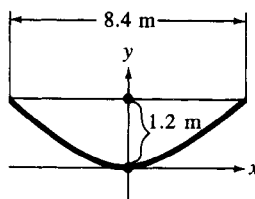
- | | |
|---|--|
| 27. $5x^2 - 2y^2 + x - 7 = 0$ | 28. $-3x^2 + 2x - y + 8 = 0$ |
| 29. $-x^2 - y^2 + x + y + 12 = 0$ | 30. $4x^2 + 4y^2 - x + 3y - 15 = 0$ |
| 31. $4x^2 - 49y^2 + 8x + 4 = 0$ | 32. $64x^2 + 25y^2 - 200y + 400 = 0$ |
| 33. $20x^2 + 10y^2 - 5x + 15y - 75 = 0$ | 34. $36x^2 - 100y^2 - 36x - 400y - 1291 = 0$ |

Resolver:

35. **Arquitectura.** Un edificio moderno tiene una entrada con forma de arco parabólico, la cual mide 32.5 ft de alto y 24.2 ft de ancho en la base. Encontrar una ecuación para la parábola (véase la figura) si el vértice corresponde al origen del sistema de coordenadas.



Ejercicio 35



Ejercicio 36

- 36. Astronomía.** Un radiotelescopio tiene una superficie parabólica. Si su profundidad es de 1.2 m y su ancho es de 8.4 m ¿qué tan lejos está el foco del vértice? (Véase la figura.)
- 37. Ingeniería.** Un túnel tiene forma de una parábola. La altura máxima es 12.8 m y el ancho es de 10.2 m en la base. ¿Cuál es el espacio libre vertical a 1.5 m de la orilla del túnel?
- 38. Agricultura.** La sección transversal de un canal de irrigación es una parábola. Si la superficie del agua tiene 34.6 ft de ancho y el canal tiene 22.0 ft de profundidad en el centro, ¿cuál es la profundidad a 5.0 ft de la orilla?

Para repasar

Determinar la ecuación de cada hipérbola en los ejercicios 39-40.

- 39.** Centro en $(4, -2)$, focos $(4, -7)$ y $(4, 3)$ y la longitud del eje transverso es 6.
- 40.** Vértices $(\pm 5, 0)$ y que pasa a través de $(10, 6)$

En los ejercicios 41-42, escribir cada ecuación en la forma $\frac{(x-h)^2}{m} - \frac{(y-k)^2}{n} = 1$ o $\frac{(y-k)^2}{m} - \frac{(x-h)^2}{n} = 1$.

41. $6x^2 - 5y^2 - 24x - 30y - 51 = 0$

42. $10y^2 - 8x^2 - 144x + 100y - 478 = 0$

9.5. ROTACIÓN DE EJES

La traslación de ejes se ha utilizado en secciones previas para efectuar despejes en ecuaciones de cónicas que no tienen el centro o el vértice en el origen. Si una cónica tiene ejes no paralelos a los ejes coordenados, una **rotación de ejes** puede ayudar a identificar y graficar la ecuación.

Para empezar considérese un sistema de coordenadas x, y y una rotación de los ejes alrededor del origen un ángulo θ . Se identifican los ejes nuevos x' y y' y se indica un punto arbitrario $P(x, y) = P(x', y')$. De esta forma el punto tendrá nombres en ambos sistemas de coordenadas, como se indica en la figura 28.

Transformación de (x', y') en (x, y)

Dibujar la recta que va del origen O al punto P y utilizar la r para denotar su longitud (véase la figura 29). Sea ϕ el ángulo formado entre esta recta y el eje positivo x' . Entonces

$$\cos \phi = \frac{x'}{r} \text{ y } \sin \phi = \frac{y'}{r}.$$

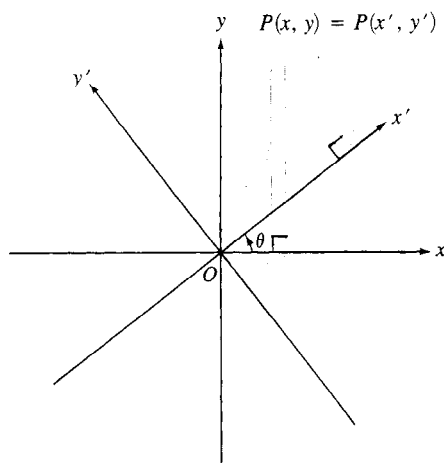


Figura 28. Rotación de ejes.

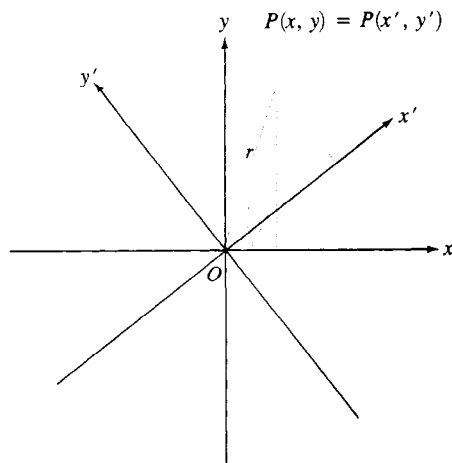


Figura 29. Ángulos involucrados en la rotación.

Despejando x' y y' ,

$$x' = r \cos \phi \quad \text{y} \quad y' = r \sin \phi.$$

De manera semejante, puesto que el ángulo entre OP y la parte positiva del eje x es $\theta + \phi$,

$$\cos(\theta + \phi) = \frac{x}{r} \quad \text{y} \quad \sin(\theta + \phi) = \frac{y}{r}.$$

Resolviendo para x y y ,

$$x = r \cos(\theta + \phi) \quad \text{y} \quad y = r \sin(\theta + \phi).$$

Al desarrollar mediante la fórmula de la suma de dos ángulos, se tiene que

$$x = r(\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi) \quad \text{y} \quad y = r(\sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi),$$

lo cual se puede escribir en la forma

$$x = r \cos \theta \cos \phi - r \sin \theta \sin \phi \quad \text{y} \quad y = r \sin \theta \cos \phi + r \cos \theta \sin \phi.$$

Pero como $r \cos \phi = x'$ y $r \sin \phi = y'$,

al sustituir se obtiene

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \quad \text{y} \quad y = x' \sin \theta + y' \cos \theta.$$

Ecuaciones de transformación

Si las coordenadas de un punto P son (x', y') en un sistema de coordenadas rotado en un ángulo de rotación θ , entonces las coordenadas de P en el sistema original son (x, y) , y están dadas por

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta.$$

EJEMPLO 1

Un sistema de coordenadas se rota a un ángulo de 30° . Si las coordenadas de un punto son $(2, 1)$ en el nuevo sistema rotado, encontrar las coordenadas del punto en el sistema original.

La figura 30 muestra a $(2, 1)$ como las coordenadas de P en el sistema de coordenadas x', y' . Para encontrar las coordenadas x, y de P se sustituye $x' = 2$, $y' = 1$, y $\theta = 30^\circ$ en las ecuaciones del teorema.

$$\begin{aligned}
 x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta = 2 \cdot \cos 30^\circ - 1 \cdot \sin 30^\circ \\
 &= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 1}{2} \\
 y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta = 2 \cdot \sin 30^\circ + 1 \cdot \cos 30^\circ \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

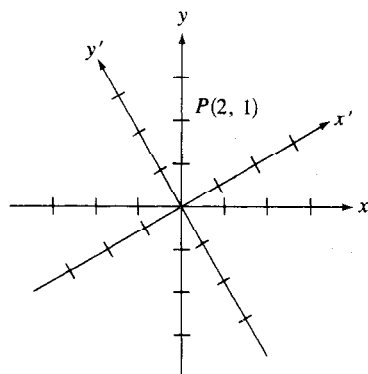


Figura 30

Al aproximar $\sqrt{3}$ como 1.7 se tiene

$$x \approx \frac{2(1.7) - 1}{2} = 1.2 \quad \text{y} \quad y \approx \frac{2 + 1.7}{2} = 1.85.$$

Con referencia a la figura 30, las coordenadas (1.2, 1.85) de P en el sistema de coordenadas x, y , resultan correctas. \square

Transformación de (x, y) en (x', y')

En las ecuaciones que involucran coordenadas en los sistemas original y rotado también se pueden despejar x' y y' en términos de x y y .

Ecuaciones de transformación

Si las coordenadas de un punto P son (x, y) en un sistema de coordenadas dado, las coordenadas de P en un sistema de coordenadas x', y' rotado un ángulo θ , son (x', y') y están dadas por

$$\begin{aligned}
 x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\
 y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta.
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2

Un sistema de coordenadas se rota un ángulo de 45° . Si las coordenadas de un punto son (2, 5) en el sistema original, encontrar las coordenadas del punto en un sistema rotado.

La figura 31 muestra dos pares de ejes y el punto $P(2, 5)$. Para encontrar las coordenadas x', y' de P , se sustituye $x = 2$, $y = 5$ y $\theta = 45^\circ$ en las ecuaciones del teorema.

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta = 2 \cdot \cos 45^\circ + 5 \cdot \sin 45^\circ$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta = -2 \cdot \sin 45^\circ + 5 \cdot \cos 45^\circ$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Al aproximar $\sqrt{2}$ como 1.4, se tiene

$$x' \approx \frac{7}{1.4} = 5 \quad \text{y} \quad y' \approx \frac{3}{1.4} \approx 2.14.$$

Las coordenadas (5, 2.14) de P en el sistema de coordenadas x' y' resultan correctas, como se muestra en la figura 31.

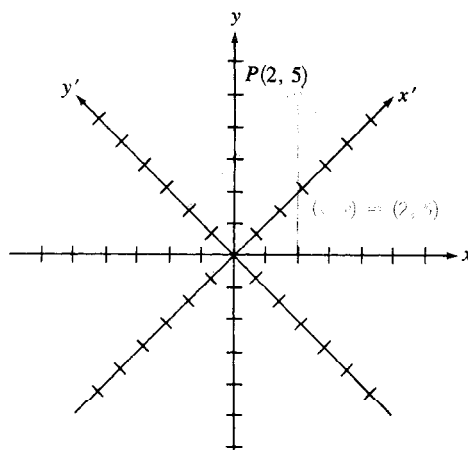


Figura 31

Simplificación de ecuaciones

El verdadero valor de la rotación de ejes se comprende cuando se utiliza para cambiar una ecuación determinada a una ecuación equivalente, pero más sencilla, con coordenadas en un sistema rotado. Una ecuación cuya gráfica podría ser desconocida se puede reconocer fácilmente en su forma nueva. Por ejemplo, considérese la ecuación de segundo grado.

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8.$$

Supóngase que se rotan los ejes un ángulo de 45° y se determinan las coordenadas (x', y') de un punto (x, y) en la gráfica de esta ecuación.

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ$$

$$= x' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - y' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ$$

$$= x' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + y' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$$

Sustituir estos valores de x y y en la ecuación $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$.

$$\begin{aligned} 5\left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 6\left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right) + 5\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right)^2 &= 8 \\ 5\left(\frac{x'^2 - 2x'y' + y'^2}{2}\right) - 6\left(\frac{x'^2 - y'^2}{2}\right) + 5\left(\frac{x'^2 + 2x'y' + y'^2}{2}\right) &= 8 \\ 5x'^2 - 10x'y' + 5y'^2 - 6x'^2 + 6y'^2 + 5x'^2 + 10x'y' + 5y'^2 &= 16 \\ 4x'^2 + 16y'^2 &= 16 \\ \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{1} &= 1 \end{aligned}$$

En el sistema de coordenadas x' y' se reconoce que la gráfica de esta ecuación es una elipse donde $a = 2$ y $b = 1$ (véase la figura 32).

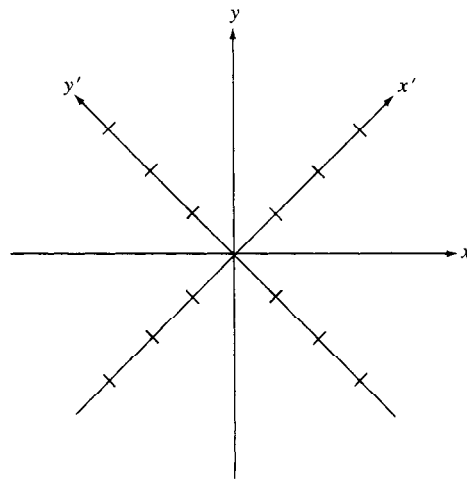


Figura 32

Rotación para eliminar el término en xy

Así, para graficar $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$, se eliminó el término en xy rotando los ejes para después obtener una ecuación de x' y y' que ya se conoce. Este es un caso específico de un procedimiento general. Cualquier ecuación de segundo grado con un término en xy se puede transformar en una ecuación sin término en $x' y'$. Para lograr esto se debe determinar el ángulo de rotación. Supóngase que se considera una ecuación de segundo grado de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0.$$

Se sustituye $x' \cos \theta - y' \sin \theta$ en x y $x' \sin \theta + y' \cos \theta$ en y .

$$\begin{aligned} A(x' \cos \theta - y' \sin \theta)^2 + B(x' \cos \theta - y' \sin \theta)(x' \sin \theta + y' \cos \theta) \\ + C(x' \sin \theta + y' \cos \theta)^2 + F &= 0 \\ A(x'^2 \cos^2 \theta - 2x'y' \cos \theta \sin \theta + y'^2 \sin^2 \theta) \\ + B(x'^2 \cos \theta \sin \theta - x'y' \sin^2 \theta + x'y' \cos^2 \theta - y'^2 \sin \theta \cos \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C(x'^2 \operatorname{sen}^2 \theta + 2x'y' \operatorname{sen} \theta \cos \theta + y'^2 \cos^2 \theta) + F = 0 \\
& (A \cos^2 \theta + B \cos \theta \operatorname{sen} \theta + C \operatorname{sen}^2 \theta)x'^2 \\
& + (-2A \cos \theta \operatorname{sen} \theta - B \operatorname{sen}^2 \theta + B \cos^2 \theta + 2C \operatorname{sen} \theta \cos \theta)x'y' \\
& + (A \operatorname{sen}^2 \theta - B \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta)y'^2 + F = 0
\end{aligned}$$

Así se obtiene

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + F = 0,$$

donde

$$\begin{aligned}
A' &= A \cos^2 \theta + B \cos \theta \operatorname{sen} \theta + C \operatorname{sen}^2 \theta \\
B' &= -2A \cos \theta \operatorname{sen} \theta - B \operatorname{sen}^2 \theta + B \cos^2 \theta + 2C \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\
&= (C - A)2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \\
C' &= A \operatorname{sen}^2 \theta - B \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta.
\end{aligned}$$

La meta era obtener una ecuación sin el término $x'y'$. Esto sucede si $B' = 0$. Lo cual significa que

$$(C - A)2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) = 0.$$

Pero por las fórmulas del ángulo doble se tiene

$$(C - A) \operatorname{sen} 2\theta + B \cos 2\theta = 0,$$

$$\text{o} \quad B \cos 2\theta = (A - C) \operatorname{sen} 2\theta.$$

Al dividir ambos lados entre $B \operatorname{sen} 2\theta$, se tiene

$$\frac{\cos 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta} = \frac{A - C}{B},$$

$$\text{o} \quad \cot 2\theta = \frac{A - C}{B}.$$

Se sabe que $B \neq 0$ porque de otra manera no sería necesario rotar los ejes. El valor de θ que resuelve esta ecuación es el ángulo deseado de rotación.

Eliminación del término en xy

Para eliminar el término en xy , en

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0,$$

sustituir

$$x = x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta$$

$$y = x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta,$$

donde θ es una solución de la ecuación

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}.$$

EJEMPLO 3

Eliminar el término en xy en $8x^2 + 4xy + 5y^2 = 36$, y graficar.

Como $A = 8$, $B = 4$ y $C = 5$, se tiene

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{8 - 5}{4} = \frac{3}{4} = 0.75.$$

Mediante el ejemplo de una calculadora se puede determinar 2θ , y por tanto θ , que es $26^\circ 30'$. Por otro lado, ya que lo que realmente se necesita es $\sin \theta$ y $\cos \theta$, se pueden hallar estos valores sin determinar θ .

Trazar un triángulo donde $\cot 2\theta = \frac{3}{4}$, como en la figura 33. La longitud de la hipotenusa, 5, se puede

encontrar utilizando el teorema de Pitágoras. Entonces, $\cos 2\theta = \frac{3}{5}$. Mediante el uso de las fórmulas del semiángulo, se tiene

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1}{5}} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos \theta &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{4}{5}} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

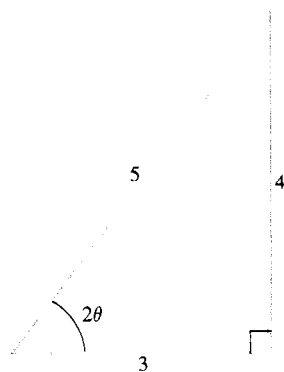


Figura 33

Cuando se rotan los ejes, es más sencillo escoger el valor de 2θ entre 0 y π de tal forma que θ sea un ángulo entre 0 y $\pi/2$. Como resultado, los valores de $\sin \theta$ y $\cos \theta$ se pueden elegir positivos. Así,

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta = x' \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - y' \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2x' - y'}{\sqrt{5}},$$

$$\text{y} \quad y = x' \sin \theta + y' \cos \theta = x' \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + y' \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}.$$

Sustituir estos valores en $8x^2 + 4xy + 5y^2 = 36$.

$$\begin{aligned}8\left(\frac{2x' - y'}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(\frac{2x' - y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}\right) + 5\left(\frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}\right)^2 &= 36 \\ 8\left(\frac{4x'^2 - 4x'y' + y'^2}{5}\right) + 4\left(\frac{2x'^2 + 3x'y' - 2y'^2}{5}\right) + 5\left(\frac{x'^2 + 4x'y' + 4y'^2}{5}\right) &= 36\end{aligned}$$

$$32x'^2 - 32x'y' + 8y'^2 + 8x'^2 + 12x'y' - 8y'^2 + 5x'^2 + 20x'y' + 20y'^2 = 180$$

$$45x'^2 + 20y'^2 = 180$$

Al dividir entre 180 se obtiene

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1,$$

y se reconoce la gráfica como una elipse, donde $b = 2$ y $a = 3$. (véase la figura 34). \square

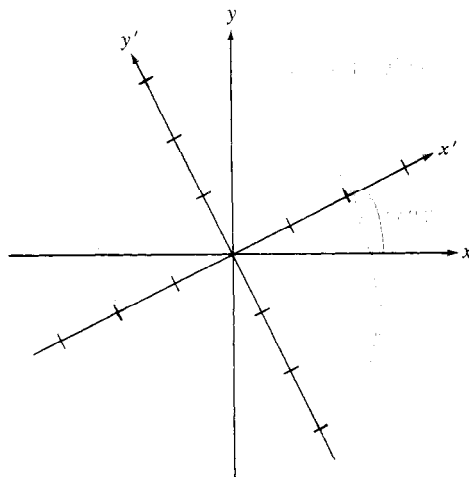


Figura 34

EJEMPLO 4

Eliminar el término en xy , en $24xy - 7x^2 = 144$, y graficar.

Al escribir $A = -7$, $B = 24$, $C = 0$, se tiene

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{-7}{24} = -\frac{7}{24}.$$

Ya que $\cot 2\theta$ es negativa, 2θ es un ángulo en el segundo cuadrante y $\cos 2\theta = -\frac{7}{25}$ (véase la figura 35). Entonces θ está en el primer cuadrante (aproximadamente en $53^\circ 10'$), y

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - (-\frac{7}{25})}{2}} = \sqrt{\frac{32}{50}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + (-\frac{7}{25})}{2}} = \sqrt{\frac{18}{50}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$

Así, $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta = x' \cdot \frac{3}{5} - y' \cdot \frac{4}{5} = \frac{3x' - 4y'}{5},$

y $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta = x' \cdot \frac{4}{5} + y' \cdot \frac{3}{5} = \frac{4x' + 3y'}{5}.$

Al sustituir se obtiene

$$24\left(\frac{x' - y'}{2}\right)\left(\frac{x' + y'}{2}\right) - 7\left(\frac{x' - y'}{2}\right)^2 = 144,$$

y al simplificar se obtiene

$$\frac{x'^2}{16} - \frac{y'^2}{9} = 1.$$

Ahora se reconoce la gráfica como una hipérbola, donde $a = 4$ y $b = 3$. La gráfica aparece en la figura 36.

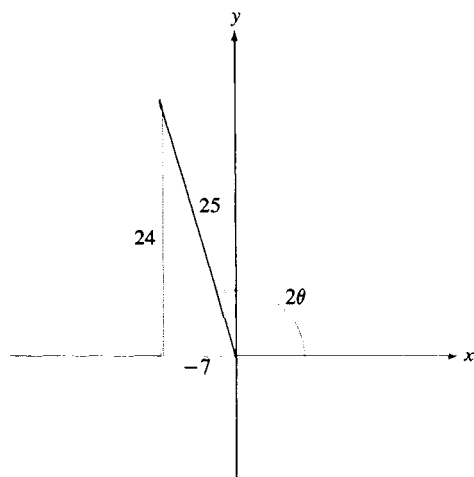


Figura 35

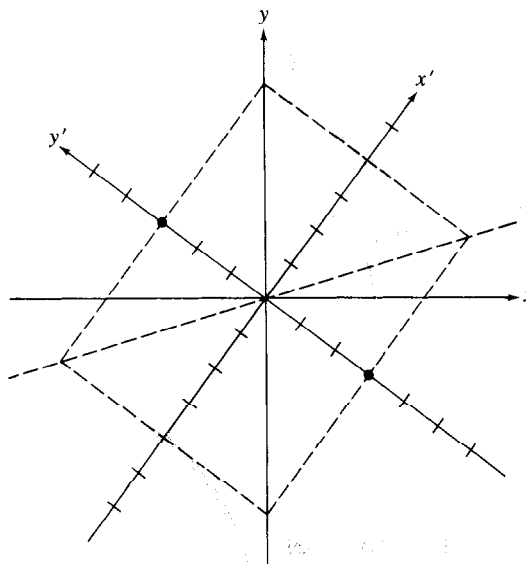


Figura 36

NOTA. Solamente se han considerado las ecuaciones de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$. La ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ puede requerir una traslación de ejes después de la rotación para poder obtener una ecuación en su expresión más sencilla.

9.5. Ejercicios

En los ejercicios 1-4 se dan el ángulo de rotación y la coordenadas en el sistema nuevo. Determinar las coordenadas del sistema original.

1. 30° ; (4, 3)

2. 45° ; (1, 5)

3. 45° ; (3, -2)

4. 60° ; (3, 4)

En los ejercicios 5-8 están dados los ángulos de rotación y las coordenadas del sistema original. Determinar las coordenadas del sistema rotado.

5. 45° ; (2, 4)

6. 30° ; (1, 3)

7. 60° ; (-3, 1)

8. 45° ; $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

En los ejercicios 9-12 determinar la ecuación nueva rotando el ángulo indicado.

9. $x^2 - y^2 = 1$; 90°

10. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 90°

11. $x^2 + 4xy + y^2 - 16 = 0$; 45°

12. $4xy - 3x^2 = 10$; $\theta = \tan^{-1} 2$

En los ejercicios 13-22 eliminar el término en xy y graficar cada ecuación.

13. $xy = -1$ 14. $xy = 12$ 15. $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 36$
 16. $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 = 10$ 17. $9x^2 + 24xy + 16y^2 = 100$ 18. $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2 = 0$
 19. $x^2 - \sqrt{3}xy + 12 = 0$ 20. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 4$
 21. $x^2 - 2xy + y^2 - 4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 8\sqrt{2} = 0$ 22. $x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 4y = -8$
 23. Mostrar que para cualquier rotación de coordenadas la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ se convierte en $x'^2 + y'^2 = r^2$.
 24. Se puede mostrar que para cualquier rotación, $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$. Así, para una rotación que elimina el término en xy , se tiene $-4A'C' = B^2 - 4AC$. Utilizar esto para probar que si $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ no es una cónica degenerada, entonces es una parábola si $B^2 - 4AC = 0$, una elipse si $B^2 - 4AC < 0$, y una hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$.

Utilizar el resultado del ejercicio 24 para determinar la naturaleza de las gráficas de las cónicas en los ejercicios 25-28.

25. $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 = 10$ 26. $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 36$
 27. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 4$ 28. $x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 4y = -8$

Determinar la ecuación de cada parábola en los ejercicios 29-30.

29. Directriz $y = 4$ y foco en $(3, -6)$
 30. Vértice en $(4, -2)$, eje de simetría $y = -2$, y pasa a través de $(6, 2)$

En los ejercicios 31-32 escribir cada ecuación en la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ o $(x - h)^2 = 4p(y - k)$.

31. $x^2 - 10x - 20y + 65 = 0$ 32. $y^2 + 2x + 16y + 70 = 0$

En los ejercicios 33-36 determinar la naturaleza de la gráfica de cada ecuación.

33. $2x^2 - 2y^2 + x - y - 5 = 0$ 34. $2x^2 + 2y^2 + x - y - 5 = 0$
 35. $x^2 + 2y^2 - 3x + y + 1 = 0$ 36. $2y^2 - 2x + y + 4 = 0$

Considérese el punto $(4, 3)$ en un sistema de coordenadas rectangulares que está a $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ unidades del origen. Dibujar una recta al punto desde el origen de manera que se forme un ángulo θ con el semieje x positivo. El ángulo θ se puede determinar al hallar $\tan^{-1} \frac{y}{x}$ (véase la figura 37).

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \tan^{-1} \frac{3}{4} \approx 36^\circ 50'$$

El punto $(4, 3)$ está a 5 unidades del origen en una recta que forma un ángulo de $36^\circ 50'$ con el semieje x positivo. En *coordenadas polares*, el punto se denota por $(5, 36^\circ 50')$.

Construcción del sistema de coordenadas polares

Para construir un sistema de coordenadas polares, se selecciona un punto denominado **polo** u **origen** y un rayo extendiéndose a la derecha denominado **eje polar** (véase la figura 38). El punto P se denota por (r, θ) como en el ejemplo que utiliza el punto $(4, 3)$.

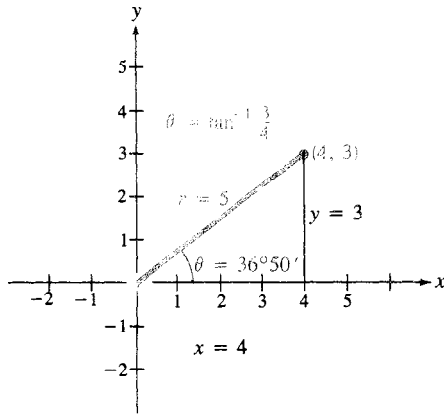


Figura 37

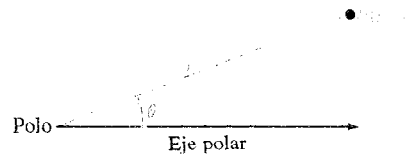


Figura 38. Coordenadas polares.

El ángulo θ es positivo cuando se mide en sentido antihorario (en dirección contraria a las manecillas del reloj) y negativo cuando se le mide en sentido horario (en la dirección de las manecillas del reloj). El valor de r es positivo cuando se le mide a lo largo del rayo determinado por θ y negativo cuando se le mide en la dirección opuesta. Al punto $(4, 30^\circ)$ que aparece en la figura 39 se le denota utilizando varias coordenadas polares posibles.

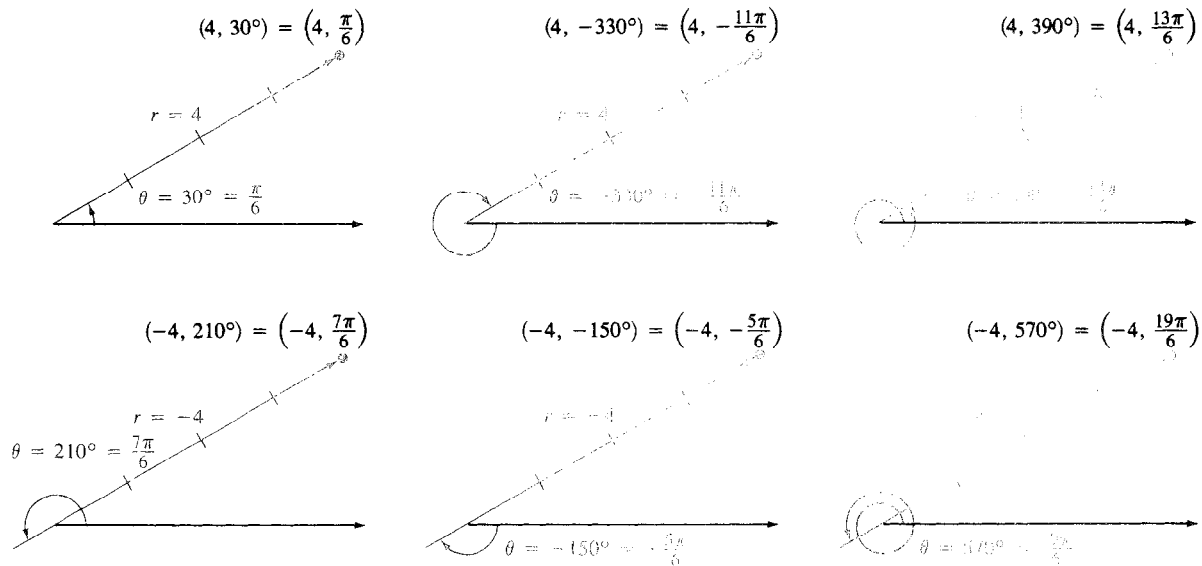


Figura 39

Es obvio que no es única la denotación de un punto en coordenadas polares. De hecho si (r, θ) es uno de las denotaciones, entonces $(r, \theta \pm k \cdot 360^\circ)$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ también son denotaciones. Es más, $(-r, \theta + 180^\circ)$ es una denotación, como también lo es $(-r, \theta + 180^\circ \pm k \cdot 360^\circ)$ donde $k = 0, 1, 2, \dots$. Así, existe una infinidad de denotaciones para un punto en coordenadas polares.

EJEMPLO 1

Graficar los puntos $(5, 60^\circ)$, $(3, \pi/2)$, $(-3, -\pi/2)$, $(3, -\pi/2)$, $(-3, \pi/2)$, $(5, 420^\circ)$, $(5, -300^\circ)$, $(-5, 240^\circ)$, $(3, 5\pi/4)$, $(1, \pi)$, $(-4, 180^\circ)$, $(1, -\pi)$, $(4, 150^\circ)$, y $(4, 720^\circ)$ en un sistema de coordenadas polares.

Los puntos están localizados en la figura 40.

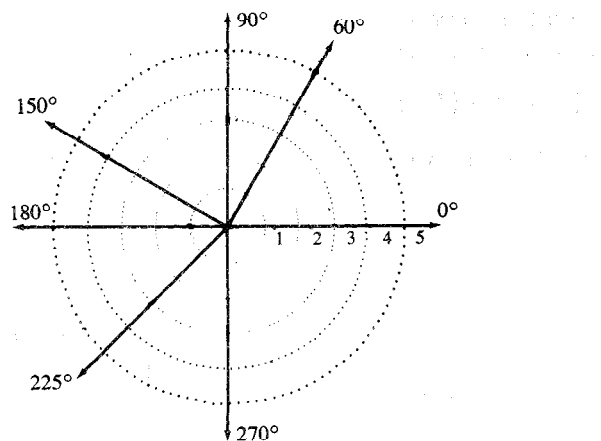


Figura 40. Graficación de puntos.

Conversión entre sistemas

Ahora se investiga el problema de la conversión de un sistema de coordenadas a otro. Considérese el triángulo que aparece en la figura 41. Como

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \quad \text{y} \quad \sin \theta = \frac{y}{r},$$

despejando x y y ,

$$x = r \cos \theta \quad \text{y} \quad y = r \sin \theta.$$

Además,

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{y} \quad \tan \theta = \frac{y}{x},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}.$$

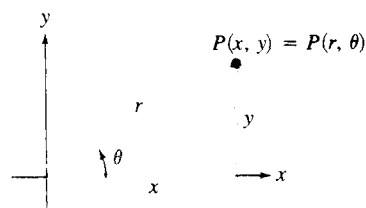


Figura 41

Ecuaciones para conversión de coordenadas

Las siguientes ecuaciones se utilizan para la conversión entre sistemas de coordenadas.

De polar a rectangular

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

De rectangular a polar

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

EJEMPLO 2

Convertir $(3, 90^\circ)$, $(5, \frac{\pi}{6})$, $(2, -\frac{\pi}{4})$, y $(7, 900^\circ)$ a coordenadas rectangulares.

*Coordenadas
polares*

Conversión

Coordenadas rectangulares

$(3, 90^\circ)$

$$x = r \cos \theta = 3 \cos 90^\circ = 0$$

$(0, 3)$

$$y = r \sin \theta = 3 \sin 90^\circ = 3$$

$(5, \frac{\pi}{6})$

$$x = r \cos \theta = 5 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2})$

$$y = r \sin \theta = 5 \sin \frac{\pi}{6} = \frac{5}{2}$$

$(2, -\frac{\pi}{4})$

$$x = r \cos \theta = 2 \cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

$$y = r \sin \theta = 2 \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$(7, 900^\circ)$

$$x = 7 \cos 900^\circ = 7 \cos 180^\circ = -7$$

$(-7, 0)$

$$y = 7 \sin 900^\circ = 7 \sin 180^\circ = 0$$

EJEMPLO 3

Convertir $(1, 1)$, $(5, 0)$, $(-2, 3)$, y $(\sqrt{3}, -1)$ a coordenadas polares.

*Coordenadas
rectangulares*

Conversión

*Coordenadas
polares*

$(1, 1)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \pm 2k\pi)$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1; \theta = \frac{\pi}{4} \pm 2k\pi$$

$(5, 0)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(5)^2 + (0)^2} = 5$$

$(5, 0^\circ \pm k \cdot 360^\circ)$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{5} = 0; \theta = 0^\circ \pm k \cdot 360^\circ$$

$(-2, 3)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$$

$(\sqrt{13}, \tan^{-1}(-\frac{3}{2}) \pm 2k\pi)$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = -\frac{3}{2}; \theta = \tan^{-1}(-\frac{3}{2}) \pm 2k\pi$$

$(\sqrt{3}, -1)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

$(2, -\frac{\pi}{6} \pm 2k\pi)$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \theta = -\frac{\pi}{6} \pm 2k\pi$$

Conversión de ecuaciones

Si una ecuación se da en un sistema de coordenadas, se puede cambiar a otro sistema utilizando las relaciones de conversión apropiadas.

EJEMPLO 4

Convertir a coordenadas rectangulares.

a) $r = 6 \cos \theta$

$$r = 6 \cos \theta$$

$$r^2 = 6r \cos \theta$$

$$x^2 + y^2 = 6x$$

$$x^2 - 6x + y^2 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 9$$

$$(x - 3)^2 + y^2 = 3^2$$

b) $r \cos \theta = 6$

$$r \cos \theta = 6$$

$$x = 6$$

EJEMPLO 5

Convertir a coordenadas polares.

a) $3x + 2y = 6$

$$3x + 2y = 6$$

$$3r \cos \theta + 2r \sin \theta = 6$$

$$r(3 \cos \theta + 2 \sin \theta) = 6$$

b) $(x^2 + y^2)^2 = 3x^2 + 3y^2 + 5x + 6$

$$(x^2 + y^2)^2 = 3x^2 + 3y^2 + 5x + 6$$

$$(r^2)^2 = 3r^2 \cos^2 \theta + 3r^2 \sin^2 \theta + 5r \cos \theta + 6$$

$$r^4 = 3r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 5r \cos \theta + 6$$

$$r^4 = 3r^2(1) + 5r \cos \theta + 6$$

$$r^4 = 3r^2 + 5r \cos \theta + 6$$

Para graficar ecuaciones en coordenadas polares, en algunos casos puede ayudar convertirlas a coordenadas rectangulares, ya que la curva entonces podrá reconocerse por la experiencia anterior.

Graficación

Graficar la ecuación $r = 6$.

EJEMPLO 6

Nótese que no importa el valor que tenga θ , r es 6. Entonces la gráfica es un círculo con centro en el origen y de radio 6. También, puesto que

$$r = 6,$$

$$r^2 = 36$$

$$x^2 + y^2 = 36.$$

Así, la ecuación en coordenadas rectangulares confirma que la gráfica es el círculo mostrado en la figura 42, en la que se han localizado además varios puntos.

r	θ
6	0°
6	60°
6	270°

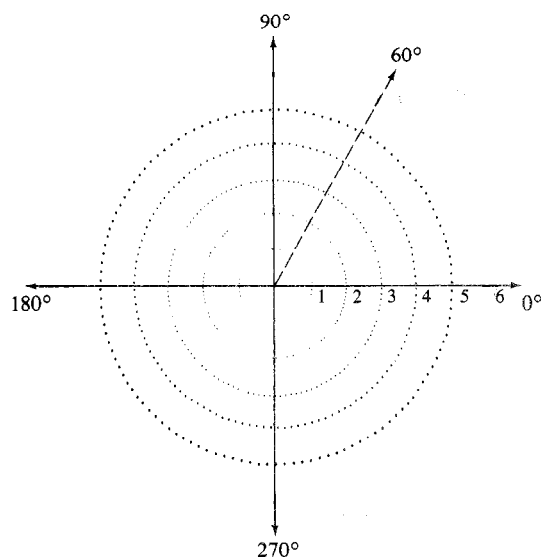


Figura 42

EJEMPLO 7

Graficar la ecuación $r = 6 \cos \theta$.

Del ejemplo 4 a) se sabe que esta ecuación en coordenadas rectangulares es $(x - 3)^2 + y^2 = 9$ y representa un círculo con centro en $(3, 0)$ y radio 3. Sin embargo, hay que graficarla en un sistema de coordenadas polares. Se calculan valores en una tabla, se grafican los puntos y se traza la curva de la figura 43.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
r	6	$3\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$	$3\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	3	3	0	0

Debido a la periodicidad de la función coseno, si se deja que θ aumente a través de todos los números reales, se obtienen los mismos puntos, una y otra vez.

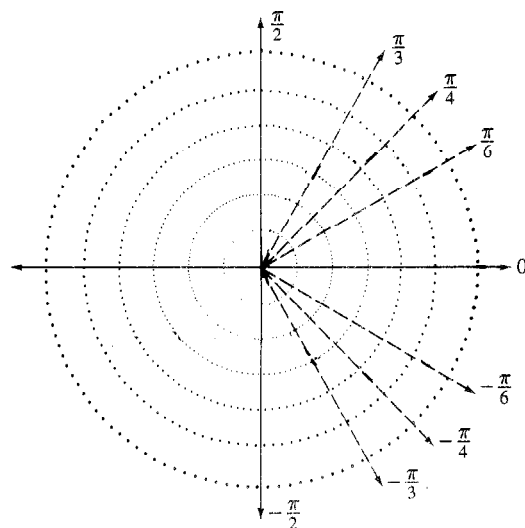


Figura 43

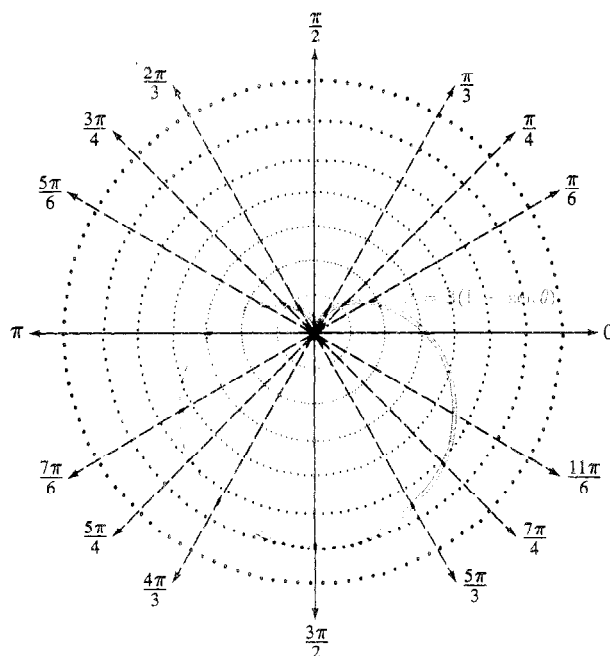


Figura 44

EJEMPLO 8

Graficar la ecuación $r = 3(1 - \operatorname{sen} \theta)$.

La conversión a coordenadas rectangulares no ayuda a graficar esta ecuación, así que nos concentramos en graficar puntos. Para facilitar la graficación, aproximar r con decimales.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
r	3	1.5	0.9	0.4	0	0.4	0.9	1.5	3	4.5	5.1	5.6	6	5.6	5.1	4.5

La gráfica mostrada en la figura 44 se denomina **cardioide**, por tener forma de corazón. ■

9.6. Ejercicios

Graficar los puntos dados en coordenadas polares en los ejercicios 1-12.

- | | | | |
|-------------------------|--------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 1. $(3, 30^\circ)$ | 2. $(4, -30^\circ)$ | 3. $(-3, 30^\circ)$ | 4. $(-4, -30^\circ)$ |
| 5. $(2, \frac{\pi}{2})$ | 6. $(4, -\frac{\pi}{2})$ | 7. $(-2, \frac{\pi}{4})$ | 8. $(-3, \frac{3\pi}{4})$ |
| 9. $(4, 540^\circ)$ | 10. $(3, -840^\circ)$ | 11. $(-1, 7\pi)$ | 12. $(0, -\frac{7\pi}{8})$ |

Cambiar de coordenadas polares a coordenadas rectangulares en los ejercicios 13-20.

- | | | | |
|---------------------------|----------------------------|--------------------------|---------------------------|
| 13. $(6, 30^\circ)$ | 14. $(-6, 30^\circ)$ | 15. $(8, \frac{\pi}{4})$ | 16. $(8, -\frac{\pi}{4})$ |
| 17. $(2, \frac{4\pi}{3})$ | 18. $(3, \frac{23\pi}{6})$ | 19. $(5, 450^\circ)$ | 20. $(-5, -750^\circ)$ |

Cambiar de coordenadas rectangulares a coordenadas polares en los ejercicios 21-28.

21. $(-3, 4)$ 22. $(8, -6)$ 23. $(0, -6)$ 24. $(-4, 0)$
25. $(-7, -7)$ 26. $(-2, 2)$ 27. $(12, -5)$ 28. $(-4, 2)$

En los ejercicios 29-34 cambiar cada ecuación a coordenadas polares.

29. $x^2 + y^2 = 25$ 30. $3x - 4y = 6$ 31. $y^2 = 3x$
32. $x^2 + xv + v^2 = 3$ 33. $x^2 + y^2 + 8y = 0$ 34. $x^2 = y^2 + 9$

En los ejercicios 35-40 cambiar cada ecuación a coordenadas rectangulares.

35. $r \sin \theta = 3$ 36. $r = 6$ 37. $r = 4 \cos \theta$
38. $r(5 \cos \theta - 3 \sin \theta) = 15$ 39. $\theta = \frac{\pi}{3}$ 40. $r \sin^2 \theta = 4 \cos \theta$

En los ejercicios 41-52 graficar cada ecuación utilizando coordenadas polares.

- 41.** $r \operatorname{sen} \theta = 3$ **42.** $r \cos \theta = -2$ **43.** $r = 4 \cos \theta$
44. $r = -4 \cos \theta$ **45.** $r(5 \cos \theta - 3 \operatorname{sen} \theta) = 15$ **46.** $\theta = -\frac{\pi}{4}$
47. $r = 6 \operatorname{sen} \theta$ **48.** $r^2 = 9 \cos 2\theta$ **49.** $r = \theta$ ($\theta \geq 0$)
 (lemniscata) (espiral)
50. $r = -\theta$ ($\theta \geq 0$) **51.** $r = 3(1 - \cos \theta)$ **52.** $r = 4 \cos 2\theta$
 (espiral) (cardioide) (rosa)

En los ejercicios 53-54 eliminar el término en xy .

53. $x^2 - 6xy + y^2 = 5$ 54. $x^2 + 2xy + y^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0$

Si cada número complejo $z = x + yi$ se asocia con su par ordenado correspondiente (x, y) en un sistema de coordenadas rectangulares, se tiene el **plano complejo** (véase la figura 45). El eje x se denomina **eje real** y el eje y se denomina **eje imaginario**.

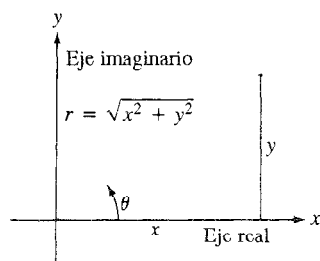


Figura 45. Forma polar.

El **valor absoluto** de un número complejo $z = x + yi$ se denota por $|z|$ y se define como

Con base en la sección 9.6, x y y están relacionadas con r y θ por las ecuaciones

$$x = r \cos \theta \quad y = r \operatorname{sen} \theta.$$

Por ello, z puede escribirse en la siguiente **forma polar o trigonométrica**,

$$\begin{aligned} z &= x + yi \\ &= r \cos \theta + ir \sin \theta \\ &= r(\cos \theta + i \sin \theta), \end{aligned}$$

donde r es el valor absoluto de z y θ es un **argumento** de z . Se dice un argumento ya que $\theta + 2k$ es también un argumento de z , para cualquier entero k .

Forma polar de número complejo

La forma polar de un número complejo $z = x + yi$, está dada por

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

EJEMPLO 1

Determinar r y θ y escribir los siguientes números complejos en forma polar.

$$\begin{aligned} \text{a) } z &= 1 - i\sqrt{3} \\ r &= \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 \\ z &= 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{aligned}$$

Para tener la forma polar, $\cos \theta = 1/2$ y $\sin \theta = -\sqrt{3}/2$, y por tanto,

$$\theta = \frac{5\pi}{3} \pm 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Así, $|z| = 2$, un argumento de z es $5\pi/3$, y la forma polar es

$$\begin{aligned} z &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= 2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

La figura 46 es la gráfica de z .

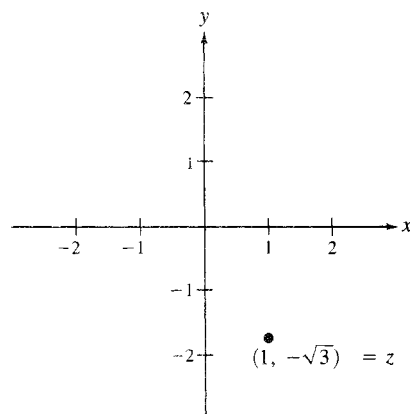


Figura 46 $z = 1 - i\sqrt{3}$

b) $z = -2 + 2i$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} z &= -2 + 2i = \frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}i \\ &= 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \end{aligned}$$

De esto, $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Así, $\theta = \frac{3\pi}{4} \pm 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$

y $z = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}\right).$

La figura 47 es la gráfica de z .

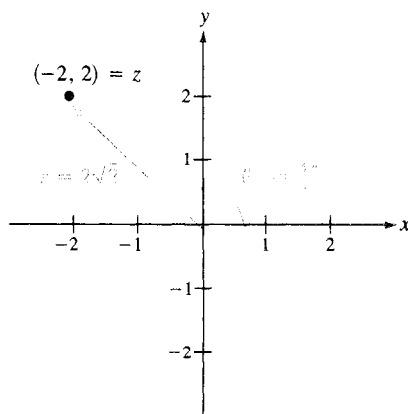


Figura 47 $z = -2 + 2i$

EJEMPLO 2

Escribir $z = 4(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$ en forma rectangular.

$$\begin{aligned} z &= 4(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) \\ &= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \\ &= 2\sqrt{3} + 2i \end{aligned}$$

Forma polar del producto y el cociente

La ventaja de la forma polar está en que permite multiplicar, dividir, elevar a potencias y extraer raíces de números complejos de manera más fácil. Supongase que se tienen dos números complejos:

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \quad \text{y} \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2).$$

Multiplicar los dos números,

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\
&= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\
&= r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + i^2 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) \\
&= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)] \\
&= r_1 r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen} (\theta_1 + \theta_2)]
\end{aligned}$$

En modo similar se puede mostrar que si $r_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen} (\theta_1 - \theta_2)].$$

Producto y cociente de números complejos

Dados los números complejos $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen} (\theta_1 + \theta_2)].$$

Así, $r_1 r_2$ es el valor absoluto y $\theta_1 + \theta_2$ es un argumento del producto.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen} (\theta_1 - \theta_2)].$$

Así, r_1/r_2 es el valor absoluto y $\theta_1 - \theta_2$ es un argumento del cociente.

EJEMPLO 3

Encontrar el producto y el cociente de

$$z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{y} \quad z_2 = 6\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1 r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen} (\theta_1 + \theta_2)] \\
&= (2)(6) \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \right) \right] \\
&= 12 \left[\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right] \\
&= 12[0 + i(1)] = 12i
\end{aligned}$$

Como verificación se puede multiplicar en forma rectangular.

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right) & \text{y} & & z_2 &= 6\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right) \\
&= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) & & & &= 6\left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \sqrt{3} + i & & & &= 3 + 3i\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (\sqrt{3} + i)(3 + 3i\sqrt{3}) \\
&= 3\sqrt{3} + \sqrt{3}(3\sqrt{3})i + 3i + 3\sqrt{3}i^2 \\
&= 3\sqrt{3} + 9i + 3i + 3\sqrt{3}(-1) \\
&= 12i \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \\
&= \left[\cos \left(- \right) + i \operatorname{sen} \left(- \right) \right] \\
&= \frac{1}{3} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right] \\
&= \frac{1}{3} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i \left(-\frac{1}{2} \right) \right] \\
&= \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{i}{6}
\end{aligned}$$

Para verificar esto se divide en forma rectangular.

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{3} + i}{3 + 3i\sqrt{3}} \\
&= \frac{(\sqrt{3} + i)}{(3 + 3i\sqrt{3})} \cdot \frac{(3 - 3i\sqrt{3})}{(3 - 3i\sqrt{3})} \\
&= \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}(3\sqrt{3})i + 3i - 3\sqrt{3}i^2}{(3)^2 + (3\sqrt{3})^2} \\
&= \frac{6\sqrt{3} - 6i}{36} = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{i}{6}
\end{aligned}$$

Potencias en forma polar

Si se multiplica $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ por si mismo para encontrar z^2 , se obtiene

$$\begin{aligned}
z^2 &= r \cdot r [\cos(\theta + \theta) + i \operatorname{sen}(\theta + \theta)] \\
&= r^2 [\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta], \\
z^3 &= z^2 \cdot z \\
&= r^2 \cdot r [\cos(2\theta + \theta) + i \operatorname{sen}(2\theta + \theta)] \\
&= r^3 [\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta].
\end{aligned}$$

Este proceso se puede continuar para obtener una fórmula para z^n , la cual es el objetivo del teorema de DeMoivre [llamado así en honor del matemático francés Abraham DeMoivre (1667–1754)].

Teorema de DeMoivre

Para cualquier entero n positivo

$$z^n = r^n [\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta].$$

EJEMPLO 4

Si $z = 2 + 2i$, determinar z^6 y z^8 .

Ya que

$$r = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

se puede escribir

$$\begin{aligned} z &= 2 + 2i \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}i \\ &= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} z &= r (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \\ &= (2\sqrt{2})^6 \left(\cos 6 \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} 6 \frac{\pi}{4} \right) \\ &= (64)(8) \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \right) \\ &= 512(0 + i(-1)) \\ &= -512i. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} z &= (2\sqrt{2}) \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) \\ &= (256)(16)(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) \\ &= 4096(1 + i(0)) \\ &= 4096. \end{aligned}$$

EJEMPLO 5

Determinar z^{20} si $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Convertir a la forma polar.

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

Así,

$$z = (1) \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right]$$

da

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

lo cual significa que

$$\theta = \frac{5\pi}{3} \pm 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} z^{20} &= (1)^{20} \left(\cos 20 \cdot \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} 20 \cdot \frac{5\pi}{3} \right) \\ &= (1) \left(\cos \frac{100\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{100\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos \frac{100\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{100\pi}{3} \\
&= \cos \left(33\pi + \frac{1}{3}\pi \right) + i \operatorname{sen} \left(33\pi + \frac{1}{3}\pi \right) \quad \left(\frac{100}{3} = 33 + \frac{1}{3} \right) \\
&= \cos \left(32\pi + \pi + \frac{1}{3}\pi \right) + i \operatorname{sen} \left(32\pi + \pi + \frac{1}{3}\pi \right) \\
&= \cos \left[2(16)\pi + \frac{4\pi}{3} \right] + i \operatorname{sen} \left[2(16)\pi + \frac{4\pi}{3} \right] \\
&= \cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} \quad \left(\begin{array}{l} \cos(2\pi + \theta) = \cos \theta \\ \operatorname{sen}(2\pi + \theta) = \operatorname{sen} \theta \end{array} \right) \\
&= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \square
\end{aligned}$$

Raíces en forma polar

Una raíz n -ésima de un número complejo z es un número complejo w con la propiedad de que

$$w^n = z.$$

El teorema de DeMoivre puede utilizarse para probar que hay n distintas raíces n -ésimas de un número complejo z dado.

Raíces de números complejos

Las n distintas raíces n -ésimas de $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ están dadas por

$$r^{1/n} \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right]$$

donde $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

EJEMPLO 6

Encontrar las dos raíces cuadradas distintas de $z = 2\sqrt{3} + 2i$. Sea w_1 la raíz de $k = 0$, y w_2 la raíz de $k = 1$.

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2)^2} = \sqrt{4 \cdot 3 + 4} = \sqrt{16} = 4 \\
z &= 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) \\
&= 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right) \\
w_1 &= (4)^{1/2} \left[\cos \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + 0 \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + 0 \right) \right] \\
&= 2 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{12} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_2 &= (4)^{1/2} \left[\cos \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{2} \right) \right] \\
 &= 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{12} + \pi \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{12} + \pi \right) \right] \\
 &= 2 \left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{13\pi}{12} \right)
 \end{aligned}$$

Cuando $z = 1$, la n distintas raíces n -ésima de z , denominadas raíces n -ésimas de la unidad, son de interés especial para las matemáticas. En el siguiente ejemplo se encuentran las tres raíces cúbicas de 1.

EJEMPLO 7

Encontrar las tres raíces cúbicas de $z = 1$: w_1 , w_2 , y w_3 . Nótese que $z = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$.

$$\begin{aligned}
 w_1 &= (1)^{1/3} \left[\cos \left(\frac{1}{3} \cdot 0 + 0 \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{1}{3} \cdot 0 + 0 \right) \right] \quad k = 0 \\
 &= 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) \\
 &= 1 \\
 w_2 &= (1)^{1/3} \left[\cos \left(\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2(1)\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2(1)\pi}{3} \right) \right] \quad k = 1 \\
 &= \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \\
 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
 w_3 &= (1)^{1/3} \left[\cos \left(\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2(2)\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2(2)\pi}{3} \right) \right] \quad k = 2 \\
 &= \cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} \\
 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i
 \end{aligned}$$

Si las tres raíces cúbicas de la unidad se grafican en un plano complejo como se muestra en la figura 48, se observa que están igualmente espaciadas en el círculo unitario. Este siempre será el caso para las raíces n -ésimas de la unidad.

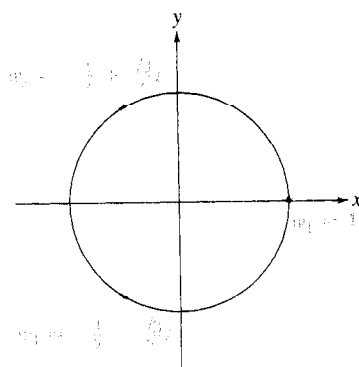


Figura 48

9.7. Ejercicios

En los ejercicios 1-12 determinar cada número complejo en forma geométrica en el plano complejo. Usar coordenadas rectangulares.

- | | | | |
|--------------------|----------------------|---------------------|--------------------------|
| 1. $z = 5 + 2i$ | 2. $z = -5 + 2i$ | 3. $z = -(4 - 6i)$ | 4. $z = 3(-2 + 3i)$ |
| 5. $z = i(1 + 2i)$ | 6. $z = -i(-3 + 4i)$ | 7. $z = (2i)^2$ | 8. $z = (2i)(-2i)$ |
| 9. $z = i^5$ | 10. $z = -i^7$ | 11. $z = (2 + i)^2$ | 12. $z = (4 + i)(4 - i)$ |

En los ejercicios 13-24 determinar r y θ , y escribir z en forma polar.

- | | | | |
|--------------------------|---------------------------|--|-----------------------------------|
| 13. $z = 1$ | 14. $z = -6$ | 15. $z = i$ | 16. $z = -4i$ |
| 17. $z = 1 + i$ | 18. $z = -2 - 2i$ | 19. $z = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$ | 20. $z = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$ |
| 21. $z = 2\sqrt{3} + 2i$ | 22. $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ | 23. $z = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ | 24. $z = 5\sqrt{3} - 5i$ |

Cambiar z a la forma rectangular en los ejercicios 25-30.

- | | |
|--|---|
| 25. $z = 3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ | 26. $z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$ |
| 27. $z = 4(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$ | 28. $z = 5(\cos 720^\circ + i \sin 720^\circ)$ |
| 29. $z = \sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$ | 30. $z = \frac{1}{2}\left(\cos \frac{17\pi}{2} + i \sin \frac{17\pi}{2}\right)$ |

En los ejercicios 31-38 determinar $z_1 z_2$ y z_1/z_2 usando la forma polar. Dar las respuestas en la forma rectangular.

- | | |
|---|--|
| 31. $z_1 = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ y $z_2 = 3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ | |
| 32. $z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$ y $z_2 = 6\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$ | |
| 33. $z_1 = \sqrt{3}\left(\cos \frac{13\pi}{6} + i \sin \frac{13\pi}{6}\right)$ y $z_2 = \sqrt{3}\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$ | |
| 34. $z_1 = 8\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$ y $z_2 = 6\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right]$ | |
| 35. $z_1 = 3 - 3i$ y $z_2 = 2i$ | 36. $z_1 = -\sqrt{3} + i$ y $z_2 = \sqrt{3} + i$ |
| 37. $z_1 = 2 - i$ y $z_2 = 2 + i$ | 38. $z_1 = 4 - 3i$ y $z_2 = 4 - 3i$ |

En los ejercicios 39-46 usar el teorema de DeMoivre para determinar la potencia dada del número complejo. Dar las respuestas en la forma rectangular.

- | | | | |
|------------------------|--|------------------|------------------------------------|
| 39. i^{10} | 40. $(-i)^{15}$ | 41. $(1 + i)^6$ | 42. $(1 - i)^{12}$ |
| 43. $(\sqrt{3} - i)^8$ | 44. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{20}$ | 45. $(4 - 4i)^4$ | 46. $(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^{15}$ |

Determinar las n distintas raíces en los ejercicios 47-54.

47. Raíces cuartas de 1
48. Raíces cuartas de -1
49. Raíces cúbicas de i
50. Raíces cúbicas de $-i$
51. Raíces cuartas de $8\sqrt{2} + 8\sqrt{2}i$
52. Raíces cuartas de $32\sqrt{2} - 32\sqrt{2}i$
53. Raíces cuadradas de $-1 - \sqrt{3}i$
54. Raíces cuadradas de $\sqrt{3} + i$



Encontrar todas las soluciones de las ecuaciones en los ejercicios 55-58-

55. $z^2 + 1 = 0$

56. $z^3 + 1 = 0$

57. $z^2 + i = 0$

58. $z^3 - 8i = 0$

En los ejercicios 59-61 cambiar la ecuación a coordenadas polares.

59. $4x^2 + 4y^2 = 1$

60. $x = 2y$

61. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

En los ejercicios 62-64 cambiar la ecuación a coordenadas rectangulares.

62. $r \cos \theta + 5r \sin \theta = 2$

63. $r = 6 \sin \theta$

64. $3r^2 \cos 2\theta = 1$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 9

Encontrar la ecuación para cada cónica en los ejercicios 1-8.

1. Círculo con centro en $\left(-3, \frac{2}{3}\right)$ y radio 4

2. Elipse centrada en el origen e intersecciones en $(\pm 3, 0)$ y $(0, \pm 7)$

3. Hipérbola con foco en $(\pm 4, 0)$ y longitud del eje transversal 6

4. Parábola con directriz $x = -3$ y foco en $(5, 2)$

5. Círculo con puntos terminales del diámetro en $(-2, -3)$ y $(6, 7)$

6. Elipse con foco es $(2, -5)$ y $(2, -1)$, y $b = 1$

7. Hipérbola con vértices en $(0, \pm 5)$ y que pasa a través del punto $(3, 10)$

8. Parábola con vértice en $(1, -2)$, eje de simetría $x = 1$, y que pasa a través del punto $(5, 2)$

Trazar la gráfica de la cónica en los ejercicios 9-16.

9. $x^2 + y^2 = 9$

10. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

11. $y^2 - x^2 = 4$

12. $x^2 + 2y = 0$

13. $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 11 = 0$

14. $4x^2 + y^2 + 4x - 6y - 6 = 0$

15. $4x^2 - y^2 + 16x - 2y - 21 = 0$

16. $y^2 + 6x - 4y + 22 = 0$

En los ejercicios 17-22 completar los cuadrados para determinar si la ecuación representa un círculo, una elipse, una hipérbola, una parábola o una cónica degenerada.

17. $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y - 40 = 0$

18. $3x^2 - 3y^2 - 6x + 12y - 80 = 0$

19. $3x^2 + 3y^2 - 6x - 6y + 6 = 0$

20. $x^2 - 3x = 0$

21. $3x^2 - 6x + 12y - 48 = 0$

22. $3x^2 + 2y^2 - 6x + 12y - 60 = 0$

23. Un sistema de coordenadas se gira un ángulo de 30° . Si las coordenadas de un punto en el sistema nuevo son $(-1, 5)$, encontrar las coordenadas del punto en el sistema original.

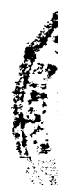
24. Un sistema de coordenadas se rota un ángulo de 45° . Si las coordenadas de un punto en el sistema original son $(4, -5)$, encontrar las coordenadas del punto en el sistema rotado.

En los ejercicios 25-26 eliminar el término en xy y graficar cada ecuación.

25. $13x^2 + 10xy + 13y^2 = 72$

26. $61x^2 - 96xy + 89y^2 = 0$

Cambiar de coordenadas polares a coordenadas rectangulares en los ejercicios 27-28.



27. $(4, 30^\circ)$

28. $\left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$

Cambiar de coordenadas rectangulares a coordenadas polares en los ejercicios 29-30.

29. $(-4, 3)$

30. $(-5, -5)$

31. Cambiar $2x - 5y + 1 = 0$ a coordenadas polares.

32. Cambiar $r^2 \sin 2\theta = 7$ a coordenadas rectangulares.

En los ejercicios 33-34 graficar la ecuación en coordenadas polares

33. $r \cos \theta = 2$

34. $r = 8 \sin \theta$

En los ejercicios 35-36 escribir z en la forma polar.

35. $z = 1 - i$

36. $z = -2\sqrt{3} + 2i$

37. Escribir $z = 6(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$ en la forma rectangular.

38. Determinar $z_1 z_2$ y $\frac{z_1}{z_2}$ si $z_1 = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ y $z_2 = 5(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$. Dar las respuestas en la forma rectangular.

39. Usar el teorema de DeMoivre para encontrar z^8 si $z = -1 + i$.

40. Determinar las raíces cúbicas de $z = -8i$.

41. **Ingeniería.** Un túnel de carretera tiene la forma de una semielipse con una altura máxima de 12.8 m y anchura de 16.2 m. Encontrar la altura vertical a partir de un punto que se encuentra a 4.4 m desde la orilla del túnel.

42. **Arquitectura.** Un techo con domo se construirá con una trabe parabólica vertical. Los planos piden una viga de 16 ft a través del domo en un punto que se encuentra 6 ft abajo de la parte superior. Si el punto más alto del domo está a 20 ft del suelo el origen de un sistema de coordenadas se coloca en el piso abajo del punto alto, encontrar la ecuación de la parábola.



Sistemas de ecuaciones y de desigualdades

En el capítulo 2 se estudiaron las técnicas para resolver ecuaciones y desigualdades con una variable. Sin embargo, es posible resolver muchos problemas de aplicación con mayor facilidad, haciendo uso de varias ecuaciones o desigualdades con dos o más variables, denominadas *sistema de ecuaciones o de desigualdades*. A continuación se exponen dos ejemplos de este tipo de problema.

Química

Un químico tiene dos soluciones, cada una contiene un cierto porcentaje de ácido. Si una solución tiene 5% de ácido y la otra 15%, ¿qué cantidad de cada una debe mezclarse para obtener 20 L de una solución que contenga 12% de ácido?

Administración

Producciones Ponderosa fabrica dos juguetes diferentes, El zorrillo Sam y La comadreja Willie. Para cada juguete se requieren tres fases de producción, A, B y C. Para hacer un zorrillo, la fase A

toma 1 minuto, la fase B toma 4 minutos y la fase C, 6 minutos. Para completar una comadreja, A toma 3 minutos, B, 3 minutos y C, 1 minuto. Debido a las condiciones de mantenimiento, la fase A está disponible sólo 33 minutos de cada hora, mientras que las fases B y C están cada una en operación sólo 42 minutos por cada hora. La utilidad obtenida por cada zorrillo es de 2.00 dólares y por cada comadreja es de 3.00 dólares. Encontrar el número de unidades que cada hora debería producirse de cada uno para maximizar la utilidad.

El primero de estos problemas puede resolverse con dos ecuaciones con dos variables (véase el ejemplo 7 en la sección 10.1) y el segundo requiere programación lineal (véase el ejemplo 2 de la sección 10.4).

La exposición de los temas de este capítulo comienza con las ecuaciones lineales con dos y tres variables, y una diversidad de problemas de aplicación que se resuelven empleando sistemas. Luego se desarrollan sistemas de desigualdades y se les utiliza en la programación lineal. Los sistemas no lineales de ecuaciones y de desigualdades, seguidos de fracciones parciales, que tienen aplicaciones en cálculo, concluyen el contexto de este capítulo.

En el capítulo 3 se definió la ecuación lineal con dos variables x y y como una ecuación de la forma

$$ax + by = c,$$

donde a , b y c son números reales constantes y a y b diferentes de cero. Tales ecuaciones tienen una infinidad de soluciones, que son los pares ordenados de números (x, y) que hacen verdadera la ecuación.

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables**, por lo regular llamado simplemente **sistema de ecuaciones**, es un par de ecuaciones lineales

donde a_1 , b_1 , c_1 , a_2 , b_2 y c_2 son números reales constantes. La **solución** de un sistema de ecuaciones es un par ordenado de números que es una solución de ambas ecuaciones. Por ejemplo, $(2, 1)$ es una solución tanto de $x - 3y = -1$ como de $2x + y = 5$. Así, $(2, 1)$ es una solución del sistema

$$\begin{aligned}x - 3y &= -1 \\ 2x + y &= 5.\end{aligned}$$

Supóngase que ambas ecuaciones del sistema se grafican en el mismo sistema de coordenadas rectangulares, como en la figura 1. La solución del sistema, $(2, 1)$, corresponde al punto de intersección de las dos rectas. Así, un sistema puede resolverse graficando las rectas para encontrar el punto de intersección.

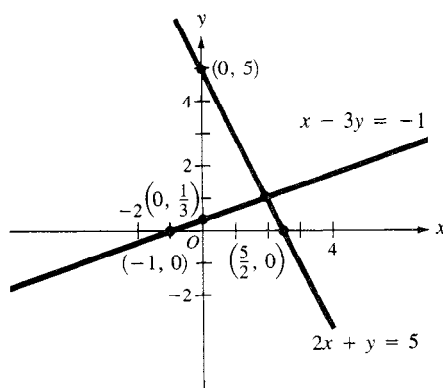


Figura 1. Gráfica de un sistema lineal.

Tipos de sistemas

Antes de considerar dos técnicas algebraicas que sirven para resolver un sistema, deben examinarse las tres posibilidades de situaciones que pueden surgir. Si se grafican dos ecuaciones lineales en el mismo sistema de coordenadas rectangulares, ocurrirá una de las tres alternativas siguientes:

1. Las rectas coinciden; por consiguiente, el sistema de ecuaciones tiene un número infinito de soluciones. Por ello se dice que el sistema es **dependiente**.
2. Las rectas son paralelas; por consiguiente, el sistema de ecuaciones no tiene ninguna solución. Por ello se dice que el sistema es **inconsistente**.
3. Las rectas se intersectan en exactamente un punto; por consiguiente, el sistema de ecuaciones tiene exactamente una solución. Por ello se dice que el sistema es **consistente e independiente**.

Los siguientes sistemas de ecuaciones y sus gráficas correspondientes de la figura 2 ilustran estos tres casos.

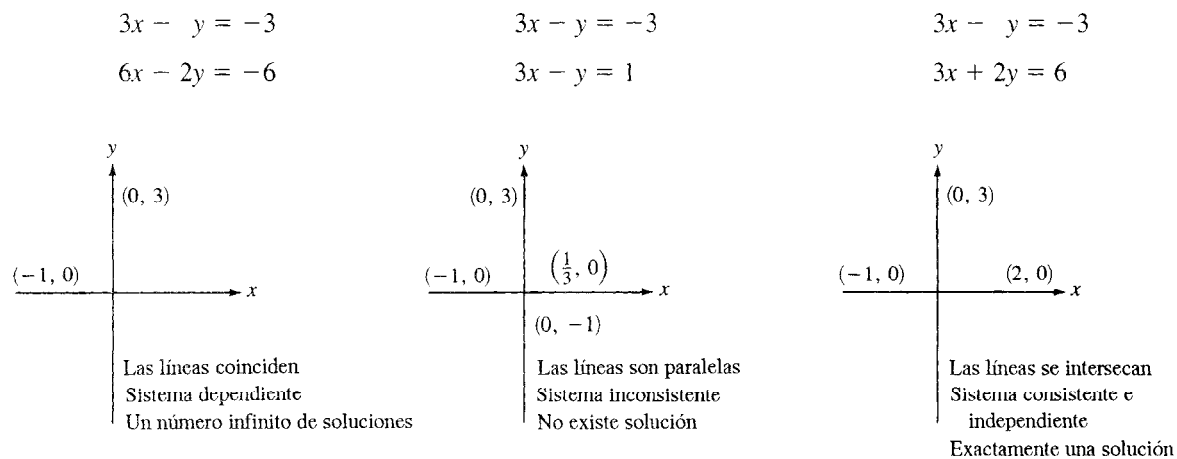


Figura 2. Tipos de sistemas lineales.

Si las ecuaciones en un sistema se escriben en la forma pendiente-ordenada al origen es fácil determinar de cuál de los tres casos se trata. Recuerdese que las rectas paralelas tienen pendientes iguales, y que las rectas con pendientes iguales y la misma intersección con el eje y deben coincidir. Por supuesto, si las pendientes son diferentes, las rectas deben intersectarse.

EJEMPLO 1

Sin resolver el sistema, determinar el número de soluciones.

a) $2x - y = 1$
 $-4x + 2y = -1$

Se procede a escribir cada ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen.

$$\begin{array}{ll} 2x - y = 1 & -4x + 2y = -1 \\ -y = -2x + 1 & 2y = 4x - 1 \\ y = 2x - 1 & y = 2x - \frac{1}{2} \end{array}$$

Puesto que ambas pendientes son 2 pero las ordenadas al origen son diferentes, las rectas son paralelas; en consecuencia, el sistema es inconsistente y no tiene solución.

b) $4x - 3y + 2 = 0$
 $-8x + 6y - 4 = 0$

Se escribe cada ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen.

$$\begin{array}{ll} 4x - 3y + 2 = 0 & -8x + 6y - 4 = 0 \\ -3y = -4x - 2 & 6y = 8x + 4 \\ y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} & y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} \end{array}$$

Puesto que ambas pendientes son $\frac{4}{3}$ y ambas ordenadas al origen son $(0, \frac{2}{3})$, las rectas coinciden; en consecuencia, cualquier solución a una de las dos ecuaciones es una solución al sistema. Como cada ecuación tiene un número infinito de soluciones, el sistema es dependiente y tiene, a su vez, un número infinito de soluciones.

c) $2x - 4 = 0$

$2x + y = 3$

Puesto que la primera ecuación puede escribirse en la forma $x = 2$, su gráfica es una recta paralela al eje y . La gráfica de la segunda ecuación es la recta con pendiente -2 . Así, las dos rectas se intersecan en un punto; por consiguiente, el sistema tiene exactamente una solución y es consistente e independiente.

Cuando una o ambas ecuaciones del sistema tienen la forma $ax = c$ (como en el ejemplo 1 c)) o $by = c$, la determinación del número de soluciones se realiza por inspección. Debe tenerse en mente que las gráficas de estas ecuaciones corresponden a rectas paralelas a uno de los ejes, por lo que resultarán rectas paralelas o coincidentes sólo si ambas ecuaciones del sistema son del mismo tipo.

Método de sustitución

Aunque con lo visto hasta aquí es posible determinar el número de soluciones de un sistema de ecuaciones, todavía hace falta un buen método para encontrar una solución particular. Resolver un sistema por graficación toma demasiado tiempo y depende de la precisión de la técnica del trazado. A continuación, se expone un método algebraico para resolver un sistema, denominado **método de sustitución**. Este método se basa en el axioma de sustitución para la igualdad, el cual garantiza que cualquier cantidad puede ser sustituida por su igual.

EJEMPLO 2

Resolver por el método de sustitución:

$$2x - y = -6$$

$$5x + 2y = 3$$

Puede procederse a despejar alguna de las dos variables en cualquiera de las dos ecuaciones; sin embargo, es posible evitar fracciones si se despeja y en la primera ecuación.

$$y = 2x + 6$$

Se sustituye y por $2x + 6$ en la segunda ecuación.

$$5x + 2(2x + 6) = 3$$

$$5x + 4x + 12 = 3$$

$$9x + 12 = 3$$

$$9x = -9$$

$$x = -1$$

Se sustituye x por -1 en la primera ecuación.

$$\begin{aligned}
 2x - 2y &= -6 \\
 -2 - y &= -6 \\
 -y &= -4 \\
 y &= 4
 \end{aligned}$$

La solución es $(-1, 4)$. Para comprobar se sustituyen $x = -1$ y $y = 4$ en cada una de las ecuaciones originales.

Método de eliminación

Supóngase que se tiene el siguiente sistema.

$$\begin{aligned}
 3x + 5y &= -2 \\
 5x + 3y &= 2
 \end{aligned}$$

Si en este caso se aplica el método de sustitución, es imposible evitar que aparezcan fracciones. Un método alternativo para resolver sistemas como éste, el **método de eliminación**, se basa en los sistemas *equivalentes*. Dos sistemas son **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones. Recuérdese que si ambos lados de una ecuación se multiplican por un mismo número diferente de cero, o si se suma o resta la misma expresión de ambos lados, la ecuación resultante es equivalente a la original. Cuando estas operaciones se aplican a una o a ambas ecuaciones de un sistema, el sistema resultante es equivalente al original. Este tipo de transformación de las ecuaciones constituye el meollo del método de eliminación, como lo ilustra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3

Resolver por el método de eliminación

$$\begin{aligned}
 3x + 5y &= -2 \\
 5x + 3y &= 2
 \end{aligned}$$

Se multiplica la primera ecuación por -5 y la segunda por 3 .

$$\begin{array}{rcl}
 -15x - 25y &= 10 & \text{multiplica la primera ecuación} \\
 15x + 9y &= 6 & \text{multiplica la segunda ecuación} \\
 \hline
 -16y &= 16 & \text{suma las ecuaciones} \\
 y &= -1 &
 \end{array}$$

Se sustituye y por -1 en la primera ecuación.

$$\begin{aligned}
 3x + 5(-1) &= -2 \\
 3x - 5 &= -2 \\
 3x &= 3 \\
 x &= 1
 \end{aligned}$$

La solución es $(1, -1)$. Para comprobar, se sustituyen $x = 1$ y $y = -1$ en cada una de las ecuaciones originales.

EJEMPLO 4

Resolver por cualquiera de los dos métodos.

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ -3x + 2y &= -5 \end{aligned}$$

Puede observarse que la suma directa eliminará x .

$$\begin{array}{r} 3x - 2y = 5 \\ -3x + 2y = -5 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

Sin embargo, la suma elimina ambas variables y se obtiene la identidad $0 = 0$. Supóngase que se aplica la técnica de sustitución y se despeja x en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} 3x &= 2y + 5 \\ x &= \frac{2}{3}y + \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Se hace la sustitución en la segunda ecuación.

$$\begin{aligned} -3\left(\frac{2}{3}y + \frac{5}{3}\right) + 2y &= -5 \\ -2y - 5 + 2y &= -5 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Una vez más se obtiene la identidad $0 = 0$. Al examinar con cuidado el sistema original se observa que las gráficas de las ecuaciones son rectas coincidentes [ambas tienen pendiente $\frac{3}{2}$ e intersección con el eje y $(0, -\frac{5}{2})$]; por consiguiente, el sistema es dependiente y hay un número infinito de soluciones. Cualquier par de números que satisfaga una de las dos ecuaciones es una solución del sistema. Con el fin de expresar la solución en tales casos, se despeja y en una de las ecuaciones.

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$$

Entonces, las soluciones del sistema son la forma $(x, \frac{3}{2}x - \frac{5}{2})$ para toda x real. En particular, $(0, -\frac{5}{2})$, $(-1, -4)$ y $(2, \frac{1}{2})$ son tres soluciones encontradas al poner x igual a 0, -1 y 2, respectivamente.

Supóngase que se intenta resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ -4x + 2y &= -3. \end{aligned}$$

Se despeja y en la primera ecuación y se sustituye en la segunda.

$$\begin{array}{rcl}
 -4x + 2(\quad) & = & -3 \\
 -4x + 4x - 10 & = & -3 \\
 -10 & = & -3
 \end{array}$$

El resultado es una contradicción. En forma análoga, al multiplicar por 2 la primera ecuación y sumar luego ambas ecuaciones, se obtiene una contradicción.

$$\begin{array}{rcl}
 4x - 2y & = & 10 \\
 -4x + 2y & = & -3 \\
 \hline
 0 & = & 7
 \end{array}$$

Siempre que resulte una contradicción, las gráficas de las ecuaciones del sistema son rectas paralelas y el sistema no tiene solución.

Cuándo resolver un sistema por sustitución o por eliminación

1. Si resulta una identidad, el sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones. Las soluciones son de la forma (x, y) donde x es un número real y y es una expresión, en términos de x , obtenida al despejar y en cualquiera de las dos ecuaciones.
2. Si resulta una contradicción, el sistema es inconsistente y no tiene solución.

Muchos problemas de aplicación pueden traducirse a sistemas de ecuaciones lineales. A continuación se procede a considerar una diversidad de estas aplicaciones.

EJEMPLO 5

Recreación

Un lanchero viajó de Glen Canyon Dam al extremo de Lake Powell, una distancia de 180 mi, a una velocidad de 20 mi/h durante un periodo y a 30 mi/h durante otro. De haber ido a 21 mi/h durante el mismo periodo, sólo hubiera llegado a Hite Marina o recorrido una distancia de 147 mi. ¿Cuántas horas viajó a cada velocidad?

Sea x = el número de horas viajadas a 20 mi/h,
 y = el número de horas viajadas a 30 mi/h.

Puesto que (distancia) = (velocidad) · (tiempo)

y la distancia total recorrida es la suma de las dos distancias recorridas a las dos velocidades, la primera ecuación es:

$$20x + 30y = 180.$$

A una velocidad de 21 mi/h durante el tiempo total, el lanchero hubiera recorrido 147 mi. Así, la segunda ecuación es:

$$21(x + y) = 147.$$

Antes de resolver el sistema se simplifican las ecuaciones, y se divide la primera ecuación entre 10 y la segunda entre 7.

$$2x + 3y = 18$$

$$3x + 3y = 21$$

Restando la primera a la segunda, se obtiene:

$$x = 3.$$

Entonces $2(3) + 3y = 18$ por lo que $3y = 12$ o $y = 4$. El lancharo viajó 3 horas a 20 mi/h y 4 horas a 30 mi/h. ■

En algunas aplicaciones que requieren sistemas de ecuaciones se combinan cantidades, con ecuaciones diferentes para combinaciones diferentes. En muchos de estos problemas de combinaciones debe determinarse el valor total. Recuérdese que

$$\text{valor total} = (\text{valor por unidad}) \cdot (\text{número de unidades}).$$

En un tipo especial de problema de combinaciones, el problema de mezcla, hay dos cantidades que se mezclan. Las ecuaciones en el sistema podrían denominarse *ecuación de cantidad* y *ecuación de valor*.

EJEMPLO 6

Administración

El propietario de una dulcería desea hacer una mezcla especial combinando el caramelo que vende a 1.50 dólares por libra con nueces que vende a 1.00 dólar por libra. Si la mezcla se va a vender a 1.20 dólares por libra, ¿cuántas libras de caramelo y cuántas libras de nueces deben utilizarse para obtener 50 libras de la mezcla especial?

Sean x = el número de libras de caramelo,

y = el número de libras de nueces.

La primera ecuación que se obtiene es la *ecuación de cantidad*:

$$(\text{número de libras de caramelo}) + (\text{número de libras de nueces}) = (\text{número de libras de la mezcla}),$$

lo cual se traduce a:

$$x + y = 50.$$

Luego se obtiene la *ecuación de valor*:

$$(\text{valor total del caramelo}) + (\text{valor total de las nueces}) = (\text{valor total de la mezcla}).$$

Es decir, el valor de la mezcla es igual a la suma de los valores de sus partes. Para evitar decimales, se convierten todas las unidades monetarias a centavos.

$$150 \cdot x = \text{valor total del caramelo} = (150\text{¢ por libra}) \cdot (\text{número de libras})$$

$$100 \cdot y = \text{valor total de las nueces} = (100\text{¢ por libra}) \cdot (\text{número de libras})$$

$$120 \cdot 50 = \text{valor total de la mezcla} = (120\text{¢ por libra}) \cdot (\text{número de libras})$$

Así, la ecuación de valor es:

$$150x + 100y = 120 \cdot 50$$

$$\circ \quad 3x + 2y = 120. \quad \text{Dividiendo ambos lados entre 50}$$

Debe resolverse el siguiente sistema:

$$x + y = 50$$

$$3x + 2y = 120$$

Se despeja x en la primera ecuación y se sustituye.

$$3(50 - y) + 2y = 120 \quad x = 50 - y$$

$$150 - 3y + 2y = 120$$

$$-y = -30$$

$$y = 30$$

$$x = 50 - y = 50 - 30 = 20$$

El propietario debe usar 20 lb de caramelo y 30 lb de nueces para obtener la mezcla deseada de 50 lb.

Esta sección concluye con la resolución del primer problema de aplicación presentado en la introducción de este capítulo.

EJEMPLO 7

Química

Un químico tiene dos soluciones, cada una contiene un cierto porcentaje de ácido. Si una solución tiene 5% de ácido y la otra 15%, ¿qué cantidad de cada una debe mezclarse para obtener 20 L de una solución que contenga 12% de ácido?

Sean x = número de litros de la solución ácida al 5%,

y = número de litros de la solución ácida al 15%.

La ecuación de cantidad es:

$$x + y = 20.$$

La ecuación de valor es igual a la cantidad de ácido en las soluciones.

$$0.05x = \text{la cantidad de ácido en } x \text{ L de la solución al 5\%}$$

$$0.15y = \text{la cantidad de ácido en } y \text{ L de la solución al 15\%}$$

$$(0.12)(20) = \text{la cantidad de ácido en 20 L de la mezcla al 12\%}$$

Así, se tiene:

$$0.05x + 0.15y = (0.12)(20)$$

$$5x + 15y = 240 \quad \text{Se eliminan todos los decimales}$$

$$x + 3y = 48. \quad \text{Se divide entre 5 en ambos lados}$$

Se despeja x en la primera ecuación y se sustituye en la segunda.

$$20 - y + 3y = 48$$

$$2y = 28$$

$$y = 14$$

Entonces, puesto que $x = 20 - y$, $x = 20 - 14 = 6$. El químico debería mezclar 6 L de la solución al 5% con 14 L de la solución al 15%.

10.1. Ejercicios

1. Determinar si $(2, -3)$ es una solución del sistema dado.

a)
$$\begin{aligned} x + y &= -1 \\ 3x - y &= 9 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x - 4 &= 0 \\ y + 3 &= 0 \end{aligned}$$

2. Determinar si $(-1, 5)$ es una solución del sistema dado.

a)
$$\begin{aligned} 3x - 2y &= -13 \\ x + 3y &= 16 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 4x - y &= -9 \\ 4x + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Sin resolver, en los ejercicios 3-6, a) determinar el número de soluciones del sistema dado, b) expresar si las rectas son paralelas, coinciden o se intersecan, y c) establecer si el sistema es inconsistente, dependiente o consistente e independiente.

3.
$$\begin{aligned} 3x - y &= 2 \\ x - 3y &= 2 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} 3x + 2y &= -5 \\ 6x + 4y &= 5 \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} 5x - 3y + 2 &= 0 \\ -5x + 3y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} x + 5 &= 0 \\ 5 + y &= 0 \end{aligned}$$

En los ejercicios 7-10, resolver cada sistema por el método de sustitución.

7.
$$\begin{aligned} x + 2y &= 7 \\ 2x + y &= 2 \end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned} 4x - y &= -3 \\ 3x + 5y &= 15 \end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned} 5x - 2y &= 3 \\ -10x + 4y &= -6 \end{aligned}$$

10.
$$\begin{aligned} 3x - y &= 2 \\ 2y - 8 &= 0 \end{aligned}$$

En los ejercicios 11-14, resolver cada sistema por el método de eliminación.

11.
$$\begin{aligned} 2x - 5y &= 6 \\ 4x + 3y &= 12 \end{aligned}$$

12.
$$\begin{aligned} 2s - 11t &= 3 \\ -4s + 22t &= -1 \end{aligned}$$

13.
$$\begin{aligned} 2a - 7b &= 3 \\ 3a + 2b &= -8 \end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned} 0.3x + 1.2y &= 0.3 \\ 0.2x - 4.8y &= 5.8 \end{aligned}$$

En los ejercicios 15-24, resolver cada sistema ya sea por el método de sustitución o por el de eliminación, el que parezca más apropiado.

15.
$$\begin{aligned} 5x - 7y &= -2 \\ 7x - 5y &= 2 \end{aligned}$$

16.
$$\begin{aligned} 3y - 12 &= 0 \\ 3x + y &= 1 \end{aligned}$$

17.
$$\begin{aligned} 5u - 3v &= 2 \\ -5u + 3v &= 1 \end{aligned}$$

18.
$$\begin{aligned} 7u - 7v &= 7 \\ -3u + 3v &= -3 \end{aligned}$$

19.
$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}y &= \frac{9}{20} \\ \frac{3}{4}x + \frac{2}{9}y &= \frac{11}{10} \end{aligned}$$

20.
$$\begin{aligned} 0.02x + 1.05y &= -1.07 \\ 0.1x - 0.6y &= 0.5 \end{aligned}$$

21.
$$\begin{aligned} 2(x + y) - 5(x - y) &= 24 \\ 3(x + y) + (x - y) &= 2 \end{aligned}$$

22.
$$\begin{aligned} 3(x - 2y) - (2x + y) &= 14 \\ 5(x - 2y) - 2(2x + y) &= 24 \end{aligned}$$

23.
$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= -1 \\ \frac{3}{x} - \frac{6}{y} &= 24 \end{aligned}$$

24.
$$\begin{aligned} \frac{4}{x-1} + \frac{1}{y+2} &= \frac{17}{4} \\ \frac{3}{x-1} - \frac{2}{y+2} &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

[Sugerencia: Sea $u = \frac{1}{x}$ y $v = \frac{1}{y}$.]

En los ejercicios 25-26, resolver cada sistema para x y y suponiendo que a y b son constantes y diferentes de cero.

25.
$$\begin{aligned} ax + by &= 1 \\ 3ax - by &= -5 \end{aligned}$$

26.
$$\begin{aligned} ax - y &= 2b \\ ax + 2y &= -b \end{aligned}$$

En los ejercicios 27-28, encontrar a y b tales que $(-1, 3)$ sea una solución de cada sistema.

27.
$$\begin{aligned} ax - by &= 11 \\ -2ax - by &= 14 \end{aligned}$$

28.
$$\begin{aligned} 3ax + by &= -15 \\ ax - 4by &= 60 \end{aligned}$$



En los ejercicios 29-43, resolver cada problema utilizando un sistema de ecuaciones.

29. La suma de dos números es 44 y su diferencia es 20. ¿Cuáles son los números?
30. Dos veces la suma de las edades de Samuel y Joel es 40. En dos años, Samuel tendrá la misma edad que Joel tiene ahora. ¿Cuál es la edad de cada uno?
31. Mario recorrió 370 km conduciendo a 40 km/h durante un periodo y luego a 50 km/h durante otro. De haber ido 10 km/h más rápido en todo el trayecto hubiera recorrido 450 km. ¿Cuántas horas viajó a cada velocidad?
32. **Recreación.** Un bote crucero viaja 48 mi aguas abajo en 2 h y regresa las 48 mi aguas arriba en 3 h. ¿Cuál es la velocidad del bote y la velocidad de la corriente?
33. **Geometría.** Dos ángulos son suplementarios y uno es 4° mayor que siete veces el otro. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos?
34. **Geometría.** En un triángulo rectángulo, un ángulo agudo es 6° mayor que dos veces el otro. Encontrar la medida de cada ángulo agudo.
35. **Consumo.** Roberto compró 5 camisas del mismo valor y 4 pares de calcetines del mismo valor por 87 dólares. Más tarde, regresó a la misma tienda y compró (a los mismos precios) 2 camisas y 6 pares de calcetines por 48 dólares. ¿Cuál fue el precio de cada prenda?
36. **Recreación.** Si hubo 600 personas en un juego, el total de la recaudación fue de 980 dólares y el precio de admisión fue de 2.00 dólares para adultos y 1.00 dólar para niños, ¿cuántos adultos y cuántos niños asistieron al espectáculo?
37. **Menudeo.** Una mezcla de caramelos se vende a 1.10 dólares por libra. Si la mezcla está compuesta por dos clases de caramelo, uno con un valor de 90¢ por libra y el otro con un valor de 1.50 dólares por libra, ¿cuántas libras de cada caramelo estarían en una mezcla de 60 libras?
38. **Menudeo.** El propietario de un molino de café desea mezclar dos clases de café, uno que se vende a 1.80 dólares por libra y otro a 2.40 dólares por libra, para obtener una mezcla de 40 libras que se venda a 2.10 dólares por libra. ¿Cuántas libras de cada clase de café debe usar?
39. Una colección de monedas de 10¢ y 25¢ tiene un valor de 4.20 dólares. Si el número total de monedas en la colección es 30, ¿cuántas monedas hay de cada una?
40. Camila tiene 40 monedas, cada una con un valor de 5¢ o 10¢. Si el valor total de la colección es de 3.55 dólares, ¿cuál es el número de monedas de a 5¢ y el número de monedas de a 10¢ en la colección?
41. **Química.** Un químico tiene una solución ácida al 25% y otra ácida al 50%. ¿Qué volumen de cada una debe utilizarse para preparar 25 l de una solución ácida al 40%?
42. **Química.** Un técnico laboratorista obtiene 10 galones de una solución salina al 30% mezclando una solución al 20% con otra al 50%. ¿Qué cantidad de cada una debe usar?
43. **Nutrición.** Una técnica laboratorista desea mantener a los animales de un experimento con una dieta específica de 15 g de proteína y 5 g de grasa. Ella puede adquirir dos mezclas alimenticias: Dieta especial, que es 12% proteína y 2% grasa, y Control K, que es 20% proteína y 8% grasa. ¿Cuántos gramos de cada mezcla (con aproximación de décimas de gramo) debería combinar para obtener la mezcla dietética correcta para sus animales?
44. **Estadística.** Un perito en estadística utiliza la recta de regresión de mínimos cuadrados, $y = ax + b$, como la recta que mejor se ajusta para representar al conjunto de puntos $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$. Los valores para a y b los determina el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + x_3)a + 3b &= (y_1 + y_2 + y_3) \\ (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)a + (x_1 + x_2 + x_3)b &= (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3). \end{aligned}$$

Encontrar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los puntos $\{(-1, 0), (1, 1), (2, 2)\}$.



45. **Deportes.** Para estar en buena condición física, un profesor quiere marchar a trote corto o jugar tenis 15 veces cada mes. Si estima que puede dedicar un total de 26 horas a estas actividades cada mes, emplea 1.2 horas cada vez que marcha a trote corto y 2.8 horas cada vez que juega tenis, ¿cuántas veces debería practicar cada actividad durante el mes con la finalidad de usar las 26 horas por entero?
46. Encontrar los valores para m de modo que el sistema:

$$\begin{aligned}x - 4y &= m \\ -2x + 8y &= 4\end{aligned}$$

no tenga solución.

47. Demostrar que el sistema:

$$\begin{aligned}2x + y &= m \\ x - 4y &= 3\end{aligned}$$

tiene exactamente una solución para cada número real m .

48. Encontrar los valores para m de modo que el sistema:

$$\begin{aligned}5x + 2y &= m \\ -15x - 6y &= 9\end{aligned}$$

tenga un número infinito de soluciones.

49. Encontrar los valores de a y b tales que la recta con ecuación $ax + by = 6$ pase a través de los puntos con coordenadas $(3, 2)$ y $(0, -2)$.
50. Demostrar que la gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2 - 4x + 3$ interseca la gráfica de la función lineal $g(x) = -3x + 5$ en los puntos $(2, -1)$ y $(-1, 8)$.

Para repaso

En los ejercicios 51-54, determinar la naturaleza de la sección cónica al completar el cuadrado.

51. $5x^2 + 10y^2 - 10x + 20y = 0$

52. $3x^2 - 6x + 4y = 4$

53. $5x^2 - 10y^2 - 10x + 20y = 0$

54. $8x^2 + 8y^2 + 16x + 16y - 64 = 0$

10.2. SISTEMAS LINEALES CON MÁS DE DOS VARIABLES

Sistemas lineales con tres variables

Una ecuación de la forma:

$$ax + by + cz = d$$

donde a , b , c y d son números reales constantes y x , y y z son variables, se denomina **ecuación lineal con tres variables**. Puesto que la gráfica de una ecuación lineal con tres variables es un plano en el espacio y no una recta, el término *ecuación lineal* aquí es un tanto engañoso (tal vez sea mejor *ecuación de primer grado*).

La solución de una ecuación lineal como $2x + y - 3z = 3$ es una **terna ordenada** de números. Por ejemplo, $(1, -2, -1)$ es una solución, pues si se reemplaza a x , y y z por 1, -2 y -1 en ese orden, resulta una ecuación verdadera.

$$2(1) + (-2) - 3(-1) \stackrel{?}{=} 3$$

$$2 - 2 + 3 \stackrel{?}{=} 3$$

$$3 = 3$$

Un **sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables** (u otra vez, simplemente un sistema de ecuaciones) es una terna de ecuaciones lineales como el siguiente:

$$x + y - z = 4$$

$$2x + y + z = 1$$

$$3x - 2y - z = 3$$

Una solución para tal sistema es una terna ordenada que es solución de cada una de las tres ecuaciones. Es fácil comprobar por sustitución que $(1, 1, -2)$ es una solución del sistema anterior.

Método de reducción

Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables puede resolverse de manera algebraica ya sea por sustitución o por eliminación. En forma alternativa, el **método de reducción**, que se vale tanto de la sustitución como de la eliminación, transforma al sistema en un sistema de dos ecuaciones con dos variables. Quizás esta técnica sea la más fácil de aprender y la más rápida de aplicar. A continuación se resumen los pasos a seguir en el método de reducción.

Para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres variables

1. Se seleccionan dos de las tres ecuaciones y se elimina una variable.
2. Se utiliza la ecuación del sistema original que no fue usada en el primer paso junto con cualquiera de las otras dos ecuaciones y se elimina la *misma* variable.
3. Se resuelve el sistema de dos ecuaciones con dos variables.
4. Se sustituyen los valores de las dos variables en cualquiera de las ecuaciones originales para obtener el valor de la tercera variable.
5. Si en algún paso se obtiene una contradicción, el sistema no tiene solución.

Para resolver un sistema de ecuaciones hay que examinar el sistema para determinar cuál de las tres variables es la más fácil de eliminar. Esto ahorra tiempo y esfuerzo en los pasos posteriores. A continuación se ilustra el método de reducción, resolviendo el sistema dado previamente en esta sección.

EJEMPLO 1

Resolver el sistema:

$$(A) \quad x + y - z = 4$$

$$(B) \quad 2x + y + z = 1$$

$$(C) \quad 3x - 2y - z = 3$$

Obsérvese que no es necesaria la regla de la multiplicación si se procede a eliminar la variable z .

Al sumar las ecuaciones (A) y (B) se elimina z y resulta una ecuación en x y y . Luego, puede aparearse la ecuación (C) con la (A) y restarse. Esto da una segunda ecuación en x y y .

$$\begin{array}{rcl}
 \text{(A)} & x + y - z = 4 & \\
 \text{(B)} & 2x + y + z = 1 & \\
 \hline
 \text{(A)} + \text{(B)} = \text{(D)} & 3x + 2y = 5 & \\
 \text{(A)} - \text{(C)} = \text{(E)} & -2x + 3y = 1 &
 \end{array}$$

Hasta ahora se ha reducido el sistema original a dos ecuaciones con las dos variables x y y . Para eliminar x , se multiplica **(D)** por 2 y **(E)** por 3; enseguida se suman los resultados.

$$\begin{array}{rcl}
 2\text{(D)} & 6x + 4y = 10 & \\
 3\text{(E)} & -6x + 9y = 3 & \\
 \hline
 & 13y = 13 & \\
 & y = 1 &
 \end{array}$$

Ahora, para encontrar el valor de x se sustituye y por 1 ya sea en **(D)** o en **(E)**. Supóngase que se elige **(D)**.

$$\begin{array}{rcl}
 3x + 2(1) & = & 5 \\
 3x + 2 & = & 5 \\
 3x & = & 3 \\
 x & = & 1
 \end{array}$$

Por último, para encontrar el valor de z , se sustituye x por 1 y y por 1 en cualquiera de las ecuaciones originales **(A)**, **(B)** o **(C)**. Supóngase que se usa **(A)**.

$$\begin{array}{rcl}
 (1) + (1) - z & = & 4 \\
 2 - z & = & 4 \\
 z & = & -2
 \end{array}$$

Así, la solución del sistema es $(1, 1, -2)$.

Sistemas sin solución

Si se obtiene una contradicción al resolver un sistema, entonces el sistema no tiene solución, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2

Resolver el sistema:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{(A)} & x + y - z = 4 & \\
 \text{(B)} & x - y - z = 2 & \\
 \text{(C)} & 3x - y - 3z = -4 &
 \end{array}$$

Al sumar **(A)** y **(B)** puede eliminarse y . Luego, al aparear **(C)** con **(A)** y sumar, y se elimina de nuevo.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{(A)} & x + y - z = 4 & \\
 \text{(B)} & x - y - z = 2 & \\
 \hline
 \text{(A)} + \text{(B)} = \text{(D)} & 2x - 2z = 6 & \\
 \text{(A)} + \text{(C)} = \text{(F)} & 4x - 4z = 0 & \\
 \hline
 \frac{1}{2}\text{(D)} = \text{(E)} & x - z = 3 & \\
 \frac{1}{4}\text{(F)} = \text{(G)} & x - z = 0 &
 \end{array}$$

Al restar (G) a (E) la diferencia es una contradicción,

$$0 = 3.$$

Así, el sistema original no tiene solución.

Sistemas con número infinito de soluciones

Si al resolver un sistema de tres ecuaciones con tres variables se obtiene una identidad en algún paso, el sistema tiene un número infinito de soluciones o no tiene ninguna. De haber un número infinito de soluciones, se expresan como se indicó para un sistema de dos ecuaciones con dos variables. El siguiente ejemplo señala cuál es el proceso.

EJEMPLO 3

Resolver el sistema:

$$(A) \quad x - 3y + 2z = 6$$

$$(B) \quad 4x - 2y + 3z = 14$$

$$(C) \quad 2x + 4y - z = 2$$

Se elimina primero x de (A) y (C) y luego se procede a eliminar x de (B) y (C).

$$\begin{array}{rcl} 2(A) \quad 2x - 6y + 4z = 12 & & (B) \quad 4x - 2y + 3z = 14 \\ (C) \quad 2x + 4y - z = 2 & & 2(C) \quad 4x + 8y - 2z = 4 \\ \hline 2(A) - (C) = (D) \quad -10y + 5z = 10 & & (B) - 2(C) = (F) \quad -10y + 5z = 10 \\ -\frac{1}{5}(D) = (E) \quad 2y - z = -2 & & -\frac{1}{5}(F) = (G) \quad 2y - z = -2 \\ & & (E) \quad 2y - z = -2 \\ & & (G) \quad 2y - z = -2 \end{array}$$

Cuando (E) y (G) se restan la diferencia es la identidad

$$0 = 0.$$

Para expresar la solución, se selecciona una de las dos ecuaciones equivalentes en y y z , (E) por ejemplo, y se despeja una de las variables, z por ejemplo.

$$\begin{array}{rcl} 2y - z & = & -2 \\ -z & = & -2y - 2 \\ z & = & 2y + 2 \end{array}$$

Este valor de z se sustituye en cualquiera de las ecuaciones originales, (A) por ejemplo, y se despeja x en términos de y .

$$\begin{array}{rcl} x - 3y + 2(\quad) & = & 6 \\ x - 3y + 4y + 4 & = & 6 \\ x + y & = & 2 \\ x & = & 2 - y \end{array}$$

Tanto x como z se han expresado ahora en términos de y . Si y es cualquier número real, entonces la terna ordenada $(2 - y, y, 2y + 2)$ es una solución del sistema. Las soluciones particulares pueden encontrarse eligiendo un valor de y y evaluando las expresiones para x ($x = 2 - y$) y para z ($z = 2y + 2$). Tres de tales soluciones son $(2, 0, 2)$, $(1, 1, 4)$ y $(3, -1, 0)$, las cuales se han encontrado al poner $y = 0, 1, y -1$, respectivamente.

En el ejemplo 3, si se despeja y en la ecuación (E) en lugar de z y se sustituye en (B) para encontrar x , entonces la forma de solución sería $(-\frac{z}{2} + 3, \frac{z}{2} - 1, z)$, para toda z real. Las tres soluciones particulares anotadas se obtendrían al poner $z = 2, 4, y 0$. Asimismo, de haberse eliminado una de las otras variables en lugar de x en el primer paso, la terna ordenada en la solución podría haberse expresado utilizando x como cualquier número con y y z en términos de x . En otras palabras, hay tres maneras de representar las soluciones cuando hay un número infinito de ellas. Desde luego, las tres proporcionan el mismo conjunto de soluciones.

Hasta aquí, el análisis se ha centrado en sistemas de dos y tres ecuaciones. Ahora se considerarán sistemas más generales.

Sistemas de $n \times n$

Si $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ representan n variables, donde n es un entero positivo, y $c, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ representan $n + 1$ números reales positivos tales que al menos un $a_i \neq 0$, entonces

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = c$$

es una ecuación lineal con n variables. A un sistema de n ecuaciones lineales con n variables se le denomina **sistema de $n \times n$** o **sistema cuadrado de orden n** .

Sistemas no cuadrados

En la sección anterior se resolvieron sistemas de 2×2 y en esta sección se utilizó el método de reducción para resolver sistemas de 3×3 . Puede aplicarse el método de reducción para resolver cualquier sistema de $n \times n$; el procedimiento consiste en reducirlo a un sistema de $(n - 1) \times (n - 1)$ y repetir la reducción cuantas veces sea necesario. Por ejemplo, un sistema de 4×4 puede reducirse a un sistema de 3×3 y luego a un sistema de 2×2 . Los sistemas de ecuaciones que tienen menos ecuaciones que variables, llamados **sistemas no cuadrados**, tienen un número infinito de soluciones o no tienen ninguna, pero no pueden tener una solución única. El siguiente ejemplo ilustra el método para resolver tales sistemas.

EJEMPLO 4

Resolver los sistemas no cuadrados:

a) (A) $x - 2y + z = 3$

(B) $x + 4y - z = -7$

Al sumar (A) y (B) puede eliminarse z y se obtiene

$$2x + 2y = -4$$

$$x + y = -2$$

$$y = -x - 2.$$

Se sustituye y por $-x - 2$ en cualquiera de las dos ecuaciones originales, en este caso se elige (A), y se despeja z en términos de x .

$$\begin{aligned}x - 2(-x - 2) + z &= 3 \\x + 2x + 4 + z &= 3 \\z &= -3x - 1\end{aligned}$$

Así, las soluciones del sistema pueden expresarse como $(x, -x - 2, -3x - 1)$, para toda x real.

b) (A) $-x + 3y + z = 2$
(B) $2x - 6y - 2z = -2$

Si la ecuación (A) se multiplica por 2 y el resultado se suma a (B), se obtendrá la contradicción $0 = 2$, por consiguiente, el sistema no tiene solución.

Sistemas homogéneos

Si todos los términos constantes en un sistema de ecuaciones son nulos, al sistema se le llama **homogéneo**. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= 0 \\b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= 0 \\c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 &= 0\end{aligned}$$

es un sistema homogéneo de 3×3 . Una solución obvia al sistema homogéneo es la **solución trivial**, $(0, 0, 0)$. Los sistemas homogéneos a menudo tienen también soluciones no triviales, las cuales pueden encontrarse por el método de reducción.

Esta sección concluye con un ejemplo que aplica un sistema de tres ecuaciones con tres variables a un problema de geometría.

EJEMPLO 5

Geometría

En un triángulo, el ángulo más grande es 70° mayor que el ángulo más pequeño y el ángulo restantes es 10° mayor que tres veces el ángulo más pequeño. Encontrar la medida de cada ángulo.

Sea x = la medida del ángulo más pequeño,

y = la medida del ángulo medio,

z = la medida del ángulo más grande.

Puesto que z es 70° mayor que x ,

$$\begin{aligned}x + 70 &= z \\(A) \quad x - z &= -70.\end{aligned}$$

Puesto que y es 10° mayor que tres veces x ,

$$\begin{aligned}3x + 10 &= y \\(B) \quad 3x - y &= -10.\end{aligned}$$

Por último, la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180° .

$$(C) \quad x + y + z = 180$$

Por tanto, debe resolverse el siguiente sistema:

$$(A) \quad x - z = -70$$

$$(B) \quad 3x - y = -10$$

$$(C) \quad x + y + z = 180$$

Obsérvese que y no aparece en (A). Si se suman (B) y (C) el resultado es también una ecuación sin y .

$$(D) \quad 4x + z = 170$$

Así, debe resolverse el siguiente sistema.

$$(A) \quad x - z = -70$$

$$(D) \quad 4x + z = 170$$

Se suman (A) y (D).

$$5x = 100$$

$$x = 20$$

Se sustituye x por 20 en (A).

$$-z = -70$$

$$-z = -90$$

$$z = 90$$

Se sustituye x por 20 en (B).

$$3(\quad) - y = -10$$

$$60 - y = -10$$

$$-y = -70$$

$$y = 70$$

Los ángulos tienen medida de 20° , 70° y 90° .

10.2. Ejercicios

Resolver cada sistema de ecuaciones en los ejercicios 1-22.

$$\begin{aligned} 1. \quad & x + y + z = 3 \\ & -x + 2y - z = 0 \\ & 3x - y + 2z = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & x + y + z = 6 \\ & x - z = -2 \\ & y + 3z = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & 3x - y + z = 10 \\ & x + 2y - z = -2 \\ & -2x + y + z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad & 3x + 2y + z = 2 \\ & x - 2y - z = 2 \\ & 2x - y + z = 7 \end{aligned}$$

[Sugerencia: se elimina x de las dos primeras ecuaciones y se para el resultado con la tercera.]

[Sugerencia: la suma de las dos primeras ecuaciones da el valor numérico de x . Se sustituye este valor para obtener un sistema de 2×2 en y y z .]

- | | | |
|---|---|---|
| 5. $x + 5y - z = 2$
$4x - y + 3z = 3$
$8x - 2y + 6z = 7$ | 6. $x - y + z = -8$
$2x + y + 2z = -1$
$x + y + z = 2$ | 7. $3x + y + z = 0$
$-5x + 5y + z = 0$
$x + 2y + z = 0$ |
| 8. $x + 2y - 3z = 0$
$2y + z = 0$
$x + 4y - 2z = 0$ | 9. $2x + y = 0$
$x - 3y + z = 0$
$3x + y - z = 0$ | 10. $5x - y + z = 0$
$2x + y - 2z = 0$
$x - y - z = 0$ |
| 11. $x - 3y + 2z = -1$
$4x + 3y + 3z = 6$ | 12. $2x - y + 5z = 3$
$2x + y - z = 1$ | 13. $x - 3y + 5z = 2$
$-2x + 6y - 10z = 7$ |
| 14. $5x + y - 3z = 2$
$-15x - 3y + 9z = 5$ | 15. $\frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{2}z = -2$
$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = 2$
$-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = -1$ | 16. $\frac{1}{x} - \frac{2}{y} - \frac{1}{z} = 2$
$\frac{2}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 7$
$\frac{3}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} = 2$ |
| 17. $x - y + z + w = 2$
$x + y - z + w = 4$
$x + y + z - w = -2$
$x - y - z - w = 0$ | 18. $5x - y - 3z + w = 0$
$2x - 3y + z - 4w = 0$
$-x + 2y + 5z + w = 0$
$2x + 2y - 3z - w = 0$ | 19. $x + y + z - w = 1$
$2x - y + 3z - w = -2$
$x - y + 2z - w = 3$ |
| 20. $2x - y - z + 3w = -1$
$x + 5y - 3z + 2w = 7$
$-4x + 2y + 2z - 6w = 5$ | 21. $x + 2y = 3$
$x - 2y = 5$
$3x + y = 1$ | 22. $x - y = 2$
$x + y = 0$
$x - 3y = 4$ |

En los ejercicios 23-35, resolver cada problema utilizando un sistema de ecuaciones.

23. La suma de tres números es 4. El primero, más dos veces el segundo, más el tercero, es 1. Tres veces el primero, más el segundo, menos el tercero, es -2. ¿Cuáles son estos tres números?
24. Educación. El promedio de tres calificaciones de un alumno es 74. Si la primera es 21 puntos menor que la segunda, y dos veces la tercera es la suma de las dos primeras más 15, ¿cuáles son las tres calificaciones?
25. La suma de las edades de Maru, León y Lulú es 53. Lulú es 5 años más joven que León y, dentro de dos años, Maru tendrá la misma edad que León tiene ahora. ¿Cuál es la edad de cada uno?
26. Geometría. El ángulo más pequeño de un triángulo mide la tercera parte del ángulo más grande, y el ángulo de tamaño medio es 30° menor que el ángulo más grande. Encontrar la medida de cada ángulo.
27. Deportes. El número total de butacas en un estadio deportivo de baloncesto es 12 000. El estado está dividido en tres secciones: lunetas, palcos de platea y galerías. Hay dos veces más butacas de galería que butacas de luneta. Para el juego de campeonato los precios de los boletos eran de 10.00 dólares para luneta, 8.00 dólares para galería y 7.00 dólares para platea. Si hubo un lleno total para ese juego y la recaudación en taquilla fue de 99 000 dólares, ¿cuántas butacas eran de luneta?
28. Menudeo. El miércoles, una negociante de aparatos electrodomésticos vendió 3 estufas, 4 refrigeradores y 2 lavadoras por un total de 4 950 dólares. El jueves, vendió 2 estufas, 5 refrigeradores y 1 lavadora por un total de 4 650 dólares. El viernes, vendió 4 estufas y 2 refrigeradores por 3 100 dólares. Si no hubo cambios de precios par estufas, refrigeradores y lavadoras en esos días, ¿cuál era el precio de una estufa?
29. Consumo. Berta tiene una colección de monedas de 5¢, 10¢ y 25¢ con un valor total de 4.60 dólares. Si el número de monedas es 40, y dos veces el número de monedas de 5¢ es lo mismo que tres veces el número de monedas de 25¢, ¿cuántas monedas hay de cada tipo?

- 30.** Una colección de 100 monedas de 5¢, 10¢ y 25¢ tiene un valor de 16.00 dólares. Si el número de monedas de 5¢ más el número de monedas de 10¢ es igual al número de monedas de 25¢, ¿cuál es el número de monedas de cada valor?
- 31. Inversión.** El señor Lara tiene 5 000 dólares repartidos en tres inversiones separadas. Una parte del dinero está invertida en bonos al 8%, otra parte en certificados al 7% y el resto está en un fondo mutualista. Si al fondo le va bien y gana 6%, las ganancias totales de las tres inversiones tendrán un monto de 345 dólares. Sin embargo, si al fondo no le va bien, él perderá 3% de su inversión y las ganancias totales de las tres inversiones tendrán un monto de tan sólo 165 dólares. ¿A cuánto asciende la inversión en cada categoría?
- 32. Inversión.** Laura tiene 10 000 dólares diversificados en tres inversiones. Una parte está invertida en un fondo mutualista que gana 8%, otra parte está invertida en certificados a plazo que ganan 7% y el resto está invertido en un negocio. Si al negocio le va bien, ganará 10% y sus ganancias totales tendrán un monto de 790 dólares. Si el negocio pierde 2%, sus ganancias totales tendrán un monto de tan sólo 550 dólares. ¿A cuánto asciende la inversión en cada categoría?
- 33. Manufactura.** Estufas Aspen fabrica tres modelos de estufas quemadoras de madera; la Sierra, la San Juan y la Colina Azul. Cada estufa debe pasar por tres etapas: corte, soldadura y acabado. El número total de horas de producción a la semana es 195 para corte, 200 para soldadura y 190 para acabado. El número de horas requeridas en cada etapa para cada estufa se resume en la tabla de abajo. ¿Cuántas estufas de cada tipo deben fabricarse a la semana para que la compañía opere a plena capacidad de producción?

Etapas	Sierra	San Juan	Colina Azul
Corte	5	5	2
Soldadura	4	6	2
Acabado	4	5	3

- 34. Recreación.** Cuando se abren simultáneamente las tres válvulas, a , b y c , se llena una piscina en 1 hora. Cuando se abren a y b , y c permanece cerrada, la piscina se llena en $\frac{6}{5}$ horas; y cuando se abren b y c , y a permanece cerrada, la piscina se llena en 2 horas. ¿Cuánto tiempo le tomaría a cada válvula llenar la piscina si las otras dos permanecieran cerradas?
- 35. Ajuste de curvas.** La función polinómica $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene la propiedad de que $P(1) = 6$, $P(-1) = 6$, y $P(2) = 15$. ¿Cuáles son los valores de a , b y c ?

Geometría analítica. Dos puntos diferentes determinan una recta única. De manera similar, tres puntos no colineales, sin que dos de los cuales estén sobre la misma recta vertical, determinan una parábola única con ecuación $y = ax^2 + bx + c$. Al sustituir las coordenadas de tres puntos dados en esta ecuación, el resultado es un sistema de 3×3 en a , b y c , la solución del cual determina la ecuación. En los ejercicios 36-37, encontrar la ecuación de la parábola determinada por los puntos indicados.

36. $(1, 8)$, $(-1, 4)$, $(3, 20)$

37. $(1, 0)$, $(-2, -12)$, $(2, 0)$

- 38. Estadística.** Un perito en estadística podría usar la parábola de regresión de mínimos cuadrados, $y = ax^2 + bx + c$, como la parábola de mejor ajuste para representar un conjunto de puntos $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)\}$. Los valores para a , b y c están determinados por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)a + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)b + 4c &= (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \\ (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3)a + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)b + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)c &= (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4) \\ (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4)a + (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3)b + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)c &= (x_1^2y_1 + x_2^2y_2 + x_3^2y_3 + x_4^2y_4). \end{aligned}$$

Encontrar la parábola de regresión de mínimos cuadrados para los puntos $\{(-1, 0), (0, 2), (0, 1), (-2, 0)\}$.

Geometría analítica. Tres puntos no colineales determinan un círculo único con ecuación $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Encontrar, en los ejercicios 39 y 40, la ecuación del círculo determinado por los puntos indicados.

39. $(1, 2), (4, -1), (-2, -1)$

40. $(-2, 5), (3, 0), (-2, -5)$

41. Resolver el sistema para x y y suponiendo que a y b son constantes diferentes de cero.

$$ax - by = 2$$

$$2ax + by = 4$$

42. Encontrar los valores para m de modo que el sistema sea dependiente.

$$2x - 5y = 3$$

$$6x - 15y = m$$

43. Encontrar los valores para m de modo que el sistema sea inconsistente.

$$3x + 7y = 2m$$

$$-6x - 14y = 5$$

44. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 5. Si se invierte la posición de los dígitos, el número resultante es el original menos 9. Encontrar este número.

45. **Geometría.** El perímetro de un rectángulo es de 50 ft y el largo mide 1 ft más que dos veces el ancho. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

46. **Ajuste de curvas.** Determinar las constantes a y b para la función $f(x) = ae^x + be^{-x} + 1$ si $f(0) = 2$ y $f(\ln 2) = \frac{9}{2}$.

Dibujar la gráfica de cada ecuación lineal en los ejercicios 47-50. Estos problemas ayudan a preparar el material para la siguiente sección.

47. $4x + 2y = -6$

48. $3x + 2y = 0$

49. $x + 1 = 0$

50. $2y - 2 = 0$

Desigualdades lineales

En el capítulo 2 se examinó la resolución de desigualdades lineales con una variable y la graficación de las soluciones en una recta numérica. En esta sección se considerarán desigualdades con dos variables, en las cuales las variables están elevadas a la primera potencia. Una **desigualdad lineal con dos variables** x y y siempre puede escribirse en una de las formas:

$$ax + by < c, \quad ax + by > c, \quad ax + by \leq c, \quad \text{o} \quad ax + by \geq c,$$

donde a , b y c son números reales constantes con a y b diferentes de cero. Del mismo modo que con las ecuaciones lineales estudiadas antes, la solución de una desigualdad es un par ordenado de números que, al sustituir a x y y , hacen verdadera la desigualdad. Por ejemplo, $(-1, 0)$ es una solución para $2x + y < -1$ ya que

$$2(-1) + 0 < -1$$

$$-2 < -1$$

es verdadero. Por otro lado, $(4, -3)$ no es una solución ya que

$$\begin{aligned}
 2(\quad) + (\quad) &< -1 \\
 8 - 3 &< -1 \\
 5 &< -1
 \end{aligned}$$

es falso.

Graficación de desigualdades lineales

Una manera de identificar la solución de una desigualdad lineal es mostrar su gráfica, es decir, el conjunto de todos los puntos en el plano cuyas coordenadas resuelven la desigualdad. Graficar una desigualdad lineal no es mucho más difícil que graficar una ecuación lineal. De hecho, un procedimiento muy común consiste en reemplazar provisionalmente el signo de desigualdad por un signo de igualdad y graficar

$$ax + by = c,$$

que es una recta. Esta **recta frontera** divide al plano en dos regiones llamadas **semitplanos**, como se muestra en la figura 3. Si la desigualdad es \leq o \geq , los puntos en la recta frontera están contenidos en el semiplano, y la región es un **semitplano cerrado**. Si la desigualdad es $<$ o $>$, la recta frontera no está contenida y la región es un **semitplano abierto**. Por lo regular, un semiplano cerrado se indica con una línea continua y un semiplano abierto con una línea punteada.

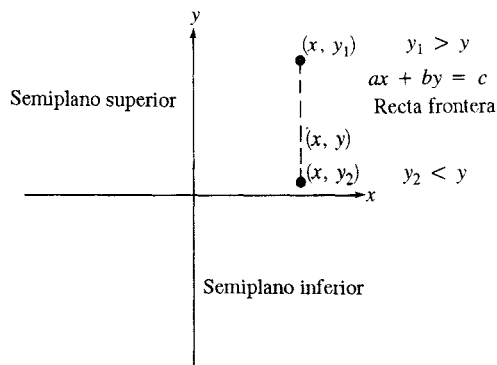


Figura 3. Semiplanos.

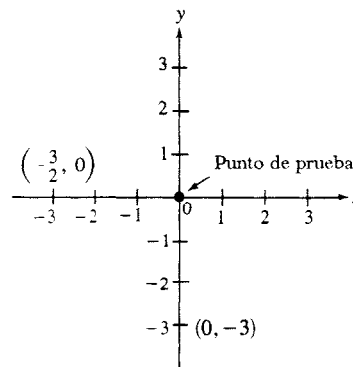


Figura 4

Puesto que $y_1 > y$, el punto (x, y_1) en el semiplano superior de la figura 3 satisfaría la desigualdad $ax + by > c$. De manera análoga, puesto que $y_2 < y$, el punto (x, y_2) en el semiplano inferior satisfaría la desigualdad $ax + by < c$. Las soluciones de una desigualdad particular corresponden a todos los puntos que están en exactamente uno de los semiplanos determinados por la recta frontera.

Así, de acuerdo con lo anterior, puede exponerse el siguiente método.

Para graficar una desigualdad con dos variables

1. Se traza la recta frontera utilizando una línea continua si la desigualdad es \leq o \geq o una línea punteada si es $<$ o $>$.
2. Se escoge un punto que no esté sobre la recta frontera (a menudo se selecciona el punto $(0, 0)$) y se usa como **punto de prueba** sustituyendo sus coordenadas en la desigualdad.
3. Se sombrea el semiplano que contiene al punto de prueba si se obtiene una desigualdad verdadera o se sombrea el semiplano que no contiene al punto de prueba si resulta una desigualdad falsa.

EJEMPLO 1

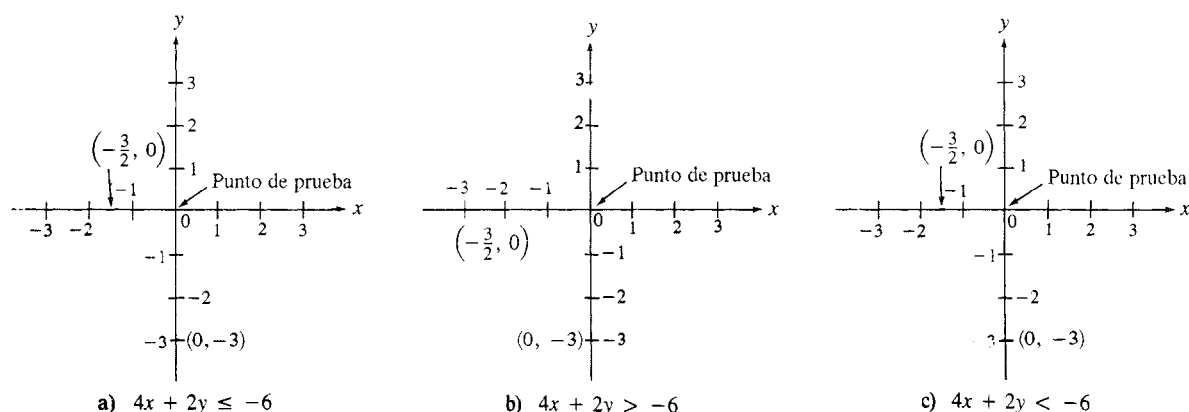
Graficar la desigualdad $4x + 2y \geq -6$.

Primero se traza la recta $4x + 2y = -6$ con línea continua porque la desigualdad es \geq . Se emplean las coordenadas al origen $(0, -3)$ y $(-\frac{3}{2}, 0)$ para obtener la gráfica. A continuación, se selecciona un punto de prueba; $(0, 0)$ es fácil de usar

$$\begin{aligned} 4x + 2y &\geq -6 \\ 4(0) + 2(0) &\geq -6 \\ 0 &\geq -6 \end{aligned}$$

Puesto que se ha obtenido una desigualdad verdadera, se sombrea el semiplano que contiene a $(0, 0)$ para obtener la gráfica que aparece en la figura 4.

En vista del trabajo desarrollado en el ejemplo 1, es fácil mostrar que las gráficas de $4x + 2y \leq -6$, $4x + 2y > -6$ y $4x + 2y < -6$ aparecen como a), b) y c), respectivamente, en la figura 5.

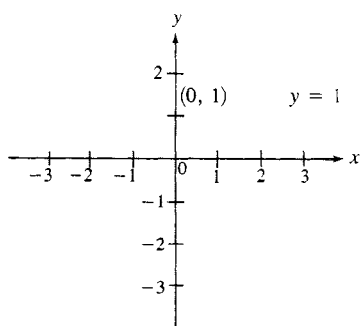
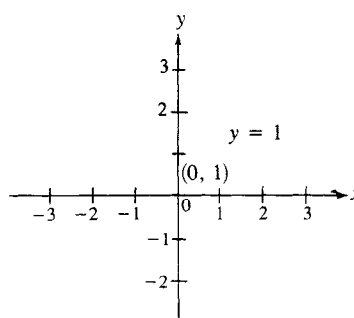
**Figura 5**

Cuando $a = 0$ o $b = 0$ en una desigualdad lineal con dos variables, la gráfica de la desigualdad es un semiplano superior o inferior o un semiplano izquierdo o derecho, respectivamente.

EJEMPLO 2

Graficar la desigualdad $2y - 2 < 0$.

Primero se traza la recta $2y - 2 = 0$, la cual se simplifica $y = 1$. Se empleará una línea punteada. El punto de prueba $(0, 0)$ muestra que la gráfica es el semiplano abierto inferior de la figura 6.

**Figura 6****Figura 7**

En vista del ejemplo 2, se sabe que la gráfica de $2y - 2 \geq 0$ es el semiplano cerrado superior de la figura 7.

De manera semejante, es fácil verificar que las gráficas de $3x - 3 \geq 0$ y $3x - 3 < 0$ corresponden a a) y b), respectivamente, en la figura 8.

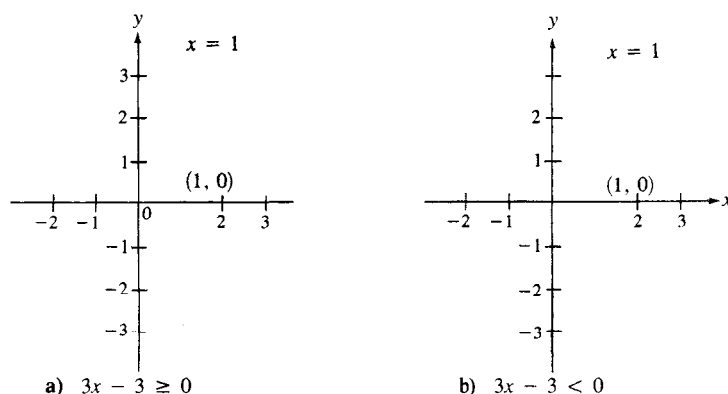


Figura 8

Sistemas de desigualdades lineales

Como podría esperarse por lo expuesto hasta aquí, la solución de un sistema de desigualdades lineales es un par ordenado de números que resuelve cada desigualdad en el sistema. La gráfica de tal sistema es el conjunto de puntos en el plano que corresponde a estas soluciones. Para encontrar la gráfica se dibujan las gráficas de todas las desigualdades del sistema en el mismo plano y se identifica la región donde estas gráficas se superponen o se intersecan.

EJEMPLO 3

Graficar el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 3y &< 6 \\ -2x + y &\geq 1 \end{aligned}$$

Se traza $2x + 3y = 6$ con línea punteada utilizando las coordenadas al origen $(0, 2)$ y $(3, 0)$, y luego se traza $-2x + y = 1$ con línea continua utilizando las coordenadas al origen $(0, 1)$ y $(-\frac{1}{2}, 0)$. El punto de prueba $(0, 0)$ puede usarse para ambas desigualdades.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &< 6 & -2x + y &> 1 \\ 2(0) + 3(0) &< 6 & -2(0) + 0 &\geq 1 \\ 0 &< 6 & 0 &\geq 1 \end{aligned}$$

La gráfica del sistema es la región formada por la superposición del semiplano abierto bajo la recta $2x + 3y = 6$ y el semiplano cerrado sobre la recta $-2x + y = 1$, como se aprecia en la figura 9.

Se dice que la gráfica del sistema del ejemplo 3 no está **acotada** ya que se extiende en forma infinita en algunas direcciones. Muchos sistemas que tienen **gráficas acotadas**, encerradas por todos lados mediante segmentos, desempeñan funciones importantes en un método de resolución de problemas que se analiza en la próxima sección.

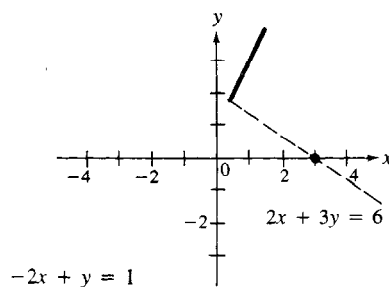


Figura 9. Gráfica de un sistema de desigualdades.

EJEMPLO 4

Graficar el sistema:

$$\begin{aligned} x &\leq 0 \\ y &\geq 0 \\ 2x - 5y &\geq -10 \\ x - y &\geq -3 \end{aligned}$$

Obsérvese que las primeras dos desigualdades describen los puntos sobre el eje x negativo, el eje y positivo y en el segundo cuadrante. En lo referente a las dos últimas desigualdades, es necesario trazar las rectas $2x - 5y = -10$ y $x - y = -3$. El punto de intersección de las dos rectas, $(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$, puede determinarse resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= -10 \\ x - y &= -3. \end{aligned}$$

La región que satisface las dos desigualdades $2x - 5y \geq -10$ y $x - y \geq -3$ está cuadrículada en la figura 10 a). La gráfica del sistema original es la porción limitada del plano, en el segundo cuadrante, la cual también satisface las dos desigualdades de arriba, como se muestra en la figura 10 b).

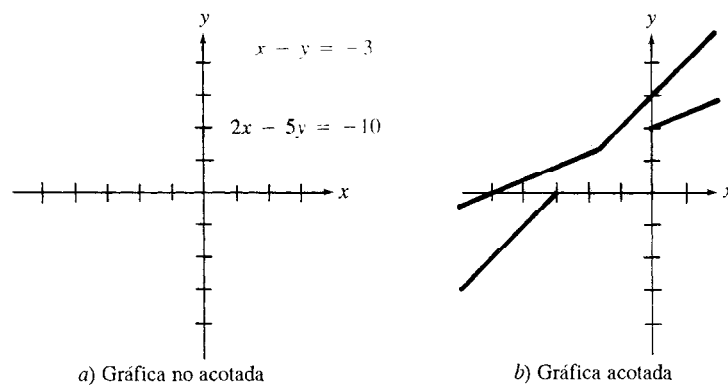


Figura 10

Muchos problemas de aplicación en que intervienen dos variables pueden describirse mediante un sistema de desigualdades. La gráfica del sistema muestra todas las soluciones posibles del problema. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo y se considera con mayor detalle en la próxima sección.

EJEMPLO 5

Menudeo

El propietario de un almacén minorista tiene en existencia dos modelos de máquinas de escribir, la ejecutiva y la normal. Ha descubierto que debido a la demanda es necesario tener al menos dos veces más modelos ejecutivos que modelos normales. Además, todo el tiempo debe tener a la mano al menos 10 modelos ejecutivos y 5 modelos normales. Por último, debido a las limitaciones de espacio, no puede almacenar más de 30 máquinas de escribir a la vez. Graficar el sistema de desigualdades que describe esta información.

Sean x = el número de modelos ejecutivos en existencia,

y = el número de modelos normales en existencia.

Entonces, el sistema de desigualdades es:

$$\begin{aligned} x &\geq 2y \\ x &\geq 10 \\ y &\geq 5 \\ x + y &\leq 30. \end{aligned}$$

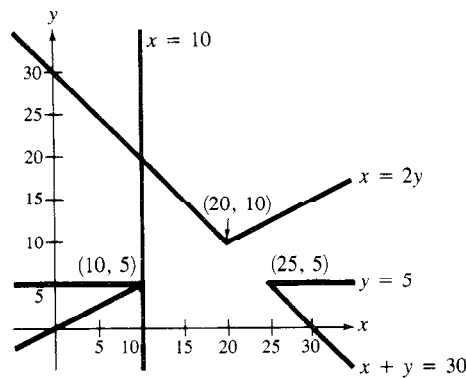


Figura 11

La gráfica del sistema se presenta en la figura 11, donde el punto $(20, 10)$ se determinó resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} x - 2y &= 0 \\ x + y &= 30. \end{aligned}$$

10.3. Ejercicios

En los ejercicios 1-10, dibujar la gráfica de cada desigualdad.

1. $3x - 2y \leq 6$

2. $3x - 2y > 6$

3. $2x + y < -2$

4. $2x + y < 3$

5. $x - y < -2$

6. $x - y \geq -2$

7. $3x + 2y < 0$

8. $3x + 2y \geq 0$

9. $4y - 8 \leq 0$

10. $3x + 9 > 0$

En los ejercicios 11-22, dibujar la gráfica de cada sistema de desigualdades.

- | | | | |
|--|--|---|---|
| 11. $2x - 3y \geq 6$
$x + y < -1$ | 12. $2x - 3y < 6$
$x + y \leq -1$ | 13. $2x - 3y < 6$
$x + y \geq -1$ | 14. $2x - 3y \geq 6$
$x + y > -1$ |
| 15. $2x - 2y \geq -4$
$x - y < 1$ | 16. $2x - 2y < -4$
$x - y \geq 1$ | 17. $-2x + 3y \leq 6$
$x + 1 > 0$ | 18. $x - 2 \leq 0$
$y + 1 > 0$ |
| 19. $x \geq 0$
$y \geq 0$
$3x + 7y < 21$ | 20. $x \geq 0$
$y \leq 0$
$x - y \leq 4$ | 21. $x \leq 0$
$y \geq 0$
$2x - y \geq -6$
$x + 2y \leq 2$ | 22. $x \geq 1$
$y \geq 2$
$x + 3y \leq 19$
$3x + 2y \leq 22$ |

En los ejercicios 23-24, graficar el sistema descrito por la información proporcionada.

- 23. Administración.** Un comerciante vende dos modelos de casas móviles en un lote particular, la Princesa y el Caballero. Debido a la demanda, debe tener al menos tres veces más casas Princesa disponibles que casas Caballero. En todo momento quiere tener al menos 6 casas Princesa y 2 casas Caballero disponibles y listas para ocupación. El modelo Princesa le cuesta al comerciante 30 000 dólares, el modelo Caballero le cuesta 20 000 dólares y desea mantener sus costos de inventario en 600 000 dólares o menos. Formar el sistema de desigualdades descrito por esta información y graficar el sistema.
- 24. Manufactura.** Un fabricante de mesas para comidas campestres tiene dos modelos, el Simple y el Lujoso. La tabla de abajo muestra la información referente a la producción. El número de cada tipo de mesa hecha cada semana no debe exceder a las horas de trabajo disponibles en cada etapa de manufactura. Formar el sistema de desigualdades descrito por esta información y graficar el sistema.

	Horas de trabajo por mesa simple	Horas de trabajo por mesa lujosa	Máximo de horas de trabajo disponibles por semana
Etapas de construcción	3	6	96
Etapas de acabado	1	4	36

Resolver:

- 25. Consumo.** Si 2 lb de caramelo y 3 lb de nueces cuestan un total de 4.90 dólares y 3 lb de caramelo y 5 lb de nueces cuestan un total de 7.90 dólares, ¿cuál es el costo de 1 lb de nueces y de 1 lb de caramelo?
- 26. Química.** Un químico tiene una solución que contiene 5% de sal y otra que contiene 10% de sal. ¿Cuántos litros de cada una deben mezclarse para obtener 40 l de una solución salina al 8%?
- 27. Geometría.** El ángulo más pequeño de un triángulo es 28° menor que el ángulo más grande, y la medida del ángulo más grande menos la medida del ángulo de tamaño medio es 2° . Encontrar la medida de cada ángulo.
- 28. Inversión.** Boris recibió una herencia con un monto de 20 000 dólares. Decidió invertir el dinero en tres cuentas diferentes; una que paga 10%, otra 11% y la otra 8%, el tipo de interés es simple. Si el monto invertido al 10% era tres veces el invertido al 8% y sus ganancias totales por concepto de interés para el año ascendieron a 1 960 dólares, ¿cuál fue la inversión a cada tasa?
29. $3x + y - z = 0$
 $x - y + 2z = 0$
 $7x + y = 0$
30. $5x + 2y - z = 2$
 $3x - 3y + z = -1$

Los sistemas de ecuaciones y desigualdades lineales proporcionan las herramientas para un método de resolución de problemas llamada **programación lineal**. La programación lineal, desarrollada por George B. Danzig en la década de los cuarenta, fue utilizada primero por los militares como ayuda para asignar pertrechos durante la Segunda Guerra Mundial. En la actualidad se usa mucho para resolver problemas de interés para la comunidad empresarial. Uno de tales problemas consiste en encontrar el valor máximo o mínimo de una expresión de la forma:

$$P = ax + by,$$

llamada **función objetivo**, sujeta a ciertas limitaciones, llamadas **restricciones**, sobre las variables x y y . Por ejemplo, $ax + by$ podría denotar la utilidad resultante de "programar" los recursos de una compañía productora de tal manera que x unidades de un producto y y unidades de otro están en el proceso de producción. Las restricciones en el problema se dan como un sistema de desigualdades que debe graficarse.

Supóngase que se considera el problema de maximizar la función objetivo $P = 50x + 35y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned}x &\geq 0 \\y &\geq 0 \\x + y &\leq 18 \\5x + 3y &\leq 60\end{aligned}$$

En otras palabras, se desea encontrar el valor más grande de $50x + 35y$ donde x y y satisfacen al sistema de desigualdades de arriba. Cualquier par (x, y) que resuelva el sistema de restricciones es una **solución factible** del problema. La colección de todas las soluciones factibles, mostrada en la figura 12, es la **región factible**. Cualquier solución factible que determine un valor máximo (o valor mínimo en otros problemas) es una **solución óptima** del problema.

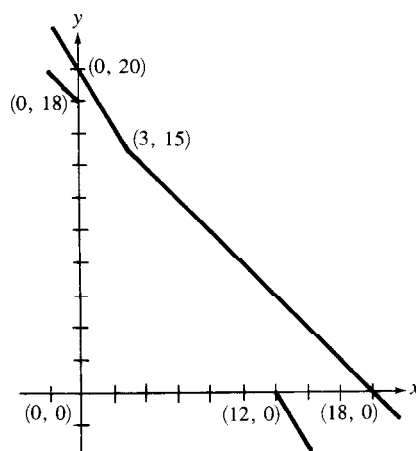


Figura 12. Región factible.

En esta sección, la región factible siempre tiene una frontera que consta de rectas o segmentos de recta que se intersecan en puntos, cada uno de los cuales se denomina **vértice**. La existencia de una solución óptima depende de la naturaleza de la región factible, consideración que excede el alcance de este libro. Sin embargo, bajo la suposición de que existirá una solución óptima, el siguiente teorema se refiere a dónde debe encontrarse.

Teorema fundamental de la programación lineal

Si un problema de programación lineal tiene una solución óptima, entonces al menos un vértice de la región factible proporcionará esa solución.

Volvamos al problema de encontrar el valor máximo de la función objetivo $P = 50x + 35y$ sujeta a las restricciones graficadas en la figura 12. Los vértices son $(0, 0)$, $(0, 18)$, $(3, 15)$ y $(12, 0)$. De acuerdo con el teorema de arriba, debe encontrarse una solución óptima entre estos pares. Las posibilidades se resumen en una tabla.

Vértice	$50x + 35y$
$(0, 0)$	0
$(0, 18)$	630
$(3, 15)$	675
$(12, 0)$	600

Así, considerando todos los valores posibles de x y y tales que (x, y) esté en la región factible, $x = 3$ y $y = 15$ producen el valor más grande de $50x + 35y$, el cual es 675.

En el siguiente algoritmo se resume el procedimiento general.

Para encontrar una solución óptima a un problema de programación lineal

1. Se grafica el sistema de desigualdades lineales que forman las restricciones y, una vez trazado, se identifica la región factible.
2. Se determinan los vértices de la región factible al resolver, dos a la vez, las ecuaciones lineales que describen la frontera de la región.
3. Se completa una tabla de valores para la función objetivo $P = ax + by$ utilizando todos los vértices.
4. Si se va a maximizar (o minimizar) $ax + by$ el valor más grande (o pequeño) en la tabla es una solución óptima.

EJEMPLO 1

Administración

Una compañía manufacturera fabrica dos tipos de rótula para enganchar remolques; un modelo normal y otro para trabajo pesado. Puede producir hasta 18 rótulas por día empleando hasta un total de 60 horas-hombre de trabajo. La experiencia ha mostrado que toma 3 horas-hombre producir una rótula normal, mientras que se requiere de 5 horas-hombre para hacer una rótula para trabajo pesado. Si un modelo para trabajo pesado reditúa una utilidad de 50 dólares al venderse y un modelo normal reditúa una utilidad de 35 dólares, ¿cuántas piezas de cada una deberían fabricarse en un día con la finalidad de maximizar la utilidad?

Primero debe traducirse el problema a un sistema de desigualdades e identificarse la función objetivo.

Sean x = el número de rótulas para trabajo pesado producidas por día,

y = el número de rótulas normales producidas por día.

En un problema como éste, x y y no pueden ser negativos, de modo que:

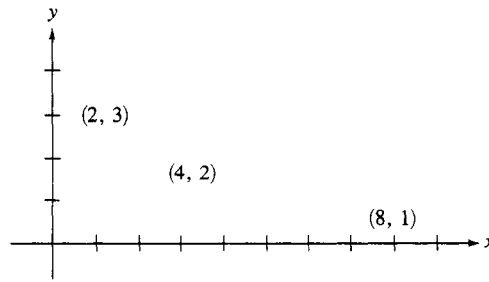


Figura 14. Región factible no acotada.

Obsérvese, en este caso, que la región factible no está acotada y que los puntos pueden seleccionarse para hacer a $3x + 7y$ tan grande como se desee. En otras palabras, debe quedar claro que $3x + 7y$ no presupone un valor máximo en la región. El valor mínimo, al igual que en el ejemplo anterior, ocurrirá en un vértice.

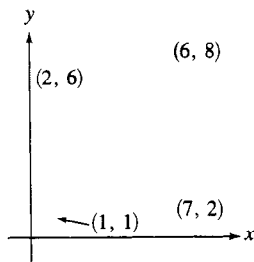
Vértice	$3x + 7y$
(2, 3)	27
(4, 2)	26
(8, 1)	31

Así, el valor mínimo de $3x + 7y$ es 26.

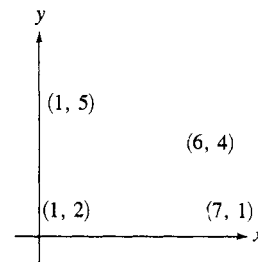
10.4. Ejercicios

En los ejercicios 1-4, encontrar los valores máximo y mínimo de la función objetivo indicada, sujeta a las restricciones graficadas en la región factible mostrada.

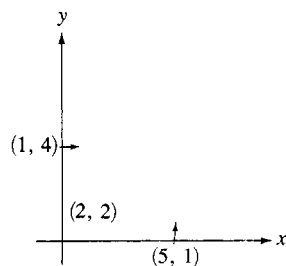
1. $P = x + 5y$



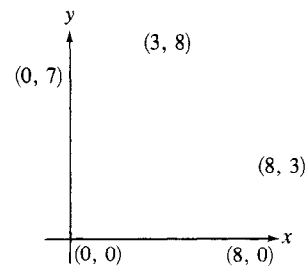
2. $P = 5x + 2y$



3. $P = 75x + 100y$



4. $P = 15x + 80y$



En los ejercicios 5-8, encontrar los valores máximo y mínimo de la función objetivo $P = 10x + 50y$, sujeta a las restricciones indicadas.

5. $x \geq 0$
 $y \geq 0$
 $x + 2y \leq 6$
 $x + y \leq 4$

6. $x \geq 1$
 $y \geq 1$
 $x + 5y \leq 26$
 $3x + 2y \leq 26$

7. $x \geq 2$
 $2y \geq 1$
 $5x + 6y \geq 28$

8. $7 \geq x \geq 2$
 $y \geq 1$
 $3y - 2x \leq 11$
 $2y + 3x \leq 29$

Resolver cada problema de programación lineal en los ejercicios 9-18.

9. **Administración.** Una empresa fabricante de balones de baloncesto obtiene una utilidad de 20 dólares sobre su modelo "Buen tiro" y 13 dólares sobre su modelo "Buen rebote". Para satisfacer la demanda de los mayoristas, la producción diaria de balones Buen tiro debe estar entre 20 y 100, inclusive, mientras que el número de balones Buen rebote debe estar entre 10 y 70, inclusive. Para mantener el control de calidad, el número total de balones producidos por día no debe exceder a 150. ¿Cuántos balones de cada modelo deben fabricarse por día para maximizar la utilidad?
10. Repetir el ejercicio 9 bajo la suposición de que la firma obtiene la misma utilidad con ambos modelos.
11. **Administración.** Una refinería de petróleo puede producir hasta 5 000 barriles de petróleo por día. El petróleo producido es de dos tipos, el tipo G se usa para gasolina y el tipo H como combustible para calefacción. Al menos 1 000 y a lo más 3 500 barriles del tipo G deben producirse cada día. Si hay una utilidad de 7.00 dólares por barril para G y 3.00 dólares por barril para H, ¿cuál es la utilidad máxima por día?
12. Repetir el ejercicio 11 bajo la suposición de que hay una utilidad de 4.00 dólares por barril para G y 8.00 dólares por barril para H.
13. **Agricultura.** Un campesino tiene 100 acres sobre los cuales puede cultivar maíz y trigo. La semilla para plantar maíz cuesta 5.00 dólares por acre y la semilla para plantar trigo 8.00 dólares por acre. Los costos de mano de obra y combustible ascienden a 20.00 dólares por acre para el maíz y a 12.00 dólares por acre para el trigo. Si es el clima bueno, puede ganar 220 dólares por acre con el maíz y 250 dólares por acre con el trigo. Si puede gastar hasta 704 dólares en semillas y hasta 1 640 dólares en mano de obra y combustible, ¿cuántos acres de cada grano debe cultivar el campesino para maximizar su utilidad?
14. Repetir el ejercicio 13 bajo la suposición de que el campesino puede ganar 270 dólares por acre con el maíz y 160 dólares por acre con el trigo.
15. **Manufactura.** Una compañía fabrica dos productos, A y B. Tres diferentes máquinas, X, Y y Z, se utilizan para hacer cada producto. Con el fin de producir una unidad de A, la máquina X debe usarse durante 2 h, la Y durante 1 h y la Z durante 1 h. La manufactura de una unidad de B requiere 1 h de X, 2 h de Y y 1 h de Z. La utilidad es de 275 dólares por cada unidad de A y de 180 dólares por cada unidad de B. En un día, la máquina X puede usarse a lo más 18 h, la Y a lo más 20 h y la Z a lo más 11 h. ¿Qué cantidad de cada producto debe fabricarse por día para maximizar la utilidad?
16. Repetir el ejercicio 15 bajo la suposición de que la utilidad por cada unidad de A es de 200 dólares y por cada unidad de B es de 210 dólares.
17. **Administración.** Una editorial tiene dos centros de distribución de publicaciones, uno en California (C) y otro en Pennsylvania (P). Hay 1 500 ejemplares de *Álgebra superior* almacenados en C y 1 200 en P. Dos escuelas, Central Technology University (CTU) y Mountain College (MC), ordenan 1 000 y 750 ejemplares, respectivamente. Para enviar de C a CTU, el costo es 50¢ por libro; de C a MC, el costo es 40¢ por libro; de P a CTU, el costo es 45¢ por libro; y de P a MC, el costo es 60¢ por libro. ¿Cómo debería despacharse el pedido para minimizar el costo total de envío? [Sugerencia: Si x es el número de libros enviados de C a CTU, entonces $1\,000 - x$ es el número enviado de P a CTU.]
18. Repetir el ejercicio 17 bajo la suposición de que cuesta 30¢ por libro enviar de C a CTU, 50¢ por libro enviar de C a MC, 35¢ por libro enviar de P a CTU y 45¢ por libro enviar de P a MC.

En los ejercicios 19-20, dibujar la gráfica de cada sistema de desigualdades.

$$19. \begin{cases} 2x - 5y \leq 10 \\ x + 2y < -2 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} y \geq x \\ y \leq -x \end{cases}$$

- 21. Deportes.** En un auditorio con instalaciones de circuito cerrado de televisión y capacidad para 1 000 espectadores se va a realizar la pelea por el campeonato de boxeo. Los promotores planean cobrar 20 dólares por presenciar el espectáculo desde algunas butacas y 10 dólares por hacerlo desde otras, y desean obtener al menos 16 000 dólares en la función. Si al menos se van a vender 300 lugares a 10 dólares cada uno, ¿cuál es el sistema de desigualdades que describe esta situación? Dibujar su gráfica.

En los ejercicios 22-25, dibujar la gráfica de cada ecuación en un sistema de coordenadas cartesianas. Estos problemas ayudan a preparar el material presentado en la sección próxima.

$$22. (x - 2)^2 + y^2 = 4$$

$$23. \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$24. y = \log_2 x$$

$$25. y = |x - 1| + 1$$

10.5. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

Interpretación gráfica de los sistemas no lineales

Cuando se estudiaron los sistemas de dos ecuaciones lineales, las gráficas de las ecuaciones proporcionaron información útil acerca de sus soluciones. Lo mismo sucede con los **sistemas no lineales**. Una solución de un sistema no lineal como:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

es un par ordenado de números que satisface ambas ecuaciones. Los puntos de intersección de las dos gráficas corresponden a soluciones numéricas reales. En el sistema de arriba, la gráfica de la primera ecuación es un círculo y la de la segunda es una recta. En general, las gráficas de un círculo y una recta pueden relacionarse en una de tres formas diferentes, como se muestra en la figura 15.

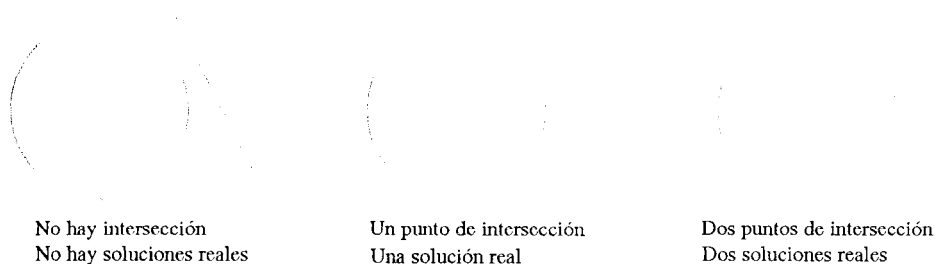


Figura 15. Intersección de un círculo y una recta.

Si se hace la gráfica de las dos ecuaciones de arriba en el mismo sistema de coordenadas, como en la figura 16, los puntos de intersección parecen tener las coordenadas $(-3, 4)$ y $(4, -3)$. Por sustitución, es fácil demostrar que estos pares de números satisfacen ambas ecuaciones y, en consecuencia, son soluciones del sistema.

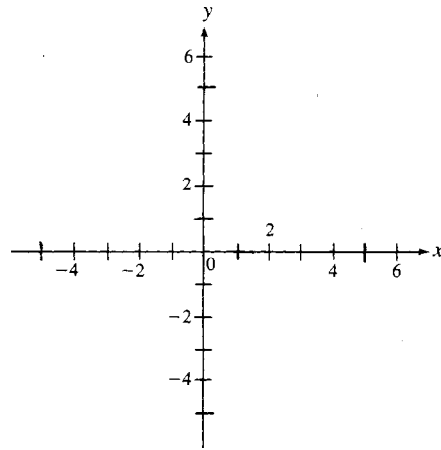


Figura 16

Método de sustitución

Por lo general es mejor resolver sistemas de manera algebraica que gráfica. Cuando una ecuación es de primer grado, se despeja una de las variables y se sustituye el resultado en la otra ecuación. Para resolver el sistema dado arriba se usa la sustitución. Se despeja y de $x + y = 1$ y se sustituye en $x^2 + y^2 = 25$.

$$\begin{aligned}
 x^2 + (\quad)^2 &= 25 \\
 x^2 + 1 - 2x + x^2 &= 25 \\
 2x^2 - 2x - 24 &= 0 \\
 x^2 - x - 12 &= 0 \\
 (x - 4)(x + 3) &= 0
 \end{aligned}$$

Al igualar cada factor a cero se obtiene lo siguiente:

$$\begin{array}{ll}
 x - 4 = 0 & \text{o} \quad x + 3 = 0 \\
 x = 4 & x = -3 \\
 y = 1 - x & y = 1 - x \\
 = 1 - 4 = -3 & = 1 - (-3) = 4
 \end{array}$$

Las soluciones son $(4, -3)$ y $(-3, 4)$, pares ordenados obtenidos previamente por graficación.

EJEMPLO 1

Resolver: $xy = -5$

$$x - y = 2$$

La primera ecuación es una hipérbola y la segunda es una recta. La figura 17 muestra tres posibilidades para las gráficas.

No hay intersección
No hay soluciones reales

Un punto de intersección
Una solución real

Dos puntos de intersección
Dos soluciones reales

Figura 17. Intersección de una hipérbola y una recta.

$$\begin{aligned}
 x &= y + 2 \\
 (y + 2)y &= -5 \\
 y^2 + 2y &= -5 \\
 y^2 + 2y + 5 &= 0 \\
 y &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(5)}}{2} \\
 &= \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} \\
 &= \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i
 \end{aligned}$$

En este caso no hay soluciones reales; las dos gráficas no se intersecan. Sin embargo, las soluciones numéricas complejas son $(1 + 2i, -1 + 2i)$ y $(1 - 2i, -1 - 2i)$.

Si las soluciones de un sistema de dos ecuaciones de segundo grado se consideran en forma gráfica, existen varias posibilidades. Algunas de éstas se muestran en la figura 18 utilizando una hipérbola y una elipse.

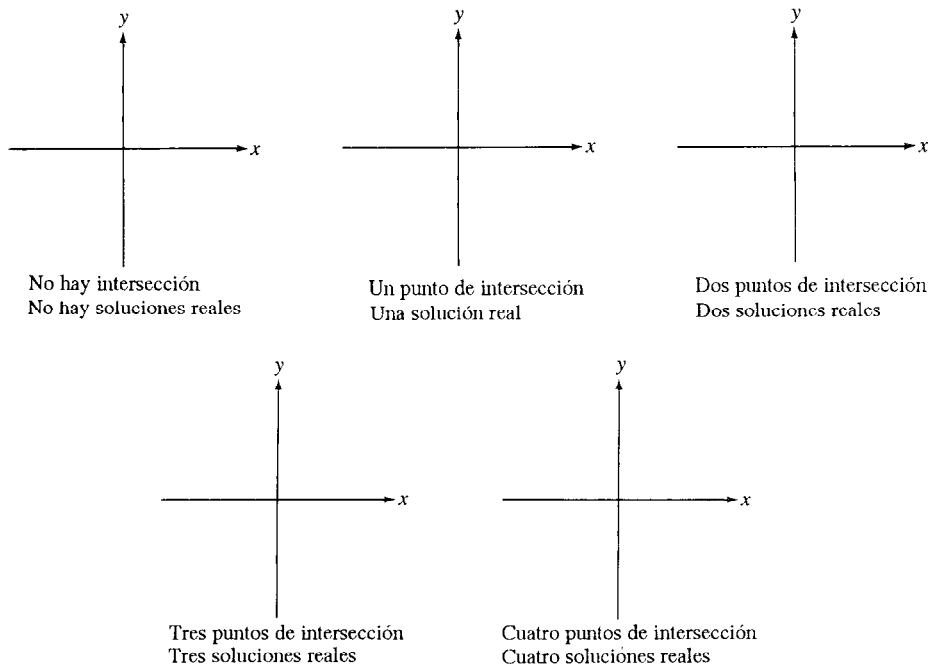


Figura 18. Intersección de una hipérbola y una elipse.

Método de eliminación

Es posible resolver muchos sistemas de dos ecuaciones de segundo grado mediante un método de eliminación parecido al expuesto para sistemas lineales. El siguiente ejemplo ilustra esta técnica.

EJEMPLO 2

Resolver: $x^2 + y^2 = 14$
 $x^2 - y^2 = 4$

Se suma para eliminar a y .

$$\begin{aligned} 2x^2 &= 18 \\ x^2 &= 9 \\ x &= \pm 3 \end{aligned}$$

Se sustituye x por 3 en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} (3)^2 + y^2 &= 14 \\ 9 + y^2 &= 14 \\ y^2 &= 5 \\ y &= \pm\sqrt{5} \end{aligned}$$

Dos de las soluciones son $(3, \sqrt{5})$ y $(3, -\sqrt{5})$. Cuando x se sustituye por -3 en la primera ecuación, se obtiene $y = \pm\sqrt{5}$. Así, hay cuatro soluciones: $(3, \sqrt{5})$, $(3, -\sqrt{5})$, $(-3, \sqrt{5})$ y $(-3, -\sqrt{5})$, las cuales deben comprobarse en ambas ecuaciones.

Cuando una de las ecuaciones en un sistema es de la forma $xy = a$, es mejor despejar una de las variables en esta ecuación y sustituir en la otra ecuación. Por ejemplo, para resolver:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ xy &= 12, \end{aligned}$$

se despeja x en la segunda ecuación y se sustituye esta expresión en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} x &= \frac{12}{y} \\ \frac{144}{y^2} + y^2 &= 25 \end{aligned}$$

Se multiplica por y^2 a ambos lados y se despeja y .

$$\begin{aligned} 144 + y^4 &= 25y^2 \\ y^4 - 25y^2 + 144 &= 0 \\ (y^2 - 16)(y^2 - 9) &= 0 \\ y^2 = 16 &\quad \text{o} \quad y^2 = 9 \\ y = \pm 4 &\quad \text{o} \quad y = \pm 3 \\ y = 4 &: x = \frac{12}{4} = 3 &\quad y = 3 &: x = \frac{12}{3} = 4 \\ y = -4 &: x = \frac{12}{-4} = -3 &\quad y = -3 &: x = \frac{12}{-3} = -4 \end{aligned}$$

Las cuatro soluciones son $(4, 3)$, $(-4, -3)$, $(3, 4)$ y $(-3, -4)$, las cuales pueden comprobarse en ambas ecuaciones.

Sistemas más complejos de segundo grado

El ejemplo siguiente ilustra una técnica para obtener una ecuación con término constante igual a cero. En ocasiones, es posible resolver la ecuación cuadrática resultante por factorización.

EJEMPLO 3

Resolver: $x^2 + 15xy + 9y^2 = -5$

$$7x^2 + 9xy + 27y^2 = 25$$

Se multiplica la primera ecuación por 5 y se suma el resultado a la segunda ecuación. La ecuación resultante tiene término constante igual a cero.

$$12x^2 + 84xy + 72y^2 = 0$$

$$x^2 + 7xy + 6y^2 = 0$$

$$(x + 6y)(x + y) = 0$$

$$x = -6y \quad \text{o} \quad x = -y$$

$$(-6y)^2 + 15(-6y)y + 9y^2 = -5 \quad (-y)^2 + 15(-y)y + 9y^2 = -5$$

$$36y^2 - 90y^2 + 9y^2 = -5$$

$$-45y^2 = -5$$

$$y^2 = \frac{1}{9}$$

$$y = \pm \frac{1}{3}$$

$$y^2 - 15y^2 + 9y^2 = -5$$

$$-5y^2 = -5$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

$$x = -6y = -6\left(\frac{1}{3}\right) = -2 \quad x = -y = -(+1) = -1$$

$$x = -6y = -6\left(-\frac{1}{3}\right) = 2 \quad x = -y = -(-1) = 1$$

Las soluciones son $\left(-2, \frac{1}{3}\right)$, $\left(2, -\frac{1}{3}\right)$, $(-1, 1)$, y $(1, -1)$.

Sistemas con otra clase de funciones

Un sistema no lineal puede abarcar otras funciones tales como funciones logarítmicas, exponenciales o trigonométricas. En ocasiones, éstas pueden resolverse de manera similar a lo visto para los sistemas de ecuaciones de segundo grado.

EJEMPLO 4

Resolver: $2e^x + y = 4$

$$e^x + 3y = 7$$

Se multiplica la primera ecuación por 3 y se resta la segunda para obtener

$$5e^x = 5$$

$$e^x = 1.$$

Entonces $x = 0$, y sustituyendo en la primera ecuación,

$$2e + y = 4$$

$$2 + y = 4$$

$$y = 2.$$

La solución es $(0, 2)$. Este sistema podría resolverse también por sustitución. Se debe despejar y en la primera ecuación $(y = 4 - 2e^x)$, sustituir en la segunda para obtener $-5e^x = -5$, la cual se reduce también a $e^x = 1$.

Graficación de sistemas de desigualdades no lineales

La técnica para graficar sistemas de desigualdades no lineales es análoga a la técnica para graficar sistemas de desigualdades lineales. Puede reemplazarse provisionalmente el símbolo de desigualdad por un signo de igualdad y graficarse la ecuación resultante con línea continua (para \leq o \geq) o punteada (para $<$ o $>$). Los puntos de prueba seleccionados entre las regiones en el plano determinadas por la curva identifican la solución de cada desigualdad. La región común a todas las soluciones es la gráfica del sistema. Las cuatro gráficas presentadas en la figura 19 ilustran algunas de las posibles desigualdades no lineales que podrían encontrarse en un sistema.

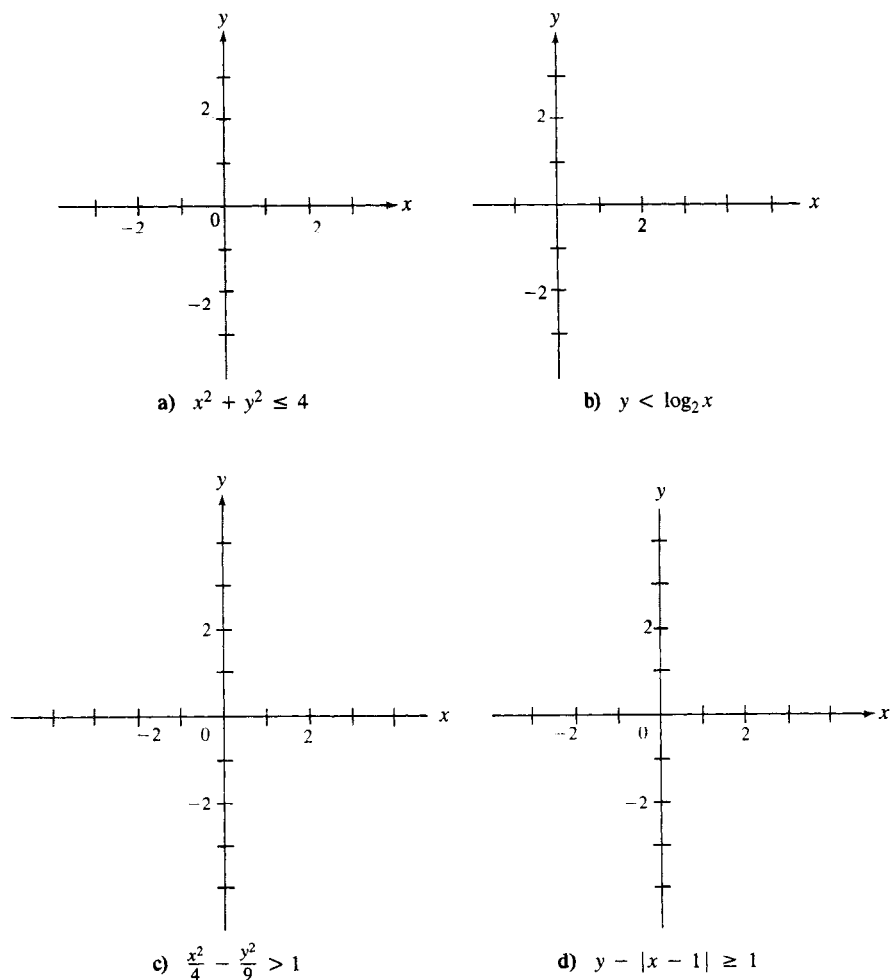


Figura 19. Gráficas de desigualdades.

EJEMPLO 5

Graficar el sistema: $y \geq x^2 - 1$
 $y < x + 1$

Se reemplazan los símbolos de desigualdad por signos de igualdad. $y = x^2 - 1$ es la ecuación de una parábola. La gráfica de $y \geq x^2 - 1$ es el conjunto de todos los puntos sobre o "dentro" de la parábola. La segunda desigualdad tiene como su gráfica a todos los puntos "abajo" de la recta $y = x + 1$. Reuniendo esta información puede obtenerse la gráfica del sistema que se muestra en la figura 20.

EJEMPLO 6

Graficar el sistema: $y \geq |x - 5|$
 $y < \log_2 x$

La gráfica de $y \geq |x - 5|$ consta de todos los puntos sobre o dentro de la "ve" en la gráfica de la función con valor absoluto $y = |x - 5|$. La gráfica de $y < \log_2 x$ contiene a todos los puntos "abajo" de la gráfica de la función logarítmica $y = \log_2 x$ (véase la figura 21).

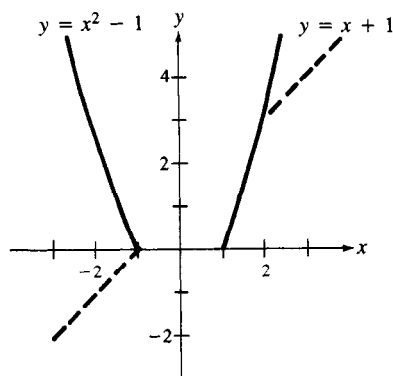


Figura 20

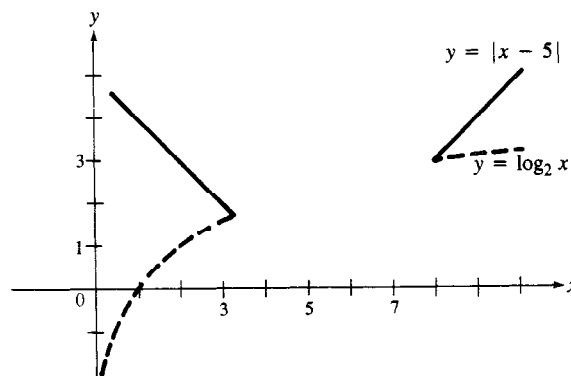


Figura 21

10.7. Ejercicios

Resolver cada sistema en los ejercicios 1-20.

- | | | | |
|--|---|---|---|
| 1. $x^2 + y^2 = 10$
$x - y = 2$ | 2. $2x^2 + y^2 = 9$
$y - 2x = 3$ | 3. $x + y = 3$
$x^2 - y^2 = 3$ | 4. $xy = 12$
$2x - y = -2$ |
| 5. $5x^2 + xy - y^2 = -1$
$y - 2x = 1$ | 6. $x^2 + 2y^2 = 8$
$x^2 - 2y^2 = 0$ | 7. $x^2 + 3y^2 = 37$
$2x^2 - y^2 = 46$ | 8. $x^2 + 2y^2 = 8$
$2x^2 - y^2 = 1$ |
| 9. $x^2 + y^2 = 5$
$xy = 2$ | 10. $x^2 + y^2 = 29$
$xy = 10$ | 11. $x^2 + 2xy + y^2 = 9$
$x^2 - 2xy - y^2 = 9$ | |
| 12. $3xy - y^2 = -13$
$2xy + y^2 = -2$ | 13. $x^2 + 2xy + 2y^2 = 10$
$2x^2 + xy + 22y^2 = 50$ | 14. $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 20$
$8x^2 - 4xy + y^2 = 20$ | |
| 15. $10^x + y = 11$
$10^x + 2y = 12$ | 16. $2^x - y = 2$
$2^x + y = 6$ | 17. $y + \log_4(x + 3) = 6$
$y - \log_4 x = 5$ | |
| 18. $\log_3 x - 2y = 2$
$\log_3 x^2 + 2y = 1$ | 19. $ y + x = 7$
$2 y - x = 5$ | 20. $ x + y = 5$
$2 x - y = 1$ | |

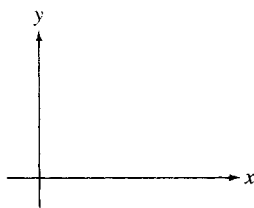
Graficar cada sistema en los ejercicios 21-32.

- | | | | |
|--|---|--|---|
| 21. $y \geq x^2$
$y \leq x + 2$ | 22. $y + x^2 \leq 0$
$x + y > -2$ | 23. $y - x \geq 0$
$y + x < 4$ | 24. $\log_2 x - y > 0$
$2x - y \leq 4$ |
| 25. $y - 2^x \geq 0$
$y - x \geq 2$ | 26. $x^2 + 4y^2 \leq 16$
$y^2 - x \leq 0$ | 27. $y + x - 2 < 0$
$x - y + 1 > 0$ | 28. $x^2 + y^2 \leq 16$
$(x - 2)^2 + y^2 \geq 4$ |
| 29. $y \geq 0$
$y \leq \sqrt{x - 1}$
$y > x - 3$ | 30. $x \leq 0$
$y \geq 0$
$x + y^2 < 1$ | 31. $x^2 + y^2 > 4$
$x^2 + y^2 < 16$ | 32. $x^2 + y^2 < 9$
$x^2 - y^2 > 1$ |

Resolver:

33. **Geometría.** ¿Cuáles son las dimensiones de un jardín rectangular con perímetro de 20 yd y área de 24 yd².
34. **Ingeniería.** Una superficie rectangular de calefacción solar debe medir a lo largo ocho pulgadas más que a lo ancho. Si el área de la superficie debe ser de 180 in², ¿cuáles son las dimensiones de la superficie?
35. **Economía.** La ecuación de la demanda semanal para un cierto producto es $xy = 100$, donde x es el número de personas dispuestas a pagar y dólares por el producto. La ecuación de la oferta para el producto está dada por $x^2 - xy = 44$. El punto de equilibrio en el mercado ocurre en un punto donde la curva de la oferta interseca a la curva de la demanda. ¿Cuál es el punto de equilibrio en el mercado para este producto?
36. La suma de los cuadrados de los dígitos de un número positivo de dos cifras es 100, y el dígito de las decenas es el dígito de las unidades menos 2. ¿Cuál es este número?

37. Encontrar los valores máximo y mínimo de $P = 2x - 5y$ sujeta a las restricciones graficadas en la región factible mostrada.



38. Encontrar los valores máximo u mínimo de $P = 10x - 5y$ sujeta a las restricciones indicadas.

$$6 \geq x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$x + 3y \leq 12$$

39. **Administración.** Una empresa manufacturera de artículos deportivos obtiene una utilidad de 15 dólares por su raqueta de tenis modelo "Pro" y 10 dólares por su raqueta modelo "As". Para satisfacer la demanda de los mayoristas, la producción diaria del modelo Pro debe estar entre 10 y 50, inclusive, mientras que el modelo As debe estar entre 20 y 40, inclusive. Para mantener el control de calidad, el número total de raquetas fabricadas por día no debe exceder a 80. ¿Cuántas raquetas de cada tipo deberían manufacturarse por día para maximizar las utilidades?

Los ejercicios siguientes ayudan a preparar el material presentado en la próxima sección.

40. ¿Cuál es el grado del polinomio $P(x) = (x - 2)(x + 3)^2(x^2 - 5)$?
41. Si $2 + 3i$ es un cero del polinomio $P(x)$, con coeficientes reales, ¿cuál es otro cero de $P(x)$?
42. Supóngase que $x - 2$ es un factor de $P(x) = x^3 - x^2 - x - 2$, ¿cuál es otro factor?
43. Considérese $f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2}$. Encontrar otra representación para f que conste sólo de un término.

Resolver cada sistema de ecuaciones en los ejercicios 44-45.

$$\begin{aligned} 44. \quad A + B &= 3 \\ 2A - 2B &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 45. \quad A + C &= 4 \\ B - 2C &= -4 \\ -A + B + C &= 4 \end{aligned}$$

10.10. Descomposición en fracciones parciales

En la sección 1.5 se estudió la suma de expresiones racionales como:

$$\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2} = \frac{3x-2}{x^2-4}.$$

Esta sección trata sobre el procedimiento inverso. Supóngase que se da la función racional:

$$f(x) = \frac{3x-2}{x^2-4}$$

y que se desea expresar $f(x)$ como la suma de dos fracciones más simples, llamadas **fracciones parciales**. La descomposición en fracciones parciales de f es, en realidad,

$$f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2}.$$

Las descomposiciones como ésta son importantes en cálculo y otros cursos avanzados, y por lo general en ellas debe resolverse un sistema de ecuaciones lineales.

Condiciones para el uso de fracciones parciales

La descomposición en fracciones parciales de una función racional:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

depende de dos suposiciones básicas:

1. El grado $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$.
2. El polinomio $Q(x)$ puede factorizarse como un producto de potencias de factores lineales y cuadráticos para que los factores cuadráticos no tengan ceros reales.

Ninguna de estas dos suposiciones debería parecer sin sentido. De hecho, si $f(x)$ no satisface la primera, podría dividirse $P(x)$ entre $Q(x)$ y obtenerse un residuo fraccionario que satisface este requisito. Por ejemplo,

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - 3}$$

puede escribirse como:

$$f(x) = x + \frac{5x+1}{x^2-3}.$$

En esta forma, es posible concentrarse en la parte fraccionaria de $f(x)$, la cual sí satisface la primera condición. En lo que respecta a la segunda suposición, se sabe que un polinomio de grado n tiene n ceros (reales o complejos, véase el capítulo 4) y, en consecuencia, puede factorizarse en n factores lineales. Puesto que los ceros complejos aparecen en pares conjugados, los factores lineales correspondientes a estos pares pueden multiplicarse para dar un factor cuadrático con coeficientes reales.

Tipos de descomposición

Descomposición en fracciones parciales de una función racional

Sea $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ una función racional reducida a los términos más simples, con el grado de $P(x)$ menor que el grado de $Q(x)$.

1. Si $(ax + b)^k$ es un factor de $Q(x)$, siendo k un número natural, entonces la descomposición en fracciones parciales de $f(x)$ contiene términos de la forma:

$$\frac{A_1}{(ax + b)} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax + b)^k},$$

donde A_1, A_2, \dots, A_k son números reales constantes.

2. Si $(ax^2 + bx + c)^m$ es un factor de $Q(x)$, siendo m un número natural, entonces la descomposición en fracciones parciales de $f(x)$ contiene términos de la forma:

$$\frac{B_1x + C_1}{(ax^2 + bx + c)} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{B_mx + C_m}{(ax^2 + bx + c)^m},$$

donde B_1, B_2, \dots, B_m y C_1, C_2, \dots, C_m son números reales constantes.

La descomposición de una fracción en fracciones parciales, ilustrada mejor mediante ejemplos, consiste en encontrar los factores lineales y cuadráticos del denominador, expresar la función en términos de fracciones parciales generales, determinar un sistema de ecuaciones lineales y resolver el sistema. El sistema de ecuaciones se determina haciendo uso del hecho de que si dos polinomios son iguales, los coeficientes de los términos semejantes son iguales (véase el ejercicio 56 en la sección 4.2). Empecemos por encontrar la descomposición de la función racional indicada con anterioridad.

EJEMPLO 1

Encontrar la descomposición en fracciones parciales de:

$$f(x) = \frac{3x-2}{x^2-4}.$$

Puesto que el grado del numerador es 1 y el grado del denominador es 2, se procede a factorizar el denominador.

$$f(x) = \frac{3x - 2}{(x - 2)(x + 2)}$$

Utilizando el teorema de descomposición en fracciones parciales, la descomposición debe tener dos términos $\frac{A}{x - 2}$ y $\frac{B}{x + 2}$. Así,

$$\frac{3x - 2}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2},$$

donde A y B son números reales constantes, los cuales están aún por determinarse. Para ello, se multiplica a ambos lados de esta ecuación por el MCD, $(x - 2)(x + 2)$.

$$3x - 2 = A(x + 2) + B(x - 2)$$

$$3x - 2 = Ax + 2A + Bx - 2B$$

$$3x - 2 = (A + B)x + (2A - 2B)$$

Como los polinomios en ambos lados son iguales, los coeficientes de los términos semejantes deben ser iguales. Al igualar los coeficientes de x e igualar los términos constantes, surge el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales en las dos variables A y B .

$$A + B = 3$$

$$2A - 2B = -2$$

Al resolver este sistema se obtiene $A = 1$ y $B = 2$, entonces:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x - 2}{x^2 - 4} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} \\ &= \frac{1}{x - 2} + \frac{2}{x + 2} \end{aligned}$$

Obsérvese que se ha obtenido la suma de las fracciones dadas en las notas preliminares.

Para las funciones racionales como la del ejemplo 1, en la cual el denominador contiene sólo factores lineales elevados a la primera potencia, hay una manera más rápida de encontrar A y B . Al sustituir los valores de x que anulan a los varios factores, A y B pueden determinarse sin resolver un sistema. Por ejemplo, supóngase que se tiene:

$$3x - 2 = A(x + 2) + B(x - 2).$$

$$x = -2: \quad 3(-2) - 2 = A(\quad) + B(-2 - 2)$$

$$-8 = A(\quad) + B(-4)$$

$$-8 = -4B$$

$$2 = B$$

$$x = 2: \quad 3(2) - 2 = A(2 + 2) + B(\quad)$$

$$4 = A(4) + B(\quad)$$

$$4 = 4A$$

$$1 = A$$

EJEMPLO 2

Encontrar la descomposición en fracciones parciales de:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 4x + 4}{(x - 1)^2(x + 1)}.$$

Utilizando el teorema de descomposición en fracciones parciales,

$$\frac{4x^2 - 4x + 4}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Se multiplica a ambos lados por el MCD, $(x-1)^2(x+1)$.

$$4x^2 - 4x + 4 = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2.$$

Se eliminan paréntesis y se agrupan términos semejantes.

$$4x^2 - 4x + 4 = (A+C)x^2 + (B-2C)x + (-A+B+C).$$

Se igualan los coeficientes de términos semejantes para obtener el siguiente sistema.

$$\begin{aligned} A + C &= 4 \\ B - 2C &= -4 \\ -A + B + C &= 4 \end{aligned}$$

Al resolver este sistema se tiene $A = 1$, $B = 2$ y $C = 3$. Así,

$$f(x) = \frac{4x^2 - 4x + 4}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{x+1}.$$

El ejemplo presentado a continuación ilustra la técnica a usar cuando el denominador tiene un factor lineal y un factor cuadrático.

EJEMPLO 3

Encontrar la descomposición en fracciones parciales de:

$$f(x) = \frac{-7x - 1}{(x^2 + 2)(x - 3)}.$$

La forma de la descomposición es:

$$\frac{-7x - 1}{(x^2 + 2)(x - 3)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{C}{x - 3}.$$

$$-7x - 1 = (Ax + B)(x - 3) + C(x^2 + 2)$$

$$-7x - 1 = (A + C)x^2 + (-3A + B)x + (-3B + 2C)$$

Así, se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ -3A + B &= -7 \\ -3B + 2C &= -1, \end{aligned}$$

el cual tiene soluciones $A = 2$, $B = -1$ y $C = -2$. Por consiguiente,

$$f(x) = \frac{-7x - 1}{(x^2 + 2)(x - 3)} = \frac{2x - 1}{x^2 + 2} + \frac{-2}{x - 3}.$$

EJEMPLO 4

Encontrar la descomposición en fracciones parciales de:

$$f(x) = \frac{x^5 + 5x^3 + x^2 + 5x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}.$$

Puesto que el grado del numerador excede al grado del denominador, primero se divide el numerador entre el denominador para obtener la forma siguiente.

$$f(x) = x + \frac{3x^3 + x^2 + 4x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

Enseguida, se procede a considerar sólo la fracción, la cual satisface la hipótesis del teorema de descomposición. Se factoriza primero el denominador.

$$\begin{aligned} \text{Entonces,} \quad \frac{3x^3 + x^2 + 4x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} &= \frac{3x^3 + x^2 + 4x + 1}{(x^2 + 1)^2} \\ \frac{3x^3 + x^2 + 4x + 1}{(x^2 + 1)^2} &= \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Se multiplica a ambos lados por el MCD, $(x^2 + 1)^2$, se eliminan paréntesis y se agrupan términos semejantes.

$$3x^3 + x^2 + 4x + 1 = Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + (B + D)$$

De inmediato es posible reconocer que $A = 3$ y $B = 1$. Puesto que $A + C = 4$ y $A = 3$, $C = 1$. Además, como $B + D = 1$ y $B = 1$, $D = 0$. Por consiguiente

$$f(x) = \frac{x^5 + 5x^3 + x^2 + 5x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} = x + \frac{3x + 1}{x^2 + 1} + \frac{x}{(x^2 + 1)^2}.$$

10.6. Ejercicios

En los ejercicios 1-12 úsense las constantes A , B , C y D para expresar la descomposición en fracciones parciales de cada función. Sólo deje indicadas las especificaciones.

1. $\frac{3x + 2}{(x - 1)(x + 5)}$
2. $\frac{4x^2 + 1}{(x - 2)(x + 2)(x - 5)}$
3. $\frac{6x^2 - 7}{(x + 3)^2(x + 5)}$
4. $\frac{x^2 + x + 1}{(x^2 + x + 5)(x + 4)}$
5. $\frac{x^3 - 5}{(x^2 + 2x + 10)^2}$
6. $\frac{x^2 - x + 5}{(x - 3)^2(x^2 - 2x + 7)}$
7. $\frac{x + 1}{x^3 - 2x^2 - 3x}$
8. $\frac{x^2 + x - 4}{x^3 - 3x^2 - 10x}$
9. $\frac{x - 3}{x^2(x + 2) - 2x(x + 2) - 3(x + 2)}$
10. $\frac{x + 2}{x^4 - 16}$
11. $\frac{x^2 + 5x + 5}{x^4 + 5x^2 + 5}$
12. $\frac{x^2 - 4x - 5}{x^2(x^2 - 1) - x(x^2 - 1) - 20(x^2 - 1)}$

En los ejercicios 13-24, determinar los números reales A , B , C , D y E de modo que cada función racional $f(x)$ tenga la descomposición en fracciones parciales indicada.

$$13. f(x) = \frac{5x-1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$15. f(x) = \frac{1-x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

$$17. f(x) = \frac{6x^2+1}{(x^2+1)(x-2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-2}$$

$$19. f(x) = \frac{x^3+x^2+3x+1}{(x^2+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}$$

$$20. f(x) = \frac{5x^3-15x^2+26x-2}{(x^2-3x+5)^2} = \frac{Ax+B}{x^2-3x+5} + \frac{Cx+D}{(x^2-3x+5)^2}$$

$$21. f(x) = \frac{-2x^2+15x+13}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+3}$$

$$22. f(x) = \frac{-3x^3-2x^2+2x+19}{(x+1)^2(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2}$$

$$23. f(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{E}{x-1}$$

$$14. f(x) = \frac{7x+16}{(x-2)(x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+4}$$

$$16. f(x) = \frac{4x-13}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$

$$18. f(x) = \frac{7x^2+16x+17}{(x^2+x+1)(x+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{C}{x+4}$$

[Sugerencia: Después de multiplicar por el MCD, eliminar paréntesis y combinar términos semejantes, se sustituye x por y para encontrar E primero.]

$$24. f(x) = \frac{3x^4+6x^3+3x^2-3x}{(x+2)(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}$$

En los ejercicios 25-36, encontrar la descomposición en fracciones parciales de cada función racional.

$$25. f(x) = \frac{3x-3}{x^2-9}$$

$$26. f(x) = \frac{-4x-1}{(x-2)(x+1)}$$

$$27. f(x) = \frac{6x^2+20x+19}{(x+2)^2(x+1)}$$

$$28. f(x) = \frac{4x^2-8x-8}{x^3-4x}$$

$$29. f(x) = \frac{-9x-7}{(x^2+1)(x-5)}$$

$$30. f(x) = \frac{3x^2+x+3}{(2x^2+3)(x+1)}$$

$$31. f(x) = \frac{7x^2+13x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$$

$$32. f(x) = \frac{5x^2+4x+1}{x^3-x^2+4x-4}$$

$$33. f(x) = \frac{2x^3-x^2+3x-1}{(x^2+1)^2}$$

$$34. f(x) = \frac{2x^3+7x+1}{x^4+4x^2+4}$$

$$35. f(x) = \frac{x^3-2x^2+7x-2}{x^2-2x+1}$$

$$36. f(x) = \frac{2x^3+x^2-22x+17}{x^2+x-12}$$

Resolver cada sistema en los ejercicios 37-38.

$$37. \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$38. \begin{cases} 2x^2 - 6xy + 12y^2 = 8 \\ x^2 - xy + 6y^2 = 8 \end{cases}$$

Graficar cada sistema en los ejercicios 39-40.

$$39. \begin{cases} x \leq 4 - y^2 \\ x > |y| - 2 \end{cases}$$

$$40. \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4 \\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \end{cases}$$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 10

1. Determinar si $(2, -3)$ es una solución al sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ -x + 2y = -8 \end{cases}$$

2. Resolver el siguiente sistema por sustitución:

$$\begin{aligned} 3x + y &= -1 \\ -2x - 3y &= -11 \end{aligned}$$

3. Resolver el siguiente sistema por eliminación:

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= -7 \\ -4x + 2y &= -8 \end{aligned}$$

En los ejercicios 4-7, resolver cada sistema ya sea por sustitución o por eliminación, lo que parezca más apropiado.

4. $\begin{aligned} 3x - 5y &= 2 \\ -6x + 10y &= -1 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} &= 2 \\ \frac{5}{x} - \frac{3}{y} &= 8 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 2x + 2y &= 6 \\ -3x - 3y &= -9 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 2(x + 3y) + (x + y) &= -28 \\ 3(x + 3y) - (x + y) &= -32 \end{aligned}$

8. Encontrar los valores de m de modo que el sistema:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= m \\ -4x + 6y &= 5 \end{aligned}$$

sea dependiente.

Resolver cada sistema en los ejercicios 9-11.

9. $\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 0 \\ x - 5y + 3z &= -1 \\ 3x + y + z &= 5 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} x - 2y + 4z &= 0 \\ x + 2y - 5z &= 0 \\ 2x - z &= 0 \end{aligned}$

11. $\begin{aligned} 3x + 2y &= 12 \\ -x + y - 5z &= 1 \end{aligned}$

12. La parábola con ecuación $y = ax^2 + bx + c$ pasa a través de los puntos (1, 4), (-1, 10) y (3, 14). Encontrar los valores de a , b y c .

En los ejercicios 13-20, resolver cada problema utilizando un sistema de ecuaciones.

13. Un conductor recorrió 370 millas viajando a 40 mi/h durante un periodo y luego a 50 mi/h durante otro. De haber ido a 55 mi/h durante el mismo periodo, hubiera recorrido 440 mi. ¿Cuánto tiempo manejó a cada velocidad?

14. **Geometría.** Dos ángulos son complementarios y uno es 6° menor que siete veces el otro. ¿Cuál es la medida de cada ángulo?

15. **Administración.** ¿Cuántas libras de caramelo de a 1.60 dólares por libra y cuántas de a 1.20 dólares por libra deben combinarse para obtener 80 lb de una mezcla cuyo valor sea de 1.36 dólares por libra?

16. **Química.** Un químico tiene una solución ácida al 15% y otra al 20%. ¿Cuántos galones de cada una se deben mezclar para preparar 100 galones de una solución ácida al 18%?

17. Una colección de monedas de 5¢, 10¢ y 25¢ tiene un valor de 8.00 dólares. Si el número de monedas de 10¢ es dos veces el número de monedas de 25¢, ¿de cuántas monedas de cada tipo consta la colección?

18. **Inversión.** Una persona tiene una cartera de 9 000 dólares compuesta por tres inversiones separadas. Una parte está invertida en bonos que ganan 9%, otra parte está invertida en certificados que ganan 8% y otra más está invertida en acciones. Si a las acciones les va bien, ganarán 10% y las ganancias totales tendrán un monto de 780 dólares. Si el mercado exhibe una tendencia a la baja, sus acciones perderán 3% y las ganancias totales tendrán un monto de 520 dólares. ¿A cuánto asciende la inversión en cada categoría?

19. **Geometría.** El ángulo más pequeño de un triángulo mide la tercera parte del ángulo de tamaño medio, y el ángulo más grande es 5° mayor que el ángulo de tamaño medio. ¿Cuál es la medida de cada ángulo?

20. La función polinómica $P(x) = x^3 + ax + b$ tiene la propiedad de que $P(1) = 4$ y $P(-1) = 12$. Encontrar los valores de a y b .

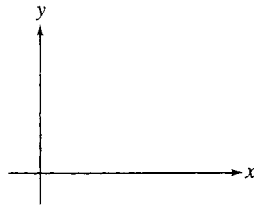


En los ejercicios 21-22, dibujar la gráfica de cada sistema de desigualdades lineales.

$$21. \begin{cases} 2x + y \leq 2 \\ y - 1 > 0 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 2y < 6 \end{cases}$$

23. Encontrar los valores máximo y mínimo de la función objetivo $P = 18x + 3y$ sujeta a las restricciones graficadas en la región posible mostrada.



24. Encontrar los valores máximo y mínimo de la función objetivo $P = 6x - 10y$ sujeta a las restricciones siguientes:

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ y \geq 2 \\ y - 3x \leq 0 \\ 2x + 3y \leq 22 \end{cases}$$

25. **Administración.** El propietario de un restaurante popular de comidas rápidas tiene, a lo más, 90 lb de carne de res molida que pueden utilizarse para preparar hamburguesas y tacos a diario. Cada hamburguesa contiene $\frac{1}{3}$ lb de carne, y cada taco contiene $\frac{1}{6}$ lb. Supóngase que la utilidad por las hamburguesas es 42¢ y por los tacos es 20¢. Los costos de mano de obra para hacer una hamburguesa ascienden a 18¢ y para preparar un taco son de 6¢. Si el propietario puede pagar a lo más 36 dólares para los costos de mano de obra por producir estas dos comidas rápidas, ¿qué cantidad de hamburguesas y qué cantidad de tacos deberían prepararse para maximizar las utilidades? ¿Cuál es la utilidad máxima?

Resolver cada sistema en los ejercicios 26-29.

$$26. \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ xy = 8 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 3x^2 + xy - 6y^2 = 8 \\ x^2 + 2xy - 4y^2 = 4 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 3^x + y = 10 \\ 3^x - y = 8 \end{cases}$$

Graficar cada sistema en los ejercicios 30-31.

$$30. \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ y > |x| \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} y - 3^x \geq 0 \\ 3x - 4y \geq -9 \end{cases}$$

En los ejercicios 32-33, determinar los números reales A , B , C y D , de modo que cada función racional $f(x)$ tenga la descomposición en fracciones parciales indicada.

$$32. f(x) = \frac{-2x - 5}{(x + 4)^2} = \frac{A}{x + 4} + \frac{B}{(x + 4)^2}$$

$$33. f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 10x + 7}{(x^2 + x + 7)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + x + 7} + \frac{Cx + D}{(x^2 + x + 7)^2}$$

En los ejercicios 34-35, encontrar la descomposición en fracciones parciales de cada función racional.

$$34. f(x) = \frac{8x^2 - 4x + 16}{(x^2 + 3)(x - 1)}$$

$$35. f(x) = \frac{2x^3 - 16x^2 + 28x - 12}{x^2 - 8x + 12}$$



Las matrices y las operaciones de matrices proporcionan métodos efectivos para resolver diversos problemas aplicados. Con el uso generalizado de computadoras, las matrices han acrecentado su importancia como instrumentos útiles para organizar y manipular grandes conjuntos de datos. En este capítulo se presenta una introducción breve a la teoría de las matrices, un tema extenso al cual se dedican con frecuencia cursos enteros. Los ejemplos siguientes representan dos de los tipos de problemas de aplicación que pueden resolverse utilizando métodos de matrices.

Política

Un candidato a un cargo político en Arizona contrató a una firma de relaciones públicas para promover su campaña en tres centros de población del estado: Tucson, Phoenix y Flagstaff. Los contactos con los partidarios potenciales se van a hacer por teléfono, correo y contacto personal directo. El costo de cada uno de éstos se estima en 0.50 de dólar por teléfono, 0.30 de dólar por correo y 0.75 de dólar por contacto personal. La siguiente tabla resume el número deseado de contactos en cada categoría en cada área. Emplear matrices para determinar el costo total de la promoción.

	Teléfono	Correo	Personal
Tucson	5 000	10 000	1 000
Phoenix	8 000	20 000	6 000
Flagstaff	3 000	5 000	700

Deportes

El Comité Olímpico Deportivo programa cuatro juegos de baloncesto de exhibición entre la selección olímpica de los Estados Unidos y un equipo integrado por jugadores de la Asociación Nacional de Baloncesto. Los boletos se van a vender entre 5.00 dólares y 8.00 dólares con lo que se obtiene una recaudación total especificada. Suponiendo que se venderán todas las localidades en cada estadio, utilizar la información proporcionada en la tabla siguiente para determinar el precio de venta para cada juego de cada cierto número de localidades.

	Juego 1	Juego 2	Juego 3	Juego 4
Total de localidades en el estadio	9 000	12 000	8 400	21 000
Recaudación obtenida	\$63 000	\$81 000	\$66 000	\$114 000

Estas aplicaciones se estudian en el ejemplo 4 de la sección 11.2 y en el ejemplo 3 de la sección 11.4. Aunque ambos problemas pueden resolverse sin matrices, problemas más complejos de una naturaleza semejante casi demandan el uso de ellas.

Empezaremos con el estudio de la teoría de las matrices con definiciones y operaciones básicas. Las matrices se emplean luego para resolver sistemas de ecuaciones que utilizan un método de eliminación y el método de la inversa. La presentación concluye con un análisis de los determinantes, la regla de Cramer y propiedades de los determinantes, cada uno de estos temas tiene numerosas aplicaciones en matemáticas.

Terminología de matrices

Los arreglos rectangulares de números, llamados **matrices**, surgen de numerosas maneras. Por ejemplo, una tabla de datos, como la que se muestra enseguida y que presenta las distribuciones de calificaciones en dos cursos diferentes de matemáticas, es en efecto una matriz.

	A	B	C	D	F
Matemáticas 110	8	10	21	4	5
Matemáticas 130	6	12	18	9	3

Las letras mayúsculas denotan matrices y los números en la matriz, llamados **elementos** de la matriz, se encierran entre paréntesis rectangulares. La matriz G , presentada abajo, abrevia las distribuciones de las calificaciones indicadas en la tabla.

$$G = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 21 & 4 & 5 \\ 6 & 12 & 18 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

El **orden** o la **dimensión** de una matriz con m **filas** (números alineados en forma horizontal) y n **columnas** (números alineados en forma vertical) es $m \times n$, y se lee m por n . El orden de la matriz G es 2×5 . Considérense las siguientes matrices.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad D = [2 \quad 7 \quad -5 \quad 1]$$

El orden de E es 2×3 , el de B 3×1 , el de C 2×2 , y el de D es 1×4 . Una matriz de orden $n \times n$, tal como C , se denomina **matriz cuadrada de orden n** . Una matriz de orden $m \times 1$, tal como B , se denomina **vector columna de orden m** . Una matriz de orden $1 \times n$, tal como D , se denomina **vector fila de orden n** .

Una matriz general $m \times n$ se escribe con frecuencia en la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

en la que la notación de doble subíndice se usa para identificar a la fila y a la columna que contiene al elemento particular. El elemento a_{ij} se encuentra en la i -ésima fila y la j -ésima columna. Con frecuencia esta notación se abrevia como

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}.$$

Igualdad de matrices

Dos matrices A y B son **iguales**, y se escribe $A = B$, si y sólo si tienen el mismo orden y los elementos correspondientes son iguales.

Haciendo uso de la notación para una matriz general, si $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ y $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, $A = B$ si y sólo si $a_{ij} = b_{ij}$ para cada $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$.

EJEMPLO 1

Considérense las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3^2 \\ (-1)^3 & \sqrt[3]{27} & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \sqrt{4} & 0 & 9 \\ -1 & 3 & 2^0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} u & v \\ w & x \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad F = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4].$$

- Ya que tanto A como B son de orden 2×3 y los elementos correspondientes son iguales, $A = B$.
- Si $C = D$, entonces u debe ser 1, v debe ser 2, w debe ser 3 y x debe ser 4.
- Aunque C , la matriz cuadrada de orden 2, E , el vector columna de orden 4, y el vector fila de orden 4 F , contienen todos los mismos elementos, no son iguales ya que tienen órdenes diferentes.

Operaciones de matrices

La suma de dos matrices del mismo orden se obtiene al sumar los elementos correspondientes.

Suma de matrices

Sean $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ y $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ dos matrices. La suma de A y B es la matriz $m \times n$ determinada por

La suma de matrices con diferentes órdenes no está definida.

EJEMPLO 2

Considérense las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 3 & 7 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} -5 & 7 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{a) } A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+(-3) \\ -3+2 & 4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } B + A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+1 & -3+2 \\ 2+(-3) & 4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$$

c) $A + D$ no está definida ya que el orden de A es 2×2 , el cual no es el mismo que el orden de D , 2×3 .

$$\begin{aligned} \text{d) } (A + B) + C &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } A + (B + C) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } D + E &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 3 & 7 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 7 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0+(-5) & -2+7 & 5+2 \\ 3+4 & 7+(-1) & (-1)+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 7 \\ 7 & 6 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Obsérvese en **a)** y **b)** del ejemplo 2 que $A + B = B + A$, y en **d)** y **e)** del ejemplo 2 que $(A + B) + C = A + (B + C)$. En general, esto es cierto; es decir, si A , B y C son matrices arbitrarias del mismo orden, entonces

y

Estas propiedades de suma de matrices, las **leyes conmutativa y asociativa de la suma**, pueden demostrarse con facilidad utilizando las propiedades correspondientes para la suma de números reales.

La matriz nula

Si $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ con la propiedad de que $a_{ij} = 0$ para cada i y j , A se denomina **matriz nula** y se denota por 0 . Hay una matriz nula de cada orden.

Por ejemplo, la matriz nula 2×3 es

$$\text{y si} \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{entonces} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 \end{bmatrix},$$

$$A + 0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 \end{bmatrix} = A.$$

En general, esto es cierto, haciendo a $\mathbf{0}$ el **idéntico aditivo** para la suma de matrices. Es decir, si A es una matriz arbitraria $m \times n$ y $\mathbf{0}$ es la matriz nula $m \times n$ entonces

La negativa de una matriz

Si $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ es una matriz, la matriz denotada y dada por

$$-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$$

es la **negativa** o **inversa aditiva** de A .

La negativa o inversa aditiva de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

es

$$-A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -5 & -7 & 4 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} A + (-A) &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -5 & -7 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 + (-2) & (-1) + 1 & 3 + (-3) \\ 5 + (-5) & 7 + (-7) & (-4) + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

En general, si A es una matriz arbitraria $m \times n$ y $\mathbf{0}$ es la matriz nula $m \times n$ entonces

Resta de matrices

Sean $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ y $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ dos matrices y $-B = [-b_{ij}]_{m \times n}$ la negativa de B . La **diferencia** de A y B es la matriz de $m \times n$ dada por

$$A - B = A + (-B) = [a_{ij} + (-b_{ij})]_{m \times n} = [a_{ij} - b_{ij}]_{m \times n}.$$

La resta de dos matrices con diferentes órdenes no está definida.

En efecto, si las matrices A y B son del mismo orden, $A - B$ se encuentra al restar los elementos de B de los elementos correspondientes de A . Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3-2 & -2-1 & 7-3 \\ 4-0 & 0-5 & -1-(-4) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Una matriz puede multiplicarse por un número real; la operación consiste en multiplicar cada elemento de la matriz por el número, y se denomina **multiplicación por un escalar**.

Multiplicación por un escalar

Sea $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ una matriz y k un número real. El **múltiplo escalar de A por k** es la matriz

$$kA = [ka_{ij}]_{m \times n}.$$

EJEMPLO 3

Considérense las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{a) } 3A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2) & 3(5) & (-1) \\ (0) & 3(3) & (7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 & -3 \\ 0 & 9 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } B - A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 5 \\ 3 & -6 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 2A - 3B &= 2 \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 10 & -2 \\ 0 & 6 & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 6 & 12 \\ 9 & -9 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 4 & -14 \\ -9 & 15 & 14 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Las matrices pueden usarse de muchas maneras para simplificar y manipular conjuntos de números en bases de datos, a menudo con la ayuda de computadoras. Recuérdese que los ejemplos expuestos son sistemas simplificados que incluyen pequeñas bases de datos, pero las mismas técnicas también se aplican a conjuntos de datos más grandes y realistas.

EJEMPLO 4

Administración

La agencia estatal de seguros mutuos tiene tres agentes comerciales Suárez, Valencia y Luna. Los seguros que están a la venta son de cuatro tipos: de vida, de salud, de automóvil y del hogar. El importe bruto de las ventas en dólares para los meses de mayo y junio se indica en las siguientes matrices.

$$M = \begin{array}{ccccc} & \text{Vida} & \text{Salud} & \text{Automóvil} & \text{Hogar} \\ \begin{bmatrix} 20\,000 & 10\,000 & 5\,000 & 40\,000 \\ 30\,000 & 5\,000 & 17\,000 & 65\,000 \\ & 27\,000 & 8\,000 & 32\,000 \end{bmatrix} & \text{Suárez} & \text{Valencia} & \text{Luna} \end{array}$$

$$J = \begin{bmatrix} \text{Vida} & \text{Salud} & \text{Automóvil} & \text{Hogar} \\ 70\,000 & 0 & 14\,000 & 90\,000 \\ 12\,000 & & 8\,000 & 74\,000 \\ 120\,000 & 18\,000 & 11\,000 & 45\,000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Suárez} \\ \text{Valencia} \\ \text{Luna} \end{matrix}$$

Por ejemplo, Luna no llenó ninguna póliza de seguro de vida en mayo, y Valencia vendió 20 000 dólares en pólizas de seguro de salud en junio.

- a) La matriz que se obtiene de las ventas totales durante los dos meses para cada agente comercial en cada categoría es

$$M + J = \begin{bmatrix} 90\,000 & 10\,000 & 19\,000 & 130\,000 \\ 42\,000 & 25\,000 & 25\,000 & 139\,000 \\ 120\,000 & 45\,000 & 19\,000 & 77\,000 \end{bmatrix}.$$

Por ejemplo, Suárez tuvo ventas totales de seguros del hogar durante mayo y junio de 130 000 dólares.

- b) La matriz que se obtiene del aumento (o la disminución) en ventas en cada categoría para cada agente comercial de mayo a junio es

$$J - M = \begin{bmatrix} 50\,000 & -10\,000 & 9\,000 & 50\,000 \\ -18\,000 & & -9\,000 & 9\,000 \\ 120\,000 & & 3\,000 & 13\,000 \end{bmatrix}.$$

Por ejemplo, Valencia aumentó sus ventas de seguros de salud, el cual ascendió a 15 000 dólares, mientras que Luna tuvo un descenso de 9 000 dólares en esta categoría.

- c) Supóngase que cada agente comercial recibe una tasa de comisión de 8%. La matriz que determina la comisión ganada por cada agente en cada categoría durante este periodo de dos meses es $0.08(M + J)$.

$$\begin{aligned} 0.08(M + J) &= 0.08 \begin{bmatrix} 90\,000 & 10\,000 & 19\,000 & 130\,000 \\ 42\,000 & 25\,000 & 25\,000 & 139\,000 \\ 120\,000 & 45\,000 & 19\,000 & 77\,000 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (0.08)(90\,000) & (0.08)(10\,000) & (0.08)(19\,000) & (0.08)(130\,000) \\ (0.08)(42\,000) & (0.08)(25\,000) & (0.08)(25\,000) & (0.08)(139\,000) \\ (0.08)(120\,000) & (0.08)(45\,000) & (0.08)(19\,000) & (0.08)(77\,000) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7\,200 & 800 & 1\,520 & 10\,400 \\ 3\,360 & 2\,000 & 2\,000 & 11\,120 \\ 9\,600 & 3\,600 & 1\,520 & 6\,160 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por ejemplo, Suárez ganó 10 400 dólares por comisión al vender seguros del hogar durante mayo y junio. □

Nota. Si la agencia de seguros del ejemplo 4 empleara a 100 agentes comerciales y aumentara considerablemente el número de tipos de seguro, entonces puede empezar a reconocerse y apreciarse el poder de las matrices, en especial cuando se utiliza una computadora para realizar las operaciones de matrices.

11.1. Ejercicios

Los ejercicios 1-32 hacen referencia a las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 9 & -4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 5^0 & \sqrt{4} \\ |-3| & 2^2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad F = [3 \quad 2 \quad 0 \quad -1] \quad G = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

1. ¿Cuál es el orden de la matriz A ?
2. ¿Cuál es el orden de la matriz D ?
3. ¿Cuál es el orden de la matriz F ?
4. ¿Cuál es el orden de la matriz G ?
5. ¿Cuáles de estas matrices son matrices cuadradas?
6. ¿Cuáles de estas matrices tienen orden 2×3 ?
7. ¿Cuáles de estas matrices son vectores columna?
8. ¿Cuáles de estas matrices son vectores fila?
9. ¿Son iguales A y C ?
10. ¿Son iguales F y G ?
11. ¿Qué elemento está en la primera fila y segunda columna de D ?
12. ¿Qué elemento está en la segunda fila y segunda columna de A ?
13. Dar la matriz nula con el mismo orden que A .
14. Dar la matriz nula con el mismo orden que E .
15. Identificar el elemento a_{21} en la matriz A .
16. Identificar el elemento e_{23} en la matriz E .
17. Dar la matriz $-A$.
18. Dar la matriz $-D$.
19. Encontrar $A + B$.
20. Encontrar $D + E$.
21. Encontrar $A + D$.
22. Encontrar $B + E$.
23. Encontrar $D - E$.
24. Encontrar $A - B$.
25. Encontrar $B - E$.
26. Encontrar $A - D$.
27. Encontrar $-2A$.
28. Encontrar $-4E$.
29. Encontrar $a_{12}B$.
30. Encontrar $b_{12}A$.
31. Encontrar $2A - 3B$.
32. Encontrar $3E - 2D$.

En los ejercicios 33-36 encontrar los valores de a , b , c y d .

$$33. \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$34. \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$35. \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b & -2 \\ 3 & 2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$36. \begin{bmatrix} 3 & -b \\ 2 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3a \\ -2 & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

37. **Deportes.** Las matrices F y S dan los puntos anotados, el número de rebotes y los minutos jugados para los cinco jugadores que inician en un torneo de baloncesto a dos juegos.

	Puntos	Rebotes	Minutos	
$F =$	21	5	35	Huesca
	18	9	32	Sánchez
	10	7	28	Molina
	8	3	30	Pardo
	15	12	32	Duarte
$S =$	19	4	33	Huesca
	26	8	30	Sánchez
	8	10	26	Molina
	8	5	32	Pardo
	17	12	28	Duarte

- Encontrar la matriz que proporciona los totales para el torneo en cada categoría.
- Encontrar la matriz $\frac{1}{2}(F + S)$ y discutir lo que representa.

38. Administración. Video Rentals Inc. tiene dos almacenes en Barstow, California. Los números totales de cassettes VHS, cassettes Beta y videograboras alquilados durante los meses de enero y febrero se proporcionan en las matrices J y F.

	VHS	Beta	Video-grabadoras	
$J =$	$\begin{bmatrix} 2100 \\ 3500 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 400 \\ 700 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 55 \\ 60 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \text{Almacén 1} \\ \text{Almacén 2} \end{bmatrix}$
$F =$	$\begin{bmatrix} 3200 \\ 4300 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 750 \\ 900 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 84 \\ 105 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \text{Almacén 1} \\ \text{Almacén 2} \end{bmatrix}$

- Encontrar la matriz que da los totales de los dos meses en cada categoría.
- Encontrar la matriz $\frac{1}{2}(J + F)$ y discutir lo que representa.
- Encontrar la matriz que proporciona el aumento en cassettes y videograbadoras alquilados de enero a febrero.

Resolver cada sistema de ecuaciones en los ejercicios 39-44.

39. $3x + 5y = 9$
 $2x - 7y = -25$

$$\begin{array}{rcl} 41. & 4x - y & = -3 \\ & -2y - 5z & = -1 \\ & 3x & + 2z = -2 \end{array}$$

43. $x^2 + y^2 = 169$
 $x + y = 17$

45. Grafíquese el sistema.

$$\begin{aligned} |y| - x &\leq 0 \\ x^2 + y^2 &< 16 \end{aligned}$$

40. $2x + 6y = 12$
 $-x - 3y = 6$

42.
$$\begin{aligned}x + 5y + 2z &= -37 \\3x + 2y - z &= -5 \\-3x + 3y + z &= 11\end{aligned}$$

44. $x^2 + y^2 = 25$
 $x^2 - y^2 = 25$

En esta sección se expone la definición de dos clases de multiplicación que probablemente parezcan un poco extrañas al principio; sin embargo, como se observa pronto, estas operaciones tienen numerosas aplicaciones. A diferencia de la suma y la resta, el producto de dos matrices no se encuentra multiplicando los elementos correspondientes ni se condiciona a que las dos matrices tengan que ser del mismo orden.

Productos escalares

Empecemos por definir el producto escalar o producto punto de un vector fila de orden n por un vector columna de orden n . El resultado es un número real, o escalar, y no una matriz.

Producto escalar de dos vectores

Sea $A = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n]$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

El producto escalar de A y B está dado por

$$A \cdot B = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots + a_nb_n.$$

El punto escrito entre dos vectores (matrices) en la definición de arriba es muy importante. Si se omite, el producto se interpreta de manera diferente y da por resultado una matriz (no un número real). Este producto se define más adelante.

EJEMPLO 1

Scan $A = [3 \ 2 \ 1 \ 5]$ y $B = \begin{bmatrix} 300 \\ 450 \\ 500 \\ 650 \end{bmatrix}$. encontrar $A \cdot B$.

$$\begin{aligned} A \cdot B &= [3 \ 2 \ 1 \ 5] \cdot \begin{bmatrix} 300 \\ 450 \\ 500 \\ 650 \end{bmatrix} = 3(300) + 2(450) + 1(500) + 5(650) \\ &= 900 + 900 + 500 + 3\,250 = 5\,550 \end{aligned}$$

Este método de multiplicación de "fila por columna" puede parecer al principio algo artificial, pero tiene numerosas aplicaciones. Por ejemplo, supóngase que un negociante de aparatos electrónicos vende 3 estéreos a 300 dólares cada uno, 2 estéreos a 450 dólares cada uno, 1 estéreo a 500 dólares y 5 estéreos a 650 dólares cada uno. El vector A en el ejemplo 1 representa el número de estéreos vendidos a cada precio y el vector B representa el precio de cada tipo de estéreo. El producto escalar $A \cdot B$ da la renta total producida al vender estos estéreos, 5 550 dólares.

Multiplicación de matrices

Recuérdese que el producto escalar de un vector fila por un vector columna es un número real, no una matriz. Ahora, la multiplicación de matrices se define de tal manera que el producto sea una matriz. Los productos escalares se utilizan en esta definición.

Multiplicación de matrices

Sean $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ y $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ dos matrices con la propiedad de que el número de columnas de A es el mismo que el número de filas de B . El producto de A por B es la matriz $m \times p$

$$AB = [c_{ij}]_{m \times p},$$

donde c_{ij} es el producto escalar de la fila i -ésima de A y la columna j -ésima de B .

El diagrama de abajo ilustra las restricciones impuestas por la definición de multiplicación de matrices.

$$A_{m \times n} \quad B_{n \times p} = AB_{m \times p}$$

EJEMPLO 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}. \text{ Encontrar } AB.$$

Ya que es $A_{2 \times 3}$ $B_{3 \times 2}$, el producto AB está definido y tiene orden 2×2 .

Así,

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} [1 \quad -2 \quad 3] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} & [1 \quad -2 \quad 3] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\ [4 \quad 0 \quad 5] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} & [4 \quad 0 \quad 5] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1)(2) + (-2)(-3) + (3)(0) & (1)(-1) + (-2)(1) + (3)(4) \\ (4)(2) + (0)(-3) + (5)(0) & (4)(-1) + (0)(1) + (5)(4) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3

Encontrar cada producto.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} () (3) + () (-1) & () (0) + () (5) & () (4) + () (0) \\ () (3) + () (-1) & () (0) + () (5) & () (4) + () (0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -10 & 4 \\ 3 & -15 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad \text{Este producto no está definido.}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}_{1 \times 3} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} & & & \end{bmatrix} \quad \downarrow \quad 6 + 0 - 9 \quad -4 + 0 + 15]$$

$$= [-4 \quad -3 \quad 11]$$

$$\text{d) } \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 - 1 & 0 + 2 \\ 12 + 5 & 0 - 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 17 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 + 0 & -4 + 0 \\ 2 - 6 & -1 - 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & -11 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la multiplicación de matrices

La multiplicación de matrices no es una operación conmutativa. Es decir, si A y B son matrices, entonces AB no necesariamente es igual a BA . Esto es obvio si A es de orden 2×2 y B es de orden 2×3 , entonces AB tiene orden 2×2 pero BA no está definida aún (véanse a) y b) del ejemplo 3). Sin embargo, aun para las matrices cuadradas, cuando los productos de cualquier orden están definidos cambiar el orden de la multiplicación puede dar por resultado productos diferentes. En d) y e) del ejemplo 3, se observa que

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, si A es de orden $m \times n$, B es de orden $n \times p$, y C es de orden $p \times q$, puede demostrarse que

de modo que la multiplicación de matrices satisface la **ley asociativa de la multiplicación**. Además, para matrices de orden apropiado, las **leyes distributivas** son ciertas.

y

Los ejemplos de estas propiedades se consideran en los ejercicios al final de esta sección.

Considérense los siguientes dos productos.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 0-1 \\ 3+0 & 0+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & -1+0 \\ 0+3 & 0+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que en ambos casos el producto es igual a

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

La matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es la versión 2×2 de un grupo importante de matrices.

Matriz identidad

La matriz I_n de orden $n \times n$ dada por

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

con unos en la diagonal **principal** (desde la esquina superior izquierda hasta la inferior derecha) y ceros en los otros lugares se denomina **matriz identidad de orden n** .

Las matrices identidad en la multiplicación de matrices desempeñan una función semejante a la del 1 en la multiplicación de números. Si $A_{n \times n}$ es una matriz arbitraria, entonces

Como se ha visto, las operaciones de matrices satisfacen muchas de las propiedades parecidas a las correspondientes de números reales. La única excepción hasta ahora es la ley conmutativa de la multiplicación. Otra propiedad familiar de los números reales, la regla del producto nulo, no se cumple en la multiplicación de matrices. Considérense las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Entonces:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Sin embargo, ni A ni B es la matriz nula. Obsérvese que la multiplicación de matrices no satisface la regla del producto nulo ya que $AB = 0$ aunque ni $A = 0$ ni $B = 0$.

Traspuesta de una matriz

La traspuesta de una matriz A $m \times n$ denotada por A^T , es la matriz $n \times m$ formada al intercambiar las filas con las columnas de A . Es decir, la fila 1 de A se vuelve la columna 1 de A^T , la fila 2 de A se vuelve la columna 2 de A^T , y así sucesivamente.

Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, entonces $A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, y si $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$, entonces $B^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 8 \end{bmatrix}$. La traspuesta de una matriz se utilizará en secciones posteriores.

Esta sección concluye con una aplicación de la multiplicación de matrices, la cual corresponde al primer problema de aplicación presentado en la introducción de este capítulo.

EJEMPLO 4

Política

Un candidato a un cargo político en Arizona contrató a una firma de relaciones públicas para promover su campaña en tres centros de población del estado: Tucson, Phoenix y Flagstaff. Los contactos con los partidarios potenciales se van a hacer por teléfono, correo y contacto personal directo. El costo de cada uno de estos se estima que es de 0.50 de dólar por teléfono, 0.30 de dólar por correo y 0.75 de dólar por contacto personal. La siguiente tabla resume el número deseado de contactos en cada categoría en cada área. Emplear matrices para determinar el costo total de la promoción.

	Teléfono	Correo	Personal
Tucson	5 000	10 000	1 000
Phoenix	8 000	20 000	6 000
Flagstaff	3 000	5 000	700

La matriz

$$C = \begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.30 \\ 0.75 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Teléfono} \\ \text{Correo} \\ \text{Contacto personal} \end{matrix}$$

proporciona el costo estimado para cada tipo de contacto.

La matriz

$$N = \begin{array}{ccccc} & \text{Teléfono} & \text{Correo} & \text{Personal} & \\ \begin{bmatrix} 5\,000 & 10\,000 & 1\,000 \\ 8\,000 & 20\,000 & 6\,000 \\ 3\,000 & 5\,000 & 700 \end{bmatrix} & \text{Tucson} & \text{Phoenix} & \text{Flagstaff} & \end{array}$$

proporciona el número de contactos deseados en cada área. El producto NC da el vector columna con los costos totales en cada área.

$$NC = \begin{bmatrix} 5\,000 & 10\,000 & 1\,000 \\ 8\,000 & 20\,000 & 6\,000 \\ 3\,000 & 5\,000 & 700 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.30 \\ 0.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\,250 \\ 14\,500 \\ 3\,525 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Costo total en Tucson} \\ \text{Costo total en Phoenix} \\ \text{Costo total en Flagstaff} \end{array}$$

El costo total en las tres áreas puede determinarse al encontrar el producto escalar del vector fila $T = [1 \quad 1 \quad 1]$ con el vector columna BC .

$$T \cdot (BC) = [1 \quad 1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 6\,250 \\ 14\,500 \\ 3\,525 \end{bmatrix} = 24\,275$$

Así, el costo total para la campaña es de 24 275 dólares

11.2. Ejercicios

Encontrar los productos escalares en los ejercicios 1-4.

1. $[1 \quad -2] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

2. $[-1 \quad 6] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \end{bmatrix}$

3. $[2 \quad 3 \quad 5] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

4. $[0 \quad 2 \quad 1 \quad -3] \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 5-8 determinar m y n de modo que cada producto esté definido.

5. $A_{m \times n} B_{3 \times 2} = C_{4 \times 2}$

6. $A_{2 \times 3} B_{m \times n} = C_{2 \times 5}$

7. $A_{4 \times m} B_{2 \times n} = C_{4 \times 3}$

8. $A_{m \times 4} B_{n \times 2} = C_{5 \times 2}$

Los ejercicios 9-28 hacen referencia a las siguientes matrices.

$$\begin{array}{llll} A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} & C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ E = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} & F = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} & G = [3 \quad -2] & H = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

9. Encontrar AB . 10. Encontrar AC . 11. Encontrar CD . 12. Encontrar DE .
 13. Encontrar FD . 14. Encontrar GE . 15. Encontrar DH . 16. Encontrar A^T .
 17. Encontrar B^T . 18. Encontrar A^2 . 19. Encontrar B^2 . 20. Encontrar D^T .
 21. Encontrar F^T . 22. Encontrar AA^T . 23. Encontrar $(A^T)^TE$. 24. Encontrar $A(BC)$.
 25. Encontrar $A^T + B^T$. 26. Encontrar $B^T + E^T$. 27. Encontrar $(A + B)^T$. 28. Encontrar $(B + E)^T$.

En los ejercicios 29-36 usar las siguientes matrices para comprobar cada proporción.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

29. $AB \neq BA$ 30. $A(BC) = (AB)C$ 31. $AI = A$ 32. $A + (-A) = 0$
 33. $A + 0 = A$ 34. $A(B + C) = AB + AC$ 35. $(B + C)A = BA + CA$ 36. $A(B + C) \neq (B + C)A$
 37. **Deportes.** Las matrices F y S dan los puntos anotados, el número de rebotes y los minutos jugados para los cinco jugadores que inician en un torneo de baloncesto a dos juegos.

$$F = \begin{bmatrix} 21 & 5 & 35 \\ 18 & 9 & 32 \\ 10 & 7 & 28 \\ 8 & 3 & 30 \\ 15 & 12 & 32 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Huesca} \\ \text{Sánchez} \\ \text{Molina} \\ \text{Pardo} \\ \text{Duarte} \end{matrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 19 & 4 & 33 \\ 26 & 8 & 30 \\ 8 & 10 & 26 \\ 8 & 5 & 32 \\ 17 & 12 & 28 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Huesca} \\ \text{Sánchez} \\ \text{Molina} \\ \text{Pardo} \\ \text{Duarte} \end{matrix}$$

- a) ¿Cuál es $[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]F$? Analícese lo que representa.
 b) ¿Cuál es $[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1](F + S)$? Analícese lo que representa.
 c) ¿Cuál es $\frac{1}{2}[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1](F + S)$? Analícese lo que representa.

38. **Administración.** Video Rentals Inc. tiene dos almacenes en Barstow, California. Los números totales de cassettes VHS, cassettes Beta y videograbadoras alquilados durante los meses de enero y febrero se proporcionan en las matrices J y F .

$$J = \begin{bmatrix} 2100 & 400 & 55 \\ 3500 & 700 & 60 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Almacén 1} \\ \text{Almacén 2} \end{matrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 3200 & 750 & 84 \\ 4300 & 900 & 105 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Almacén 1} \\ \text{Almacén 2} \end{matrix}$$

- a) Encontrar $[1 \ 1]J$ y analizar lo que representa.
 b) Encontrar $[1 \ 1](J + F)$ y analizar lo que representa.
 c) Encontrar $([1 \ 1](J + F)) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y analizar lo que representa.

39. **Administración.** Supóngase que los precios de alquiler en ambos almacenes de Video Rentals Inc. en el ejercicio 38 son 3.00 dólares para VHS, 4.00 dólares para Beta y 10.00 dólares para una videograbadora. Utilícese la matriz

$$C = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

40. **Ciencia veterinaria.** Un veterinario combina dos marcas de alimento para perros en tres mezclas diferentes. Las cantidades de proteína y grasa, medidas en gramos por onza, en cada una de las dos marcas se dan en la matriz N . Las cantidades de cada marca, medidas en onzas, que usa en cada mezcla se proporcionan en la matriz M .

$$N = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \text{Marca A} & \text{Marca B} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{Proteína} \\ \text{Grasa} \end{matrix} \end{array}$$

$$M = \begin{array}{ccc} \begin{matrix} \text{Mezcla 1} & \text{Mezcla 2} & \text{Mezcla 3} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 12 & 18 & 6 \\ 12 & 6 & 18 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{Marca A} \\ \text{Marca B} \end{matrix} \end{array}$$

- a) Dar la matriz $NM = [c_{ij}]_{2 \times 3}$ y visualizar lo que representa.
 b) ¿Qué representa el elemento c_{12} ?
 c) ¿Qué representa el elemento c_{21} ?
 para responder lo siguiente. a) Encontrar JC e interpretar el resultado. b) Encontrar FC e interpretar el resultado.
 c) Encontrar $(J + F)C$ e interpretar el resultado. d) Encontrar $[1 \ 1] \cdot ((J + F)C)$ e interpretar el resultado.
 d) Nótese que cada mezcla contiene 24 onzas de alimento para perro. Encontrar $\frac{1}{24}NM$ e interpretar el resultado.
 e) Supóngase que la marca A cuesta 0.15 de dólar por onza y la marca B cuesta 0.20 de dólar por onza. ¿Cuál es la matriz que da el costo total para cada mezcla? ¿Cuál mezcla es la más cara?

Para repasar

Utilizar las siguientes matrices en los ejercicios 41-46.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix}$$

41. Si $A = C$, dar los valores de u , v , w y z .
 42. Identificar el elemento a_{12} en la matriz A .
 43. Encontrar $A + 0$. 44. Encontrar $A + B$. 45. Encontrar $A - B$. 46. Encontrar $3A - 7B$.

Los sistemas indicados en los ejercicios 47-50 se resolverán en la sección próxima por métodos de matrices. Dar aquí la solución de cada sistema por medio de las técnicas expuestas en el capítulo anterior.

47. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 3y = 11 \end{cases}$ 48. $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 3y - z = -4 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$ 49. $\begin{cases} w + x + y + z = 2 \\ w - x + 3y + z = 3 \\ x - y - z = -1 \\ 2w + x + 3y + z = 0 \end{cases}$ 50. $\begin{cases} x - z = -3 \\ -2x - y + 2z = 2 \\ 3x + y + z = -5 \end{cases}$

11.3. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por el método gaussiano

El método gaussiano

En el capítulo anterior se resolvieron sistemas de ecuaciones lineales usando el método de eliminación. La resolución de un sistema puede simplificarse haciendo uso de matrices que constan de los coeficientes de

las variables junto con las constantes. El método que se expone a continuación se llama también método gaussiano, en honor al famoso matemático Karl Friedrich Gauss (1777-1855). Considérese el sistema

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ x - 3y &= 11. \end{aligned}$$

Las dos matrices asociadas a este sistema incluyen la **matriz de coeficientes**

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

arreglada de acuerdo con los coeficientes de las variables, y la **matriz aumentada**

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

formada al adjuntar la columna de constantes a la matriz de coeficientes. Las filas de la matriz aumentada corresponden a las ecuaciones del sistema, pero se omiten las variables y el signo de igualdad.

Operaciones elementales de fila

Las operaciones que se efectúan con las filas de una matriz aumentada que dan por resultado una matriz correspondiente a las ecuaciones equivalentes a las del sistema original (que tiene la misma solución que el original) se denominan **operaciones elementales de fila**. La primera operación elemental de fila consiste en intercambiar las dos ecuaciones indicadas en el sistema, la segunda en multiplicar a ambos lados de una ecuación por una constante diferente de cero y la tercera en sumar expresiones iguales a ambos lados de una ecuación. Como resultado, las tres operaciones elementales de fila dan por resultado una matriz de un sistema de ecuaciones que es equivalente a la original.

Operaciones elementales de fila

Sea k un número real diferente a cero. Las siguientes operaciones, aplicadas a la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, dan por resultado una matriz equivalente a la original.

1. Se intercambian las dos filas.
2. Todos los elementos de una fila se multiplican por k .
3. Se suman los elementos de una fila el producto de k por cada elemento correspondiente de la otra fila.

Forma escalonada reducida

Las operaciones elementales de fila se usan para transformar a la matriz aumentada de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, en una matriz equivalente de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{bmatrix},$$

denominada la **forma escalonada reducida**. Ya que esta matriz corresponde al sistema

$$\begin{aligned}x &= p \\ y &= q\end{aligned}$$

es evidente que la tercera columna proporciona la solución a este sistema, (p, q) ; en consecuencia, también ofrece la solución al sistema original.

El siguiente diagrama sirve para transformar una matriz aumentada de un sistema de dos ecuaciones lineales en la forma de arriba, ya que muestra el mejor orden para obtener los unos y los ceros.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 1

Resolver utilizando el método gaussiano.

$$\begin{aligned}2x + y &= 1 \\ x - 3y &= 11\end{aligned}$$

La matriz aumentada es

$$\begin{array}{l} \text{(A)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 11 \end{bmatrix} \\ \text{(B)} \end{array}$$

1. Intercambiar las dos filas para obtener un 1 en la esquina superior izquierda de la matriz.

$$\begin{array}{l} \text{(B)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{(A)} \end{array}$$

2. Conservar la primera fila, multiplicar por -2 , y sumar el resultado a la segunda fila.

$$\begin{array}{l} \text{(B)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 7 & -21 \end{bmatrix} \\ \text{(C)} \end{array}$$

3. Multiplicar la segunda fila por $1/7$ para obtener 1 en la segunda columna.

$$\begin{array}{l} \text{(B)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \\ \text{(D)} \end{array}$$

4. Para obtener 0 en la segunda columna de la primera fila, conservar la segunda fila, multiplicar por 3 y sumar el resultado a la primera fila

$$\begin{array}{l} \text{(E)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \\ \text{(D)} \end{array}$$

Ya que $x = 2$ y $y = -3$, la solución del sistema es $(2, -3)$.



Para un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables, las operaciones elementales de fila se usan para transformar la matriz aumentada en la forma escalonada reducida

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \end{bmatrix}$$

que corresponde al sistema equivalente

$$\begin{aligned} x &= p \\ y &= q \\ z &= r. \end{aligned}$$

Por consiguiente, la solución del sistema original es (p, q, r) .

El diagrama siguiente muestra el procedimiento más adecuado para obtener los unos y los ceros en la matriz aumentada de un sistema de tres ecuaciones lineales. En todos los casos, una vez que se obtiene el 1 en una columna, se utiliza para obtener los dos 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 2

Resolver utilizando el método gaussiano.

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 1 \\ x + 3y - z &= -4 \\ 3x + 2y + z &= 0 \end{aligned}$$

La matriz aumentada es

$$\begin{aligned} \text{(A)} & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{(B)} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{(C)} & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1. Para obtener 1 en la esquina superior izquierda, intercambiar las dos primeras filas.

$$\begin{aligned} \text{(B)} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{(A)} & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{(C)} & \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. La primera fila se conserva, se multiplica por -2 , y se suma el resultado a la segunda fila. Luego, la primera fila se multiplica por -3 y se suma a la tercera fila. Al hacerlo se obtienen dos 0 en la primera columna.

$$\begin{array}{l} \text{(B)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & -7 & 3 & 9 \\ 0 & -7 & 4 & 12 \end{bmatrix} \\ \text{(D)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & -7 & 3 & 9 \\ 0 & -7 & 4 & 12 \end{bmatrix} \\ \text{(E)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & -7 & 3 & 9 \\ 0 & -7 & 4 & 12 \end{bmatrix} \end{array}$$

3. Al multiplicar por $-1/7$ se obtiene 1 en la segunda columna de la segunda fila.

$$\begin{array}{l} \text{(B)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{9}{7} \\ 0 & -7 & 4 & 12 \end{bmatrix} \\ \text{(F)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{9}{7} \\ 0 & -7 & 4 & 12 \end{bmatrix} \\ \text{(E)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{9}{7} \\ 0 & -7 & 4 & 12 \end{bmatrix} \end{array}$$

4. Se conserva la segunda fila, se multiplica por -3 , y se suma el resultado a la primera fila. Luego, la segunda fila se multiplica por 7 y se suma a la tercera. Una vez más, tras haberse escrito el 1 se han obtenido los dos 0 en la segunda columna.

$$\begin{array}{l} \text{(G)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ \text{(F)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ \text{(H)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

5. En este caso, se obtuvo un 1 en la tercera fila sin realizar esfuerzo adicional alguno.

6. Se conserva la tercera fila, se multiplica por $3/7$ y se suma a la segunda. Por último, la tercera fila se multiplica por $-2/7$ y se suma a la primera.

$$\begin{array}{l} \text{(J)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ \text{(I)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ \text{(H)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ya que $x = -1$, $y = 0$, y $z = 3$, la solución del sistema es $(-1, 0, 3)$.

La real efectividad del método gaussiano se evidencia al poder incluir gran número de variables en el sistema. Al igual que con los sistemas de 2×2 y los sistemas de 3×3 la matriz aumentada de sistemas de órdenes superiores se transforma en la forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & r \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & v \end{bmatrix}$$

al moverse de izquierda a derecha por columnas, obteniéndose primero el 1 deseado y luego los ceros restantes. En realidad, es fácil programar una computadora a fin de que realice estas operaciones aritméticas, obteniéndose así la solución de sistemas extremadamente grandes en cuestión de segundos.

EJEMPLO 3

Resolver utilizando el método gaussiano.

$$\begin{aligned}w + x + y + z &= 2 \\w - x + 3y + z &= 3 \\x - y - z &= -1 \\2w + x + 3y + z &= 0\end{aligned}$$

La matriz aumentada es

$$\begin{array}{l} \text{(A)} \\ \text{(B)} \\ \text{(C)} \\ \text{(D)} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Puesto que ya hay un 1 en la esquina superior izquierda, este se usa para obtener 0 en la segunda y cuarta filas

$$\begin{array}{l} \text{(A)} \\ \text{(E)} \\ \text{(C)} \\ \text{(F)} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

2. La segunda y tercera filas se intercambian para obtener un 1 en la posición deseada.

$$\begin{array}{l} \text{(A)} \\ \text{(C)} \\ \text{(E)} \\ \text{(F)} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

3. Se utiliza el 1 en la segunda fila para obtener 0 en la primera, tercera y cuarta filas.

$$\begin{array}{l} \text{(G)} \\ \text{(C)} \\ \text{(H)} \\ \text{(I)} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

4. En este punto debe señalarse la imposibilidad de obtener un 1 en la posición deseada en la tercera fila. De hecho, al reemplazar la cuarta fila con $-(\text{H}) + (\text{I})$, la matriz se vuelve

$$\begin{array}{l} \text{(G)} \\ \text{(C)} \\ \text{(H)} \\ \text{(J)} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

donde la cuarta fila corresponde a la contradicción $0w + 0x + 0y + 0z = -4$ o $0 = -4$. Como fue el caso con los métodos de solución expuestos en el capítulo anterior, la contradicción indica que el sistema original no tiene solución.

EJEMPLO 4

Resolver por el método gaussiano.

$$\begin{aligned}x & - z = -3 \\ -2x - y - 2z & = 2 \\ 3x + y + z & = -5\end{aligned}$$

La matriz aumentada es

$$\begin{array}{l} \text{(A)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -5 \end{array} \right] \\ \text{(B)} \\ \text{(C)} \end{array}$$

1. Se usa el 1 en la primera fila para obtener 0 en la segunda y tercer filas.

$$\begin{array}{l} \text{(A)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right] \\ \text{(D)} \\ \text{(E)} \end{array}$$

2. La segunda fila se multiplica por -1 para obtener el 1 deseado y se usa éste para obtener un 0 en la tercera fila.

$$\begin{array}{l} \text{(A)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \text{(F)} \\ \text{(G)} \end{array}$$

3. En este punto se obtiene la identidad $0 = 0$ en la tercera fila. Cuando esto sucede, probablemente sea mejor escribir la ecuación incluyendo las variables y resolver por otros métodos.

$$\begin{aligned}x & - z = -3 \\ y + 4z & = 4\end{aligned}$$

Entonces $x = z - 3$ y $y = 4 - 4z$ de modo que el sistema tiene una infinidad de soluciones de la forma $(z - 3, 4 - 4z, z)$ para toda z real.

11.3. Ejercicios

En los ejercicios 1-4 supóngase que la matriz indicada es la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones. Seguir los pasos señalados y escribir la matriz en la forma escalonada reducida.

$$\begin{array}{l} \text{1.} \quad \text{(A)} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 5 \end{array} \right] \\ \text{(B)} \end{array}$$

- Intercambiar las filas (A) y (B).
- Retener (B) y reemplazar (A) con $(C) = -2(B) + (A)$.
- Reemplazar (C) con $(D) = \frac{1}{7}(C)$.
- Retener (D) y reemplazar (B) con $(E) = 2(D) + (B)$.

2. (A) $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 5 \end{bmatrix}$
 (B) $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -6 \end{bmatrix}$

- a) Intercambiar (A) y (B).
 b) Retener (B) y reemplazar (A) con $(C) = -4(B) + (A)$.
 c) Reemplazar (C) con $(D) = -\frac{1}{29}(C)$.
 d) Retener (D) y reemplazar (B) con $(E) = -6(D) + (B)$.

3. (A) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$
 (B) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
 (C) $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 & -10 \end{bmatrix}$

- a) Reemplazar (A) con $(D) = (B) - (A)$.
 b) Retener (D), reemplazar (B) con $(E) = -3(D) + B$, y reemplazar (C) con $(F) = 4(D) + (C)$.
 c) Retener (D) y (F) y reemplazar (E) con $(G) = (-1)[(E) + (F)]$.
 d) Retener (G), reemplazar (D) con $(H) = 2(G) + (D)$, y reemplazar (F) con $(I) = 6(G) + (F)$.
 e) Retener (H) y (G) y reemplazar (I) con $(J) = -\frac{1}{7}(I)$.
 f) Retener (J), reemplazar (G) con $(K) = 4(J) + (G)$, y reemplazar (H) con $(L) = 7(J) + (H)$.

4. (A) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$
 (B) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$
 (C) $\begin{bmatrix} -4 & 3 & -1 & -11 \end{bmatrix}$

- a) Retener (A), reemplazar (B) con $(D) = -3(A) + (B)$, y reemplazar (C) con $(E) = 4(A) + (C)$.
 b) Retener (A) y (E) y reemplazar (D) con $(F) = (-1)[2(D) + 3(E)]$.
 c) Retener (F), reemplazar (A) con $(G) = 2(F) + (A)$, y reemplazar (E) con $(H) = 5(F) + (E)$.
 d) Retener (G) y (F) y reemplazar (H) con $(I) = -\frac{1}{136}(H)$.
 e) Retener (I), reemplazar (F) con $(J) = 31(I) + (F)$, y reemplazar (G) con $(K) = 57(I) + (G)$.

En los ejercicios 5-26 resolver cada sistema por el método gaussiano.

5. $x + 3y = 1$
 $3x + 7y = 5$

6. $4x - y = 3$
 $x + 3y = 4$

7. $4x - 2y = -3$
 $x + y = 3$

8. $3x + 6y = 4$
 $x - 5y = -1$

9. $5x - 3y = -2$
 $2x + 7y = -9$

10. $2x - 3y = 1$
 $-4x + 6y = 2$

11. $3x + 2y = 1$
 $-9x - 5y = -3$

12. $5x - 4y = -1$
 $2x + 8y = 2$

13. $x + 2y = 1$
 $-2x - 4y = -2$

14. $3x - 5y = 2$
 $-9x + 15y = -6$

15. $x + y + z = 2$
 $-x - y + 3z = 6$
 $2x + y - z = -1$

16. $x - y + z = 3$
 $2x + y + 3z = 3$
 $-x + 2y - 4z = -4$

17. $x + z = 1$
 $y + z = 4$
 $2x + y = -3$

18. $x - 2y = -1$
 $y + z = 7$
 $x - z = -2$

19. $2x - y + 3z = 0$
 $x + y - z = 4$
 $2y + 5z = -3$

20. $3x - y + 2z = -2$
 $4x + y + z = 3$
 $7x - 2y - 2z = 9$

21. $3x - y + 2z = 2$
 $x - z = 1$
 $2x - y + 3z = 1$

22. $4x - y + 2z = 4$
 $3x + y = 5$
 $x - 2y + 2z = -3$

23. $w + x - y + z = 4$
 $w + 2y - z = -3$
 $w - x + 2z = 5$
 $2w + x + 2y - 3z = -6$

24. $2w - x - 2y + z = -1$
 $w + x - y = -2$
 $-w - x + 4z = -1$
 $2x + y - 3z = 1$

$$\begin{aligned} 25. \quad \sqrt{x} + y^2 - \frac{1}{z} &= 4 \\ 2\sqrt{x} - y^2 + \frac{1}{z} &= 2 \\ -\sqrt{x} - 2y^2 - \frac{1}{z} &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26. \quad x^3 - \sqrt{y} + 2^z &= 7 \\ 2x^3 + 3\sqrt{y} - 2^z &= 23 \\ -x^3 + \sqrt{y} + 2^z &= -3 \end{aligned}$$

Problemas 25-26

Los ejercicios 27-39 hacen referencia a las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D = [2 \quad 1 \quad -1] \quad E = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \quad F = [4 \quad -3]$$

27. ¿Cuál es el orden de C ?
 28. ¿Cuál es el elemento c_{13} en la matriz C ?
 29. Dar la matriz $-B$.
 30. Dar la matriz C^T .
 31. Encontrar $A + B$.
 32. Encontrar $B - C$.
 33. Encontrar $2A - 4B$.
 34. Encontrar $D \cdot E$.
 35. Encontrar $(AB)^T$.
 36. Encontrar FA .
 37. Encontrar AI .
 38. Encontrar $C + 0$.
 39. Encontrar ED .
 40. **Administración.** Supóngase que $C = [200 \quad 300 \quad 400 \quad 550]$ da los precios de venta de cuatro modelos de aparatos de televisión y

$$N = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

da el número de cada modelo vendido en sábado. Localizar $C \cdot N$ e interpretar el resultado.

Problemas 27-39

Resolución de ecuaciones de matrices

En el estudio del álgebra de matrices se han observado numerosas semejanzas entre las matrices y el álgebra de los números reales. Las propiedades de los números reales permiten resolver ecuaciones que contienen variables numéricas reales, y las propiedades de las matrices posibilitan la resolución de ecuaciones de matrices. Por ejemplo, considérese la ecuación de matrices

$$A + X = B,$$

donde $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$, y $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$.

Se sustituyen estas matrices en la ecuación de matrices y se suman las dos matrices del lado izquierdo.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+w & -3+x \\ 2+y & 5+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$



Emplear la definición de igualdad de matrices para determinar w , x , y y z .

$$\begin{array}{cccc} 1 + w = 0 & -3 + x = 2 & 2 + y = -4 & 5 + z = 7 \\ w = -1 & x = 5 & y = -6 & z = 2 \end{array}$$

Así, se ha resuelto la ecuación de matrices para la matriz variable X , obteniéndose

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Haciendo uso de las propiedades de matrices, la ecuación se habría resuelto de la manera siguiente.

$$\begin{aligned} A + X &= B \\ -A + (A + X) &= -A + B \\ (-A + A) + X &= -A + B \\ 0 + X &= -A + B \\ X &= -A + B \end{aligned}$$

Obsérvese que la obtención del valor de X no es otra cosa que la operación de matrices $-A + B$, o en forma equivalente $B - A$, de acuerdo con las matrices constantes dadas A y B .

El siguiente paso lógico es considerar si una ecuación de matrices de la forma

$$AX = B$$

puede resolverse de una manera similar. Para resolver la ecuación algebraica análoga

$$ax = b,$$

podría multiplicarse a ambos lados por el recíproco o inverso multiplicativo de a , $\frac{1}{a}$, o a^{-1} .

$$\begin{aligned} a^{-1}(ax) &= a^{-1}b \\ (a^{-1}a)x &= a^{-1}b \\ 1 \cdot x &= a^{-1}b \\ x &= a^{-1}b \end{aligned}$$

La inversa de una matriz

A fin de resolver una ecuación de matrices semejante, nos referimos al problema de encontrar una inversa multiplicativa de la matriz A . Por razones que pronto serán obvias, la consideración de inversas se restringe a matrices cuadradas. Aunque no toda matriz cuadrada tiene una inversa, las que sí la tienen se denominan **no singulares** y las que no **singulares**. Puede demostrarse que si una matriz es no singular, entonces la matriz A^{-1} es única.

La inversa de una matriz

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ e I la matriz identidad $n \times n$. A la matriz $A^{-1} n \times n$ se le llama la **inversa** de A si y sólo si

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$



El símbolo A^{-1} debe leerse "inversa de A " y no debe utilizarse la notación $\frac{1}{A}$, ya que la operación de división no se ha definido para matrices.

Ahora, habiéndose definido la inversa de una matriz cuadrada, la siguiente consideración es encontrar esa inversa. Supóngase que se tiene la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si A^{-1} existe, entonces debe ser una matriz 2×2 de la forma

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Se efectúa la multiplicación y se usa la definición de igualdad para obtener dos sistemas de ecuaciones.

$$\begin{bmatrix} 3a + 4c & 3b + 4d \\ 2a + 3c & 2b + 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} 3a + 4c = 1 & 3b + 4d = 0 \\ 2a + 3c = 0 & 2b + 3d = 1 \end{array}$$

Al resolver estos sistemas se obtiene $a = 3$, $b = -4$, $c = -2$, y $d = 3$. Así,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Es fácil demostrar que esta matriz es la inversa ya que

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = A^{-1}A.$$

Como se señaló con anterioridad, no todas las matrices tienen inversas. Puede demostrarse que

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

no tiene una inversa. De seguir el mismo procedimiento empleado arriba para la matriz A , los dos sistemas de ecuaciones en a y c y en b y d son inconsistentes y no tienen solución.

El proceso de encontrar la inversa de una matriz, cuando existe, puede simplificarse al reducir una matriz aumentada particular a la forma escalonada. El procedimiento es análogo al expuesto en la sección anterior. Considérese nuevamente los sistemas obtenidos al encontrar A^{-1} .

$$\begin{array}{ll} 3a + 4c = 1 & 3b + 4d = 0 \\ 2a + 3c = 0 & 2b + 3d = 1 \end{array}$$

Si se resuelven estos sistemas por el método gaussiano, las matrices aumentadas son

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ya que estas dos matrices son idénticas en las primeras dos columnas, en vez de reducirlas a la forma escalonada por separado, el proceso puede agilizarse al combinarlas en una sola matriz aumentada de la forma

$$\begin{array}{l} \text{(A)} \\ \text{(B)} \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Esta matriz es de la forma $[A|I]$, donde A es la matriz original e I la matriz identidad de 2×2 . Al usar las operaciones elementales de fila en esta matriz aumentada, es posible transformarla en la forma $[I|A^{-1}]$, para ello se siguen los pasos indicados a continuación.

1. Para obtener un 1 en la esquina superior izquierda, retener (B) y reemplazar (A) con $(C) = (-1)(B) + (A)$.

$$\begin{array}{l} \text{(C)} \\ \text{(B)} \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

2. Retener (C) y reemplazar (B) con $(D) = (-2)(C) + (B)$.

$$\begin{array}{l} \text{(C)} \\ \text{(D)} \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right]$$

3. Retener (D) y reemplazar (C) con $(E) = (-1)(D) + (C)$.

$$\begin{array}{l} \text{(E)} \\ \text{(D)} \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right]$$

Observar que la matriz $[I|A^{-1}]$ sí proporciona el valor de A^{-1} obtenido antes. Aunque se ha ilustrado este método encontrando A^{-1} con una matriz A de 2×2 puede extenderse a matrices arbitrarias de $n \times n$.

Para encontrar la inversa de una matriz cuadrada

Sea A una matriz de $n \times n$:

1. Se forma la matriz aumentada $[A|I]$.
2. Se utilizan las operaciones elementales de fila para reducir $[A|I]$.
3. Si A^{-1} existe, la matriz aumentada se reducirá a $[I|A^{-1}]$.
4. Si A^{-1} no existe, se aparecerá una fila de ceros a la izquierda de la recta vertical.

EJEMPLO 1

Encontrar la inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Formar la matriz aumentada $[A|I]$.

$$\begin{array}{l} \text{(A)} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \text{(B)} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \text{(C)} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

1. Retener (A), reemplazar (B) con (D) = 2(A) + (B), y reemplazar (C) con (E) = -2(A) + (C).

$$\begin{array}{l} \text{(A)} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \text{(D)} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \text{(E)} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

2. Retener (D) y reemplazar (E) con (F) = 2(D) + (E).

$$\begin{array}{l} \text{(A)} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \\ \text{(D)} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \\ \text{(F)} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

3. Retener (F), reemplazar (D) con (G) = 2(F) + (D), y reemplazar (A) con (H) = (F) + (A).

$$\begin{array}{l} \text{(H)} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \\ \text{(G)} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \\ \text{(F)} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Así, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Como comprobación, demostrar que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Una vez que se ha expuesto cómo encontrar inversas, considérese un regreso al problema para resolver la ecuación de matrices

$$AX = B$$

plantada al inicio de esta sección. Si A es no singular, entonces A^{-1} existe y

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B.$$

Escritura de sistemas como ecuaciones matriciales

Ya que la multiplicación de matrices no es conmutativa, $A^{-1}B$ es la forma correcta para X , no BA^{-1} .

Las ecuaciones matriciales surgen de manera natural con los sistemas de ecuaciones lineales. Por ejemplo, considérese el sistema

$$\begin{aligned} 2x - y &= -4 \\ 3x + 4y &= 5. \end{aligned}$$

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad y \quad B = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix},$$

entonces A es la **matriz de coeficientes** del sistema, X es la **matriz de las variables** y B es la **matriz de las constantes**. Considerar la ecuación matricial $AX = B$.

$$\begin{aligned} AX &= B \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2x - y \\ 3x + 4y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por la definición de igualdad de matrices,

$$\begin{aligned} 2x - y &= -4 \\ 3x + 4y &= 5. \end{aligned}$$

Así, la ecuación matricial $AX = B$ es equivalente al sistema de dos ecuaciones con dos variables. Si A tiene una inversa A^{-1} , X puede despejarse de la ecuación matricial.

$$X = A^{-1}B$$

Suponer que se intenta encontrar A^{-1} .

- (A) $\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]$
 (B) $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]$
 (C) $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & -11 & 3 & -2 \end{array} \right]$
 (D) $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{array} \right]$
 (E) $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{array} \right]$
 (F) $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{array} \right]$
 (E) $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{array} \right]$

Así, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$, la cual también puede escribirse como $A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, evitando

fracciones en la matriz. Entonces la solución de la ecuación matricial es

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B &= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -11 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ya que $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, se tiene $x = -1$ y $y = 2$ es decir, $(-1, 2)$ es la solución del sistema original.

Resolución por el método de la inversa

Es obvio que el sistema de ecuaciones presentado antes podría resolverse con mayor rapidez, ya sea por el método de sustitución o por el método de eliminación, los cuales se analizaron en el capítulo anterior. Sin embargo, esta técnica, llamada **método de la inversa**, es importante cuando se usa en conjunción con una computadora o con una calculadora programable.

EJEMPLO 2

Resolver el sistema siguiente utilizando el método de la inversa.

$$\begin{aligned} x &\quad - \quad z = 2 \\ -2x + y &\quad = -8 \\ 2x - 2y + 3z &= 13 \end{aligned}$$

El sistema es equivalente a la ecuación matricial $AX = B$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

En el ejemplo 1, se encontró la matriz inversa

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

La solución de la ecuación matricial es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

haciendo $x = 3$, $y = -2$ y $z = 1$. Así, $(3, -2, 1)$ es la solución del sistema.

Esta sección concluye con el segundo problema presentado en la introducción de este capítulo. Muestra que el método de la inversa puede ser una herramienta útil para resolver varios sistemas de ecuaciones, todos con la misma matriz de coeficientes.

EJEMPLO 3

Deportes

El Comité Olímpico Deportivo programa cuatro juegos de baloncesto de exhibición entre la selección olímpica de los Estados Unidos y un equipo integrado por jugadores de la Asociación Nacional de Baloncesto. Los boletos se van a vender a \$5.00 dólares y \$8.00 dólares con lo que se obtiene una recaudación total especificada. Suponiendo que se venderán todas las localidades en cada estadio, utilizar la información proporcionada en la tabla siguiente para determinar el número de localidades a cada precio que deben venderse para cada juego.

	Juego 1	Juego 2	Juego 3	Juego 4
Total de localidades en el estadio	9 000	12 000	8 400	21 000
Recaudación obtenida	\$63 000	\$81 000	\$66 000	\$114 000

Sea x = el número de boletos vendidos a 5.00 dólares.

y = el número de boletos vendidos a 8.00 dólares.

En efecto, hay cuatro sistemas de ecuaciones para resolver, todos tienen la misma matriz de coeficientes A . Si n es el número de localidades en un estadio y r es la recaudación deseada para el juego en ese estadio, entonces

$$x + y = n$$

$$5x + 8y = r$$

representa el sistema general que debe resolverse para los cuatro valores particulares de n y r proporcionados en la tabla. Considerar la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}.$$

La inversa de la matriz de coeficientes A es

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces, $X = A^{-1}B$ se vuelve

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}.$$

Para encontrar el número de boletos a cada precio, se sustituyen los valores apropiados para n y r y se efectúa la multiplicación.

Para el juego 1: $n = 9\,000$ y $r = 63\,000$ dólares.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9\,000 \\ 63\,000 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 9\,000 \\ 18\,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\,000 \\ 6\,000 \end{bmatrix}$$

Así, $x = 3\,000$ (localidades de 5.00 dólares) y $y = 6\,000$ dólares (localidades de 8.00 dólares).

Para el juego 2: $n = 12\,000$ y $r = 81\,000$ dólares.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12\,000 \\ 81\,000 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 15\,000 \\ 21\,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\,000 \\ 7\,000 \end{bmatrix}$$

Así, $x = 5\,000$ (localidades de 5.00 dólares) y $y = 7\,000$ (localidades de 8.00 dólares).

Para el juego 3: $n = 8\,400$ y $r = 66\,000$ dólares.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8\,400 \\ 66\,000 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1\,200 \\ 24\,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 8\,000 \end{bmatrix}$$

Así, $x = 400$ (localidades de 5.00 dólares) y $y = 8\,000$ (localidades de 8.00 dólares).

Para el juego 4: $n = 21\,000$ y $r = 114\,000$ dólares.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21\,000 \\ 114\,000 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 54\,000 \\ 9\,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18\,000 \\ 3\,000 \end{bmatrix}$$

Así, $x = 18\,000$ (localidades de a 5.00 dólares) y $y = 3\,000$ (localidades de 8.00 dólares).

11.4. Ejercicios

En los ejercicios 1-4 demostrar que $B = A^{-1}$ al encontrar AB y BA .

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{21}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

En los ejercicios 5-16 encontrar la inversa de cada matriz, si existe.

5. $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$14. \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$15. \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$16. \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 17-18 encontrar los valores de x y y .

$$17. \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$18. \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 19-20 encontrar los valores de x , y y z .

$$19. \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$20. \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Utilizar el método de la inversa para resolver cada sistema en los ejercicios 21-24. La inversa de la matriz de coeficientes se encontró en los ejercicios 5-8.

$$21. \begin{aligned} 3x - 4y &= 2 \\ 4x - 5y &= 3 \end{aligned}$$

$$22. \begin{aligned} x - 6y &= -23 \\ -x + 7y &= 26 \end{aligned}$$

$$23. \begin{aligned} 2x - y &= 11 \\ 4x - 3y &= 25 \end{aligned}$$

$$24. \begin{aligned} 3x - 3y &= 12 \\ 2x - y &= 6 \end{aligned}$$

Utilizar el método de la inversa para resolver cada sistema en los ejercicios 25-30. La inversa de la matriz de coeficientes se encontró en los ejercicios 11-16.

$$25. \begin{aligned} 2x - 2y + 3z &= -5 \\ x - z &= 5 \\ -2x + y &= -4 \end{aligned}$$

$$26. \begin{aligned} 3x - z &= 8 \\ x + 2y + 4z &= -1 \\ x + y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

$$27. \begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ y + z &= 6 \\ -x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

$$28. \begin{aligned} x - y + z &= -5 \\ 2x + y - z &= 11 \\ x - 2y + 3z &= -15 \end{aligned}$$

$$29. \begin{aligned} x + 3y - z &= 13 \\ 3x + y &= 12 \\ -2x + z &= -7 \end{aligned}$$

$$30. \begin{aligned} 2x + y - z &= 9 \\ x - y &= 6 \\ y + 3z &= -1 \end{aligned}$$

En los ejercicios 31-32 utilizar el método de la inversa para resolver cada sistema de acuerdo con los valores indicados de a y b .

$$31. \begin{aligned} 2x + y &= a \\ 5x + 3y &= b \\ \text{(a) } a = 1, b = 1 & \quad \text{(b) } a = 6, b = 18 \\ \text{(c) } a = -1, b = 0 \end{aligned}$$

$$32. \begin{aligned} 7x - 2y &= a \\ 5x - 2y &= b \\ \text{(a) } a = 22, b = 14 & \quad \text{(b) } a = -7, b = -5 \\ \text{(c) } a = 18, b = 14 \end{aligned}$$

En los ejercicios 33-34 utilizar el método de la inversa para resolver cada sistema de acuerdo con los valores indicados de a , b y c .

$$33. \begin{aligned} x - z &= a \\ x + y &= b \\ y + 2z &= c \\ \text{(a) } a = 5, b = 2, c = -6 & \quad \text{(b) } a = 0, b = 5, c = 6 \\ \text{(c) } a = -3, b = -4, c = 0 \end{aligned}$$

$$34. \begin{aligned} x + y - z &= a \\ 2x + z &= b \\ x - y &= c \\ \text{(a) } a = 4, b = 10, c = 6 & \quad \text{(b) } a = 5, b = 7, c = 0 \\ \text{(c) } a = 0, b = -5, c = 1 \end{aligned}$$

En los ejercicios 35-36 encontrar la inversa de la matriz de 4×4 dada.

$$35. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$36. \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

37. Si A es una matriz no singular de $n \times n$ y si B y C son matrices de $n \times n$ tales que $AB = AC$, demostrar que $B = C$.

38. Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es una matriz con la propiedad de que $ad - bc \neq 0$, demostrar que $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

En los ejercicios 39-42 utilizar la fórmula para A^{-1} dada en el ejercicio 38 para encontrar cada inversa.

39. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ 40. $\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 41. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 42. $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

43. Suponer que $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

- a) Encontrar AB . b) Encontrar $(AB)^{-1}$. c) Encontrar A^{-1} . d) Encontrar B^{-1} .
 e) Encontrar $A^{-1}B^{-1}$. f) Encontrar $B^{-1}A^{-1}$.
 g) ¿Qué podría concluirse en vista de (a)–(f)?

En los ejercicios 44-45 resolver cada problema por el método de la inversa.

44. **Administración.** Estufas Ponderosa vende dos modelos de estufas quemadoras de madera, la Sierra y la Aspen, cuyos precios son 300 dólares y 500 dólares, respectivamente. Para las cuatro semanas de enero, el propietario se fija la meta de vender el número total de estufas y obtener la recaudación semanal indicados en la tabla siguiente. ¿Cuántas estufas de cada modelo deben venderse cada semana para alcanzar esa meta?

	Semana 1	Semana 2	Semana 3	Semana 4
Total de estufas vendidas	12	15	10	20
Recaudación total obtenida	\$5 400	\$7 500	\$3 400	\$90 000

45. **Biología.** Un biólogo tiene tres grupos de animales para un experimento. Desea preparar una dieta diferente para cada grupo especificando las cantidades de proteína y grasa. Compra dos mezclas de alimento: Supercrecimiento, que contiene 30% de proteína y 6% de grasa por peso; y Mezcla Saludable, que contiene 20% de proteína y 2% de grasa por peso. ¿Cuántas onzas de cada alimento deben combinarse con el fin de obtener las mezclas mostradas en la siguiente tabla? Dar las respuestas con una exactitud de décimas.

	Mezcla 1	Mezcla 2	Mezcla 3
Proteína	13.5 onzas	14 onzas	16 onzas
Grasa	2.4 onzas	2.6 onzas	3.1 onzas

En los ejercicios 46-48 resolver cada sistema utilizando el método gaussiano.

46. $4x - 5y = -38$
 $2x + 3y = 14$

47. $6x - 2y = 1$
 $-3x + y = 1$

48. $x - 2y + z = -4$
 $2x \quad \quad - z = 7$
 $-3x + 4y + z = -8$

El determinante de una matriz 2×2

Cada matriz cuadrada está asociada con un número real llamado su *determinante*. Existen numerosas aplicaciones de las determinantes, la más famosa de ellas es un método para resolver sistemas de n ecuaciones lineales con n variables llamado la *regla de Cramer*, en honor a Gabriel Cramer (1704-1752).

A lo largo de esta sección y la siguiente, todas las matrices bajo consideración serán matrices cuadradas. Empezaremos por definir el determinante de una matriz 2×2

Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ una matriz de 2×2 . El **determinante** de A está dado por

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

La notación $|A|$ no debe confundirse con la notación de valor absoluto utilizada para los números reales. Además, los paréntesis empleados para designar una matriz se reemplazan por barras verticales cuando se desea denotar el determinante de la matriz. La fórmula para un determinante 2×2 puede recordarse al considerar el diagrama siguiente.

$$\begin{vmatrix} & b \\ c & \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & \\ & d \end{vmatrix} \\ ad - bc$$

EJEMPLO 1

Evaluar los determinantes siguientes

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4) - (2)(3) = 4 - 6 = -2$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = (3)(6) - (9)(2) = 18 - 18 = 0$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Regla de Cramer para sistemas de dos ecuaciones

Con el objeto de comprender la motivación para la definición de un determinante 2×2 supóngase que se pretende resolver un sistema general de dos ecuaciones lineales con dos variables x y y ,

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2, \end{aligned}$$

donde a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 y c_2 son números reales. Multiplicar la primera ecuación por b_2 y la segunda por b_1 .

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned}$$

Restar la segunda a la primera para eliminar y .

$$\begin{aligned} a_1 b_2 - a_2 b_1 &= c_1 b_2 - c_2 b_1 \\ (a_1 b_2 - a_2 b_1) x &= c_1 b_2 - c_2 b_1 \\ x &= \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \end{aligned}$$

De manera semejante, se puede eliminar primero x y despejar luego a y .

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Considerar la matriz de coeficientes para este sistema,

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}.$$

El denominador en cada expresión fraccionaria para x y y es el determinante de la matriz de coeficientes A ,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Asimismo, ya que el numerador de cada expresión tiene la apariencia de un determinante, se definen las matrices A_x y A_y cuyos determinantes son

$$y \quad \begin{aligned} |A_x| &= \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1, \\ |A_y| &= \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1. \end{aligned}$$

Observar que A_x puede obtenerse de A al reemplazar la columna de coeficientes de x por las constantes y que A_y se obtiene de manera similar al reemplazar los coeficientes de y por las constantes. Entonces

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{|A_x|}{|A|},$$

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{|A_y|}{|A|}.$$

Con ello se ha probado el siguiente teorema.

Regla de Cramer

El sistema

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

tiene soluciones

$$y \quad \text{si} \quad x = \frac{|A_x|}{|A|} \quad y \quad y = \frac{|A_y|}{|A|}, \quad \text{si } |A| \neq 0,$$

donde y

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad |A_x| = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad y \quad |A_y| = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

EJEMPLO 2

Resolver el sistema utilizando la regla de Cramer.

$$3x - 4y = -5$$

$$5x + y = 7$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (-4)(5) = 23$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = (-5)(1) - (-4)(7) = 23$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = (3)(7) - (-5)(5) = 46$$

Entonces
$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{23}{23} = 1 \quad y \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{46}{23} = 2.$$

La solución del sistema es (1, 2). Comprobar la solución en ambas ecuaciones.

Si el determinante de la matriz de coeficientes, $|A|$, es nula, la regla de Cramer no se aplica. En tales casos, el sistema no tiene solución o tiene infinitud de soluciones; deberán utilizarse, entonces, las técnicas de resolución expuestas en el capítulo anterior.

Determinantes de matrices de órdenes superiores

Para extender la regla de Cramer a sistemas de tres ecuaciones con tres variables, primero debe definirse el determinante de una matriz 3×3 . En vez de concentrarse en el caso 3×3 , se presentarán las *menores* y *cofactores* de los elementos de una matriz cuadrada y se usarán para obtener el determinante de una matriz arbitraria $n \times n$ para $n \geq 3$. En realidad, como se verá, un determinante 3×3 se da en términos de tres determinantes 2×2 un determinante 4×4 en términos de cuatro determinantes 3×3 y así sucesivamente.

El menor de un elemento

Sea A una matriz cuadrada de orden $n \geq 3$. El **menor** de un elemento a_{ij} , denotado por M_{ij} , es el determinante de la matriz obtenida al suprimir la i -ésima fila y la j -ésima columna de A .

EJEMPLO 3

Considerar la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

a) Encontrar M_{12} .

M_{12} es el menor del elemento $a_{12} = 2$. Eliminar la primera fila y la segunda columna de A y evaluar el determinante del resultado.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 42 = -6$$

b) Encontrar M_{31} .

M_{31} es el menor de $a_{31} = 7$. Eliminar la tercera fila y la primera columna de A .

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3$$

Un número estrechamente relacionado con el menor de un elemento es su cofactor.

El cofactor de un elemento

Sea A una matriz cuadrada de orden $n \geq 3$. El **cofactor** de un elemento a_{ij} , denotado por A_{ij} , está dado por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

donde M_{ij} es el menor de a_{ij} .

El menor y el cofactor de un elemento difieren a lo más en el signo del número. Para el elemento a_{ij} ,

$$A_{ij} = M_{ij} \text{ if } i + j \text{ es par.}$$

$$A_{ij} = -M_{ij} \text{ if } i + j \text{ es impar.}$$

El siguiente arreglo en forma de un "tablero" de ajedrez indica los signos aplicados a los menores correspondientes para obtener los cofactores de una matriz 3×3

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 4

Considerar la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

a) Encontrar A_{21} .

A_{21} es el factor del elemento $a_{21} = 4$. Eliminar la segunda fila y la primera columna para determinar M_{21} .

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^3 [18 - 24] = (-1)(-6) = 6$$

Ya que el elemento $a_{21} = 4$ está en una posición “-” en el tablero de signos, el trabajo podría abreviarse procediendo de la siguiente manera.

$$A_{21} = -M_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -(18 - 24) = 6$$

b) Encontrar A_{13} .

A_{13} es el cofactor del elemento $a_{13} = 3$. Ya que a_{13} está en una posición “+”

$$A_{13} = +M_{13} = + \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = +[32 - 35] = +[-3] = -3.$$

El determinante de una matriz cuadrada de orden $n \geq 3$ puede encontrarse usando un método llamado **desarrollo por cofactores**.

Desarrollo por cofactores

Sea A una matriz cuadrada de orden $n \geq 3$. El determinante de A , $|A|$, se encuentra al sumar los productos de los elementos de cualquier fila o columna y sus cofactores respectivos.

EJEMPLO 5

Utilizar el desarrollo por cofactores para encontrar $|A|$ si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Para ilustrar el método y demostrar que cualquier fila o columna produce el mismo resultado, encontrar $|A|$ utilizando a) los elementos de la segunda columna y b) los elementos de la primera fila.

$$\begin{aligned} \text{a) } |A| &= A_{12} + A_{22} + A_{32} \\ &= (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (0)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (-2)(-3 - 20) + (0)(3 - (-15)) + (-2)(4 - 3) \\ &= (-2)(-23) + 0 + (-2)(1) = 46 - 2 = 44 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= (1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (2)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (1)(0 - 8) + (-2)(-3 - 20) + (-3)(-2 - 0) \\ &= (1)(-8) + (-2)(-23) + (-3)(-2) = -8 + 46 + 6 = 44 \end{aligned}$$

Así, se obtiene el mismo resultado en ambos desarrollos.

Al seleccionar una fila o columna con uno o más elementos nulos, el trabajo puede reducirse puesto que en el desarrollo un cero hace que el término correspondiente sea igual a cero.

EJEMPLO 6

Encontrar

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

En este caso, sería sensato escoger la tercera columna y aprovechar los elementos nulos.

$$\begin{aligned} |A| &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \\ &= 0A_{13} + 0A_{23} + (-1)A_{33} \\ &= (-1)A_{33} = (-1)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (-1)(+1)[8 - (-1)] \\ &= (-1)(9) = -9 \end{aligned}$$

EJEMPLO 7

Encontrar

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Supóngase que se procede a desarrollar a lo largo de la tercera fila aprovechando los dos ceros. Los signos de los cofactores se han colocado, en color, arriba de cada elemento.

$$\begin{aligned} |A| &= 0 + \quad 1(-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 + (-2)(-1) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0 + (-1) \left[(-1) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (3) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \right] + 0 + (2) \left[(-1) \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \right] \\ &= 0 + (-1)[(-1)(6 + 1) + (3)(2 + 9)] + 0 + (2)[(-1)(4 + 3) + (-2)(2 + 9)] \\ &= 0 + (-1)[26] + 0 + (2)[-29] = -26 - 58 = -84 \end{aligned}$$

Regla de Cramer para sistemas de tres ecuaciones

La definición del valor de un determinante de tercer orden parecería razonable si se fuera a resolver el siguiente sistema general de tres ecuaciones con tres variables x , y y z .

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Las soluciones de este sistema tienen la siguiente forma.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

A este resultado también se le conoce como regla de Cramer, esta vez para un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables. El determinante de la matriz de coeficientes aparece en el denominador de cada fracción, y el determinante en cada numerador se forma al reemplazar los coeficientes de la variable respectiva por las constantes. Al igual que con los sistemas de dos ecuaciones con dos variables, se usa la siguiente notación.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad |A_x| = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad |A_y| = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad |A_z| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Las soluciones del sistema, utilizando la regla de Cramer, son

EJEMPLO 8

Resolver el sistema utilizando la regla de Cramer.

$$x + y - z = 4$$

$$2x + y + z = 1$$

$$3x - 2y - z = 3$$

Es fácil comprobar que los cuatro determinantes son

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 13 \quad |A_x| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 13$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 13 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -26.$$

Así,

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{13}{13} = 1, \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{13}{13} = 1, \quad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-26}{13} = -2.$$

Por supuesto, es posible resolver el sistema propuesto en el ejemplo 8 en menos tiempo usando el método de eliminación expuesto en el capítulo anterior. Sin embargo, el verdadero valor de una técnica numérica de computación, como la regla de Cramer, se hace patente cuando se utiliza una computadora o una calculadora programable. Una vez que se ha programado el método de evaluación de un determinante en el dispositivo, con sólo introducir los diversos coeficientes y constantes, las soluciones de los sistemas se obtendrán oprimiendo una tecla.

11.5. Ejercicios

Evaluar los determinantes en los ejercicios 1-8.

- | | | | |
|---|---|---|--|
| 1. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ | 2. $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$ | 3. $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ | 4. $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$ |
| 5. $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$ | 6. $\begin{vmatrix} -2 & -7 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$ | 7. $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ b & a \end{vmatrix}$ | 8. $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$ |

Utilizar la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ para responder los ejercicios 9-16.

9. Encontrar el menor del elemento 3.
10. Encontrar el menor del elemento 4.
11. Encontrar el cofactor del elemento 3.
12. Encontrar el cofactor del elemento 4.
13. Encontrar $|A|$ al desarrollar a lo largo de la primera fila.
14. Encontrar $|A|$ al desarrollar a lo largo de la segunda fila.
15. Encontrar $|A|$ al desarrollar a lo largo de la primera columna.
16. Encontrar $|A|$ al desarrollar a lo largo de la segunda columna.

Evaluar los determinantes en los ejercicios 17-22.

- | | | |
|---|--|--|
| 17. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ | 18. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ | 19. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ |
| 20. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$ | 21. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ | 22. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ |

En los ejercicios 23-32 resolver cada sistema utilizando la regla de Cramer.

23. $x + 2y = -1$
 $2x - 3y = 12$

27. $4x - y = -3$
 $2x - 3y = 1$

24. $2x - y = 8$
 $3x + 5y = -14$

28. $7x - 3y = -6$
 $4x + 2y = 4$

25. $3x + 2y = -3$
 $6x - 3y = 8$

29. $3x - y = -11$
 $2x + 4z = -2$
 $-3y + 5z = -1$

26. $3x + 4y = 1$
 $5x - 2y = 6$

30. $2x + 3z = -8$
 $y - 4z = 9$
 $x - 3y = -4$

31. $2x + y - z = -3$
 $x - y + z = 0$
 $-3x + 2y - 4z = -3$

32. $x - 2y - z = -1$
 $2x + y + z = 2$
 $-x - y + 2z = 7$

Despejar x en los ejercicios 33-38.

33. $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3$

34. $\begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 5$

35. $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 3$

36. $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = -6$

37. $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 2 & x & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$

38. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & x \\ x & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -10$

Evaluar los determinantes en los ejercicios 39-40.

39. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

40. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

41. a) Evaluar. $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

b) Evaluar. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

c) Evaluar. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

d) ¿Cuál es el determinante de cualquier matriz nula $n \times n$?

42. a) Evaluar. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

b) Evaluar. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

c) Evaluar. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

d) ¿Cuál es el determinante de cualquier matriz identidad?

43. a) Evaluar. $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}$

b) Evaluar. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$

c) Evaluar. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$

d) Las matrices con los determinantes mostrados en a), b) y c) se denominan **matrices diagonales**. ¿Cuál es el determinante de cualquier matriz diagonal?

44. a) Evaluar. $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix}$

b) Evaluar. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix}$

c) Evaluar. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{vmatrix}$

d) Las matrices con los determinantes mostrados en a), b) y c) se denominan **matrices triangulares**. ¿Cuál es el determinante de cualquier matriz triangular?

45. a) Evaluar. $\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{vmatrix}$

b) Evaluar. $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{vmatrix}$

c) Evaluar. $\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & 0 \\ j & k & l & 0 \end{vmatrix}$

d) ¿Cuál es el determinante de cualquier matriz que tenga una columna de ceros?

46. a) Evaluar. $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

b) Evaluar. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

c) Evaluar. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

d) ¿Cuál es el determinante de cualquier matriz que tenga una fila de ceros?

47. Si $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, encontrar $|A|$ y $|A^T|$ y comparar los resultados.

48. Si $A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & 0 & 0 \end{vmatrix}$, encontrar $|A|$ y $|A^T|$ y comparar los resultados.

49. Demostrar que la ecuación de la recta que pasa a través de los dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por la ecuación

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

50. Utilizar la ecuación del ejercicio 49 para encontrar la ecuación de la recta que pasa a través de los dos puntos $(2, 0)$ y $(-1, 3)$.



51. Mostrar que el área de un triángulo con vértices (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) es el valor absoluto de

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

52. Utilizar la ecuación del ejercicio 51 para encontrar el área del triángulo con vértices $(0, 1)$, $(3, 5)$ y $(-1, 2)$.

53. Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, demostrar que $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$, siempre que $|A| \neq 0$.

54. Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, demostrar que $|AB| = |A||B|$.

55. Si A y B son matrices 2×2 tales que $|AB| = 0$, ¿debe ser $|A| = 0$ o $|B| = 0$?

56. Si A y B son matrices 2×2 tales que $|AB| = 0$, ¿debe ser $A = 0$ o $B = 0$?

57. Demostrar que $\begin{vmatrix} a & b \\ na & nb \end{vmatrix} = 0$.

58. Demostrar que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$.

59. Demostrar que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$.

60. Demostrar que $\begin{vmatrix} na & nb \\ nc & nd \end{vmatrix} = n^2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

En los ejercicios 61-62 encontrar la inversa de cada matriz.

61. $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

62. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Utilizar el método de la inversa para resolver cada sistema en los ejercicios 63-64. La inversa de la matriz de coeficientes se encontró en los ejercicios 61-62.

63. $\begin{aligned} 2x - 4y &= -20 \\ -x + 3y &= 15 \end{aligned}$

64. $\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2y - z &= -2 \\ 2x + 3y &= -4 \end{aligned}$

65. **Administración.** Empresas Recreación fabrica dos tipos de mesas para comer en el campo, el modelo estándar y el modelo de lujo. Los costos son 20 dólares para mano de obra y 25 dólares para materiales en el proceso de manufactura de un modelo estándar y 40 dólares para mano de obra y 80 dólares para materiales en la manufactura del modelo de lujo. Cada semana, los recursos totales disponibles para cubrir los costos de mano de obra y materiales fluctúan debido a vacaciones de los empleados y variaciones en los programas de entrega. El propietario ha determinado que, durante las próximas tres semanas, los recursos disponibles se limiten de acuerdo con el programa que se muestra en la tabla siguiente. Utilizar el método de la inversa para determinar el número de mesas de cada tipo que deberá programarse para construcción cada semana.

	Semana 1	Semana 2	Week 3
Mano de obra	\$1 800	\$1 400	\$2 200
Materiales	\$3 300	\$2 200	\$3 950

1.2.4.3. Ejercicios de la sección 1.2.4.3.

Los teoremas presentados en esta sección facilitan la tarea de evaluar los determinantes de matrices cuadradas de orden mayor o igual a 3. Estos teoremas además tienen numerosas aplicaciones en cursos más avanzados de la teoría de las matrices. Debido a que las demostraciones de los teoremas de las matrices generales $n \times n$ son un poco complicadas por la notación, sólo se ofrecen demostraciones informales usando matrices 3×3 . Con el objeto de facilitar su referencia, en esta sección se han asignado números a los teoremas enunciados.

TEOREMA 1 Si A es una matriz cuadrada de orden n , entonces $|A| = |A^T|$.

En el ejercicio 47 de la sección anterior, se demostró que $|A| = |A^T|$ si A es de orden 2. Suponer que A es de orden 3 dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$A^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_7 \\ a_2 & a_5 & a_8 \\ a_3 & a_6 & a_9 \end{bmatrix}.$$

Desarrollar $|A|$ a lo largo de la primera fila y $|A^T|$ a lo largo de la primera columna.

$$\begin{aligned} |A| &= a_1 \begin{vmatrix} a_5 & a_6 \\ a_8 & a_9 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_4 & a_6 \\ a_7 & a_9 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_4 & a_5 \\ a_7 & a_8 \end{vmatrix} \\ |A^T| &= a_1 \begin{vmatrix} a_5 & a_8 \\ a_6 & a_9 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_4 & a_7 \\ a_6 & a_9 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_4 & a_7 \\ a_5 & a_8 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Ya que los determinantes 2×2 correspondientes son iguales, $|A| = |A^T|$.

El teorema 1 permite concluir que cualquier propiedad de los determinantes que incluya filas también es cierta para las columnas.

TEOREMA 2 Si A es una matriz cuadrada de orden n , y B es una matriz formada al multiplicar todos los elementos de una fila (o columna) de A por una constante k , entonces $|B| = k|A|$.

Suponer que A es una matriz general de orden 3 dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$$

y B se forma a partir de A al multiplicar todos los elementos de la fila 1 por k .

$$B = \begin{bmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$$

Encontrar $|B|$ al desarrollar a lo largo de la primera fila.

$$\begin{aligned} |B| &= ka_1 \begin{vmatrix} a_5 & a_6 \\ a_8 & a_9 \end{vmatrix} - ka_2 \begin{vmatrix} a_4 & a_6 \\ a_7 & a_9 \end{vmatrix} + ka_3 \begin{vmatrix} a_4 & a_5 \\ a_7 & a_8 \end{vmatrix} \\ &= k \left(a_1 \begin{vmatrix} a_5 & a_6 \\ a_8 & a_9 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_4 & a_6 \\ a_7 & a_9 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_4 & a_5 \\ a_7 & a_8 \end{vmatrix} \right) \\ &= k(|A|) = k|A| \end{aligned}$$

Un argumento semejante demuestra el teorema para k multiplicada por alguna otra fila o columna.

EJEMPLO 1

Dado que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

y $|A| = 44$, encuentrese $|B|$ si

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ya que los elementos de la fila 1 de B son 3 veces los elementos de la fila 1 de A ,

$$|B| = 3|A| = 3(44) = 132.$$

El teorema 2 también puede usarse en orden inverso para factorizar un número común a todos los elementos de una fila o columna. Por ejemplo, considerar la matriz B indicada en el ejemplo 1. De haberse sabido que $|B| = 132$, entonces

$$|B| = 3|A| = 132$$

implicaría que $|A| = \frac{132}{3} = 44$.

TEOREMA 3 Si A es una matriz cuadrada de orden n y cada elemento de una fila (o columna) de A es 0, entonces $|A| = 0$.

Este teorema es una consecuencia inmediata del teorema 2 al factorizar el factor común 0 de los elementos de la fila (o columna) de $|A|$ que son todos 0.

EJEMPLO 2

Dado que

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -7 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

encontrar $|A|$.

Ya que los elementos en la segunda columna de A son todos 0, por el teorema 3, $|A| = 0$. Por supuesto, esto también podría verse en forma directa al desarrollar $|A|$ a lo largo de la segunda columna. \square

TEOREMA 4 Si A es una matriz cuadrada de orden n y B es una matriz formada al intercambiar dos filas (o dos columnas) de A , entonces

$$|B| = -|A|.$$

Este teorema se comprobó para determinantes 2×2 en los ejercicios 58 y 59 de la sección anterior. La prueba para determinantes 3×3 es en esencia la misma, pero la notación es un poco complicada.

EJEMPLO 3

Dado que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

y $|A| = 44$, demostrar que $|B| = -44$ si

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ya que B se forma a partir de A al intercambiar las filas segunda y tercera, $|B| = -|A| = -44$. \square

TEOREMA 5 Sea A una matriz cuadrada de orden n . Si los elementos correspondientes en las dos filas (o columnas) de A son iguales, entonces $|A| = 0$.

Sea A una matriz $n \times n$ con dos filas (o columnas) iguales. Si se intercambian estas dos filas (o columnas), la matriz resultante es la misma que A . Pero, por el teorema 4, el determinante de la nueva matriz, el cual es $|A|$, debe ser igual al negativo del determinante de la matriz original, $-|A|$. Así,

$$\begin{aligned}|A| &= -|A| \\ 2|A| &= 0 \\ |A| &= 0.\end{aligned}$$

EJEMPLO 4

Encontrar

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ -7 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ya que la segunda y tercera columnas son iguales, por el teorema 5 el determinante es 0. ■

TEOREMA 6 Sea A una matriz cuadrada de orden n . Si todos los elementos de una fila (o columna) de A son múltiplos de los elementos de otra fila (o columna) de A , entonces $|A| = 0$.

Considerar

$$A = \begin{bmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{bmatrix},$$

en la cual todos los elementos de la fila 1 son múltiplos con coeficiente k de los elementos de la fila 2. Entonces, por el teorema 2,

$$|A| = k \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{vmatrix}.$$

Ya que dos filas de este determinante son iguales, por el teorema 5 el determinante es 0. Así,

$$|A| = k(0) = 0.$$

EJEMPLO 5

Encontrar

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -15 & 7 \end{vmatrix}.$$

Ya que los elementos de la segunda columna son -5 veces los elementos correspondientes de la primera columna, por el teorema 6 el determinante es 0.

TEOREMA 7 Si A es una matriz cuadrada de orden n y B es una matriz formada al reemplazar una fila (o columna) de A por la suma de esa fila (o columna) más un múltiplo constante de otra fila (o columna), entonces $|B| = |A|$.

Suponer que A es de orden 3 dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix},$$

y

$$B = \begin{bmatrix} a_1 + ka_4 & a_2 + ka_5 & a_3 + ka_6 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}.$$

Desarrolla $|B|$ a lo largo de la primera fila.

$$\begin{aligned} |B| &= (a_1 + ka_4) \begin{vmatrix} a_5 & a_6 \\ a_8 & a_9 \end{vmatrix} - (a_2 + ka_5) \begin{vmatrix} a_4 & a_6 \\ a_7 & a_9 \end{vmatrix} + (a_3 + ka_6) \begin{vmatrix} a_4 & a_5 \\ a_7 & a_8 \end{vmatrix} \\ &= a_1 \begin{vmatrix} a_5 & a_6 \\ a_8 & a_9 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_4 & a_6 \\ a_7 & a_9 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_4 & a_5 \\ a_7 & a_8 \end{vmatrix} \\ &\quad + k \left(a_4 \begin{vmatrix} a_5 & a_6 \\ a_8 & a_9 \end{vmatrix} - a_5 \begin{vmatrix} a_4 & a_6 \\ a_7 & a_9 \end{vmatrix} + a_6 \begin{vmatrix} a_4 & a_5 \\ a_7 & a_8 \end{vmatrix} \right) \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_4 & a_5 & a_6 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} \\ &= |A| + k \cdot 0 \\ &= |A| \end{aligned}$$

Observar la similitud entre el método gaussiano para resolver sistemas lineales y el método indicado en el teorema 7. Éste se utiliza para transformar un determinante en determinantes equivalentes con elementos 0 en todas las posiciones excepto una en una fila o columna. Al desarrollar a lo largo de una fila o columna, es posible encontrar un determinante $n \times n$ si se calcula un solo determinante $(n-1) \times (n-1)$. El ejemplo siguiente explica el proceso.

EJEMPLO 6

Utilizar el teorema 7 para encontrar

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -5 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Cuando se utiliza el teorema 7 es conveniente seleccionar como referencia a un elemento igual a 1, si es posible. Supóngase que se escoge el 1 en la segunda fila y tercera columna y se fuerza a los elementos restantes de la tercera columna $(-1 \text{ y } 3)$ a ser 0.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ -17 & 5 & 0 \end{vmatrix} \\ = (-1) \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -17 & 5 \end{vmatrix} \\ = (-1)(30 + 17) = -47$$

11.6. Ejercicios

En los ejercicios 1-18 determinar el teorema presentado en esta sección que justifica cada enunciación. No se evalúen los determinantes.

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

$$4. \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$5. \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$6. \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$7. \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$8. \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$9. \begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 2 & 2 & 7 \\ 3 & 3 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

$$10. \begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 7 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$11. \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4-4 & -5-12 \end{vmatrix}$$

$$12. \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 5+14 \\ 1 & -2+2 \end{vmatrix}$$

$$13. \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$14. \begin{vmatrix} -4 & 12 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$15. \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & 15 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$16. \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$17. \begin{vmatrix} 5 & 0 & 7 \\ -6 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$18. \begin{vmatrix} 1 & -3+3 & 0 \\ 2 & -4+6 & 1 \\ -3 & 2-9 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

En los ejercicios 19-22 el determinante de la izquierda se transformó en el determinante de la derecha utilizando el teorema 7. Encontrar el valor de x .

$$19. \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & x \end{vmatrix}$$

$$20. \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$21. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ x & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$22. \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \\ x & 11 & 0 \end{vmatrix}$$

En los ejercicios 23-24 utilizar el teorema 7 para introducir dos ceros en la fila 1 de cada determinante.

$$23. \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$24. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

En los ejercicios 25-26 utilizar el teorema 7 para introducir dos ceros en la columna 2 de cada determinante.

$$25. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$26. \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

En los ejercicios 27-34 utilizar el teorema 7 para introducir dos ceros en una fila o columna de cada determinante y evaluar el determinante.

$$27. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$28. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$29. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$30. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & -2 & 4 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$31. \begin{vmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 2 & 3 & -3 \\ -6 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$32. \begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \\ -5 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$33. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$34. \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & -4 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

35. Demostrar sin evaluar que $(-1, 3)$ y $(2, 7)$ son soluciones de la ecuación

$$\begin{vmatrix} x & -2 & y \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

36. Demostrar sin evaluar que $(4, 1)$ y $(-2, 3)$ son soluciones de la ecuación

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ x & 4 & -2 \\ y & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

37. En el ejercicio 51 de la sección anterior se demostró que el área de un triángulo con vértices (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) es el valor absoluto de

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Si este determinante es nulo, ¿qué puede decirse acerca de los tres puntos?

38. Suponer que (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) son las coordenadas de tres puntos sobre la misma recta. ¿Cuál es el valor del determinante siguiente?

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

En los ejercicios 39-40 resolver cada sistema utilizando la regla de Cramer. Si se desea, usar el teorema 7 al evaluar los determinantes.

$$\begin{aligned} 39. \quad 2x - z &= -6 \\ 3y + 5z &= 29 \\ x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 40. \quad 3x - 5y + 7z &= 4 \\ 2x + 3y - 4z &= -6 \\ 4x - 7y - 8z &= -12 \end{aligned}$$

Los ejercicios 1-14 hacen referencia a las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = [1 \quad -3 \quad 4]$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

1. ¿Cuál es el orden de la matriz C ?
2. Dar la matriz nula que tenga el mismo orden que A .
3. Identificar el elemento a_{21} en la matriz A .
4. Dar la matriz $-B$.
5. Dar la matriz C^T .
6. Encontrar $A + B$.
7. Encontrar $A - B$.
8. Encontrar $-3C$.
9. Encontrar $2A - 3B$.
10. Encontrar $D \cdot E$.
11. Encontrar AC .
12. Encontrar CA .
13. Encontrar CF .
14. Encontrar $|C|$.
15. **Administración.** Island Rentals tiene dos agencias de alquiler de automóviles en la isla de Jamaica. Los números totales de automóviles compactos, intermedios y de lujo alquilados durante los meses de julio y agosto se dan en las matrices J y A .

	Compactos	Intermedios	De lujo	
$J =$	$\begin{bmatrix} 200 \\ 300 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 180 \\ 120 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 20 \\ 40 \end{bmatrix}$	Agencia 1 Agencia 2
$A =$	$\begin{bmatrix} 150 \\ 220 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 120 \\ 100 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 30 \\ 10 \end{bmatrix}$	Agencia 1 Agencia 2

Suponer que la ganancia promedio por concepto de alquiler es 80 dólares para un automóvil compacto, 120 dólares para uno intermedio y 150 dólares para uno de lujo. La matriz de la ganancia para tales alquileres está dada por

$$C = \begin{bmatrix} 80 \\ 120 \\ 150 \end{bmatrix}$$

- a) Encontrar la matriz que da los totales para los dos meses en cada categoría.
- b) Encontrar la matriz $\frac{1}{2}(J + A)$ y discutir lo que representa.
- c) Encontrar $[1 \ 1]J$ y discutir lo que representa.
- d) Encontrar $[1 \ 1](J + A)$ y discutir lo que representa.
- e) Encontrar $([1 \ 1](J + A)) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ discutir lo que representa.

- f) Encontrar JC e interpretar el resultado.
 g) Encontrar $(J + A)C$ e interpretar el resultado.
 h) Encontrar $[1 \ 1] \cdot ((J + A)C)$ e interpretar el resultado.

En los ejercicios 16-17 resolver cada sistema utilizando el método gaussiano.

16.
$$\begin{aligned} x - 3y &= 4 \\ 4x + 5y &= -1 \end{aligned}$$

17.
$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 7 \\ -x + 3y + 2z &= 8 \\ 3x - 4y - z &= -9 \end{aligned}$$

En los ejercicios 18-19 encontrar la inversa de cada matriz.

18.
$$\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

19.
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 20-21 utilizar el método de la inversa para resolver cada sistema. La inversa de la matriz de coeficientes se encontró en los ejercicios 18-19.

20.
$$\begin{aligned} -5x - 2y &= 7 \\ 3x + y &= -5 \end{aligned}$$

21.
$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 9 \\ x + 2z &= 8 \\ y - 5z &= -17 \end{aligned}$$

22. **Administración.** El Centro Recreativo y de Aptitudes Físicas realiza una campaña de membresía por tres meses. La cuota de membresía individual anual es de 300 dólares y la cuota de membresía familiar anual es de 400 dólares. Durante los tres meses, los propietarios se han fijado la meta de vender el número total de membresías y obtener el ingreso anual indicados en la tabla siguiente. ¿Cuántas membresías de cada tipo deben venderse en cada mes con la finalidad de lograr la meta?

	Enero	Febrero	Marzo
Membresías totales	30	50	65
Ingreso anual obtenido	\$10 000	\$17 000	\$23 000

Evaluar los determinantes en los ejercicios 23-24

23.
$$\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$$

24.
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

25. Encontrar el cofactor del elemento 4 en el determinante del ejercicio 24.

En los ejercicios 26-27 resolver cada sistema utilizando la regla de Cramer.

26.
$$\begin{aligned} -2x + y &= 9 \\ 3x + 4y &= 14 \end{aligned}$$

27.
$$\begin{aligned} 3x - y + z &= -12 \\ -2x + y + 3z &= 9 \\ x - y - 2z &= -6 \end{aligned}$$

Despejar x en los ejercicios 28-29.

28.
$$\begin{vmatrix} 2 & x \\ x & 5 \end{vmatrix} = 6$$

29.
$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

En los ejercicios 30-33 indicar el teorema que justifica cada enunciación. No se evalúen los determinantes.

30. $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 0$

31. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$

32. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$

33. $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$

34. Si el determinante $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ x & 5 \end{vmatrix}$ se obtuvo de $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$ utilizando el teorema 7 de la sección sobre propiedades de determinantes, encontrar el valor de x .

35. Evaluar el siguiente determinante introduciendo dos ceros en la columna 2.

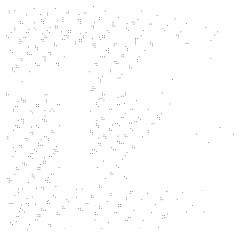
$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

36. Suponer que

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 & b_4 \end{bmatrix},$$

demostrar que

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix}.$$



Sucesiones, series y probabilidad

Los temas expuestos en este capítulo no sólo son de interés en álgebra superior, también constituyen un fundamento para el estudio de matemáticas más avanzadas. A continuación se presentan dos ejemplos de sus numerosas aplicaciones.

Banca

Gloria Bell recibe un préstamo de 1 000.00 dólares al 12% de interés compuesto anualmente. Si reembolsa el préstamo en su totalidad al final de tres años, ¿cuánto paga?

Biología

Una pareja planea tener dos hijos. Suponiendo que es igualmente probable que nazca niño o niña,

¿cuál es la probabilidad de que la pareja tenga dos niñas?, ¿cuál de que tenga dos niños? y ¿cuál de que tenga un niño y una niña?

Para resolver la primera de estas aplicaciones se usa una sucesión geométrica (véase el ejemplo 5, sección 9.3). La aplicación biológica ofrece una idea de la probabilidad de ciertos eventos (véase el ejemplo 5, sección 9.7).

En este capítulo primero se trata el tema de sucesiones y series y se introduce la inducción matemática. Posteriormente se procede a analizar las permutaciones y combinaciones antes de concluir con el teorema binomial y probabilidad.

Sucesiones

De manera informal, es común pensar en una sucesión como una colección de números arreglados en un orden particular. Esto significa que hay un primer número, un segundo número, un tercer número, y así sucesivamente; cada número en la sucesión corresponde a un número natural, esto sugiere la siguiente definición formal.

Sucesión infinita

Una **sucesión infinita** es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales.

Como ejemplo, considérese la función definida por

$$f(n) = 2n, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Los tres puntos significan que el modelo continúa. En vez de utilizar la notación de funciones habitual, por lo regular se escribe

$$x_n = 2n, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Es decir, una letra con un subíndice, tal como x_n , se usa en vez de $f(n)$. Para la sucesión definida por $x_n = 2n$,

$$x_1 = 2\left(\underset{\text{un}}{1}\right) = 2$$

$$x_2 = 2\left(\underset{\text{dos}}{2}\right) = 4$$

$$x_3 = 2\left(\underset{\text{tres}}{3}\right) = 6$$

$$x_4 = 2\left(\underset{\text{cuatro}}{4}\right) = 8$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$x_n = 2\left(\underset{\text{en}}{n}\right) = 2n$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

Una sucesión a menudo se define indicando su imagen. Así, la sucesión de arriba puede escribirse

$$2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots$$

Cada número se denomina término de la sucesión, y los términos se escriben en el orden en que crece n . Al término $2n$ se le llama **término n -ésimo** o **término general**. Nótese el uso de los tres puntos después del término general para indicar una sucesión infinita. En esta sección también se estudian las sucesiones finitas.

Sucesión finita

Una sucesión finita con m términos es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales de 1 a m .

Por ejemplo,

$$2, 4, 6, 8$$

indica una sucesión con cuatro términos y

$$3, 6, 9, \dots, 3n$$

es una sucesión con n términos. Los tres puntos indican la presencia de los términos entre 9 y $3n$.

El ejemplo que se presenta a continuación ilustra el uso de la notación para sucesiones.

EJEMPLO 1

Encontrar los primeros cuatro términos y el séptimo término de cada sucesión. Supóngase que el dominio en cada caso es el conjunto de los números naturales.

a) $x_n = \frac{1}{n+1}$. Usar $n = 1, 2, 3, 4$ y 7 en orden.

$$x_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$x_3 = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$$

$$x_4 = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}$$

$$x_7 = \frac{1}{7+1} = \frac{1}{8}$$

La sucesión completa puede escribirse

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots$$

b) $a_n = 2^n - 1$. Observar que a_n se usa en este ejemplo.

$$a_1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$a_2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$a_3 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$$

$$a_4 = 2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$$

$$a_7 = 2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$$

La sucesión infinita puede escribirse

$$1, 3, 7, 15, \dots, 2^n - 1, \dots$$

c) $b_n = (-1)^n(n^2 + 1)$

$$b_1 = (-1)^1(1^2 + 1) = (-1)(2) = -2$$

$$b_5 = (-1)^5(5^2 + 1) = (-1)(26) = -26$$

$$b = (-1)^3(2^2 + 1) = (-1)(10) = -10$$

$$b = (-1)^4(2^2 + 1) = (1)(17) = 17$$

$$b = (-1)^7(2^2 + 1) = (-1)(50) = -50$$

Observar que el factor $(-1)^n$ cambia de signo en cada término. Cuando n es impar $(-1)^n = -1$, y cuando n es par $(-1)^n = 1$.

Considerar la siguiente manera de definir una sucesión.

Sea $x_1 = 5$ y $x_{n+1} = 3x_n$. Entonces,

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 \\ x_2 &= x_{1+1} = 3x_1 = 15 \\ x_3 &= x_{2+1} = 3x_2 = 45 \\ x_4 &= x_{3+1} = 3x_3 = 135 \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= 3x_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Con x_1 dada y x_{n+1} definida en términos de x_n , es posible determinar la sucesión completa. Este método de definir una sucesión se denomina **definición recursiva**.

EJEMPLO 2

Sea $a_1 = -2$ y $a_n = 2a_{n-1} + 3$ para $n \geq 2$. Determinar a_2 , a_3 , a_4 y a_5 . Observe que esta fórmula recursiva a_n se define en términos de a_{n-1} para $n \geq 2$.

$$a_2 = 2a_{1+1} + 3 = 2a_1 + 3 = 2(-2) + 3 = -1$$

$$a_3 = 2a_{2+1} + 3 = 2a_2 + 3 = 2(-1) + 3 = 1$$

$$a_4 = 2a_{3+1} + 3 = 2a_3 + 3 = 2(1) + 3 = 5$$

$$a_5 = 2a_{4+1} + 3 = 2a_4 + 3 = 2(5) + 3 = 13$$

Series

Cada sucesión está asociada con una **serie**, la cual es la suma indicada de los términos de la sucesión. Por ejemplo, la sucesión

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13$$

está asociada con la serie

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13.$$

Obsérvese que los términos de una sucesión se separan con comas, pero la palabra *serie* significa que los términos se suman.

La letra griega Σ (sigma), denominada **símbolo de sumatoria**, se utiliza para abreviar una serie.

Notación de sumatoria

La suma de la sucesión $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ puede escribirse

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

donde k es el índice de la suma, 1 el límite inferior y n es el límite superior de la suma.

Por ejemplo, si $a_k = 2k$ y $n = 7$, se escribe

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^7 2k \\ &= 2(1) + 2(2) + 2(3) + 2(4) + 2(5) + 2(6) + 2(7) \\ &= 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 = 56. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3

Determinar el valor de cada serie.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{k=1}^5 (k^2 - k) &= (1^2 - 1) + (2^2 - 2) + (3^2 - 3) + (4^2 - 4) + (5^2 - 5) \\ &= 0 + 2 + 6 + 12 + 20 = 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sum_{k=2}^6 (-1)^k \sqrt{k} &= (-1)^2 \sqrt{2} + (-1)^3 \sqrt{3} + (-1)^4 \sqrt{4} + (-1)^5 \sqrt{5} + (-1)^6 \sqrt{6} \\ &= (1)\sqrt{2} + (-1)\sqrt{3} + (1)(2) + (-1)\sqrt{5} + (1)\sqrt{6} \\ &= \sqrt{2} - \sqrt{3} + 2 - \sqrt{5} + \sqrt{6} \end{aligned}$$

Observar en el ejemplo 3 b) que el límite inferior de la sumatoria es 2. En general, el límite inferior puede ser cualquier número entero no negativo menor o igual que el límite superior. Así,

$$\sum_{k=3}^8 a_k = a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8.$$

Si a_k es una constante, es decir $a_k = c$ para toda k , entonces

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n &= c + c + c + \cdots + c \\ &= nc. \end{aligned}$$

Esto origina el siguiente teorema.



Sumatoria de constantes

Si $a_k = c$ para toda k , entonces

$$\sum_{k=1}^n a_k = nc.$$

Así, si $a_k = 5$ para $k = 1, 2, \dots, 8$, entonces

$$\sum_{k=1}^8 a_k = \sum_{k=1}^8 5 = 8(5) = 40.$$

Por supuesto, es posible establecer otras propiedades que incluyen sumas de términos, diferencias de términos y productos de una constante por cada término de una serie.

Propiedades de la sumatoria

Si $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ y $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ son sucesiones y c es una constante entonces

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k,$$

$$\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k,$$

$$\sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k.$$

La prueba de este teorema involucra el uso repetido de las leyes conmutativa y asociativa, así como de la ley distributiva. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k. \end{aligned}$$

12.1. Ejercicios

En los ejercicios 1-8 dar los primeros cinco, el octavo y el duodécimo términos de cada sucesión.

1. $a_n = 4n$

2. $x_n = 3n + 1$

3. $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

4. $x_n = (n-1)(n+2)(n-3)$

5. $b_n = (-1)^n(n^2 + 5)$

6. $a_n = (-1)^{n+1}2^n$

7. $x_n = (-1)^n + (-1)^{n+1}$

8. $b_n = [1 + (-1)^n] \frac{n+1}{n}$

En los ejercicios 9-14 determinar los términos segundo, tercero, cuarto y quinto de cada sucesión.



9. $a_1 = 3; a_{n+1} = 4a_n$

10. $x_1 = -2; x_{n+1} = x_n + 3$

11. $b_1 = 8; b_n = -3b_{n-1}$

12. $a_1 = \frac{1}{2}; a_n = 2a_{n-1} - 3$

13. $x_1 = \frac{2}{3}; x_{n+1} = 9x_n + 5$

14. $b_1 = 2; b_{n+1} = b_n^2$

Escribir en forma completa cada serie en los ejercicios 15-20.

15. $\sum_{k=1}^5 x_k$

16. $\sum_{k=0}^4 a_k$

17. $\sum_{m=1}^4 \frac{1}{2m+1}$

18. $\sum_{m=0}^5 \pi m$

19. $\sum_{k=0}^6 \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$

20. $\sum_{k=1}^4 \frac{(-1)^k}{3k}$

En los ejercicios 21-26 escribir cada serie utilizando la notación sigma de suma.

21. $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$

22. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{n}{n+1}$

23. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

24. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

25. $2 + 4 + 6 + 8$

26. $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$

Evaluar cada serie en los ejercicios 27-38.

27. $\sum_{k=1}^6 (2k-1)$

28. $\sum_{k=1}^4 (k-1)^2$

29. $\sum_{i=0}^3 (i^2 + 1)$

30. $\sum_{k=3}^4 (-1)^{2k-2}$

31. $\sum_{m=1}^5 [1 + (-1)^m]m^2$

32. $\sum_{m=1}^3 [1 - (-1)^m] \frac{2m}{m+1}$

33. $\sum_{k=1}^{50} 3$

34. $\sum_{j=-4}^{24} 100$

35. $\sum_{k=1}^4 (k+1)(k-2)$

36. $\sum_{k=1}^3 \frac{k+1}{k+2}$

37. $\sum_{m=1}^5 \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right)$

38. $\sum_{m=1}^4 \left[\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2} \right]$

Comparar las series en cada uno de los ejercicios 39-40.

39. $\sum_{k=2}^5 (k+1)(k+2)$ y $\sum_{k=1}^4 (k+2)(k+3)$

40. $\sum_{m=3}^5 \frac{m-2}{m+1}$ y $\sum_{k=1}^3 \frac{k}{k+3}$

En los ejercicios 41-42 determinar el valor aproximado de a_{30} mediante el uso repetido de la tecla de raíz cuadrada de una calculadora.

41. $a_1 = 6; a_{n+1} = \sqrt{a_n}$

42. $a_1 = 8; a_n = \sqrt{a_{n-1}}$

Si $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ y $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, determínese cada suma en los ejercicios 43-48.

43. $\sum_{k=1}^6 k$

44. $\sum_{k=1}^6 k^2$

45. $\sum_{k=1}^n (k^2 + k)$

46. $\sum_{k=1}^n (k - k^2)$

47. $\sum_{k=1}^n (2k^2 + 3k)$

48. $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} - k \right)$

49. Demostrar que $\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k$.

50. Demostrar que $\sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k$.

Estadística. La media aritmética \bar{x} de una colección de datos está dada por $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$. Utilizar esta serie y las series indicadas en los ejercicios 43-48 para determinar \bar{x} para los datos proporcionados en los ejercicios 51-52.

51. $1, 2, 3, \dots, n$

52. $1, 4, 9, \dots, n^2$

La pendiente m y la ordenada al origen b e la recta de regresión de mínimos cuadrados $y = mx + b$ la cual es la que mejor se ajusta a una colección de n puntos (x_k, y_k) , pueden determinarse resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones.

$$nb + \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) m = \sum_{k=1}^n y_k$$

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right) b + \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) m = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

Utilice este sistema para encontrar la recta de regresión para los datos proporcionados en los ejercicios 53-54.

53. $(-1, 2), (1, -1), (5, -4)$

54. $(-4, -1), (-2, 2), (0, 1), (3, 5)$

En los ejercicios 55-56 utilícese la sucesión definida por

$$a_1 = a_2 = 1 \quad \text{y} \quad a_{k+1} = a_k + a_{k-1}.$$

Esta es una sucesión bien conocida en matemáticas; se llama sucesión de Fibonacci.

55. Determinar los primeros ocho términos de la sucesión.

56. Si $r_k = \frac{a_{k+1}}{a_k}$, determinar r_8 con tres cifras decimales. Según k aumenta, la sucesión r_k ofrece cada vez mejores aproximaciones de la *razón áurea*, la razón de los lados de un rectángulo que, se piensa, es el más placentero a la vista.

Evaluar los determinantes en los ejercicios 57-58.

57.
$$\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^3 k & \sum_{k=1}^4 k^2 \\ \sum_{k=3}^6 k & \sum_{k=4}^5 k^2 \end{vmatrix}$$

58.
$$\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^2 k^2 & -5 & 0 \\ \sum_{k=1}^5 k & -9 & \sum_{k=2}^3 5k \\ \sum_{k=1}^4 k(k+1) & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

Hay varios tipos especiales de sucesiones que tienen una amplia gama de aplicaciones. El primero de los dos tipos considerados en esta obra se ilustra en la siguiente sucesión:

$$1, \quad 4, \quad 7, \quad 10, \quad 13, \quad 16, \quad \dots$$

Observar que $4 - 1 = 3$, $7 - 4 = 3$, $10 - 7 = 3$, $13 - 10 = 3$, y $16 - 13 = 3$, es decir, los términos subsecuentes de la sucesión difieren por una constante.

Sucesión aritmética

Una **sucesión aritmética** o **progresión aritmética**, es una sucesión en la que los términos consecutivos difieren por una constante d , llamada la **diferencia común**.

Fórmula para a_n

Ya que $a_n - a_{n-1} = d$ para toda n , se tiene la fórmula recursiva

$$a_n = a_{n-1} + d.$$

Para las sucesiones aritméticas es posible desarrollar una fórmula para a_n en términos de a_1 , n y d . Considerar lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{término} &= a_1 = a_1 + d \\ \text{término} &= a_2 = a_1 + d = a_1 + d \\ \text{término} &= a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + d \\ \text{término} &= a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + d \\ &= a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + d \end{aligned}$$

Observar que el término n -ésimo a_n es el primer término a_1 más el producto de $n - 1$ por la diferencia común d . Así,

EJEMPLO 1

Encontrar los términos octavo y duodécimo de la sucesión aritmética 2, 7, 12, 17, 22, . . .

Se tiene $a_1 = 2$ y $d = 5$. Así,

$$\begin{aligned} a_8 &= a_1 + (8 - 1)d = 2 + (8 - 1)5 \\ &= 2 + 35 = 37 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} a_{12} &= a_1 + (12 - 1)d = 2 + (11)5 \\ &= 2 + 55 = 57. \end{aligned}$$

Obsérvese que la n en a_n es la misma que n en $(n - 1)$.

EJEMPLO 2

Encontrar x de modo que $x + 3$, $2x + 8$, y $4x + 15$ formen una sucesión aritmética de tres términos en el orden dado. Además, dar la sucesión.

Se usa el hecho de que la diferencia entre los términos sucesivos es igual a la diferencia común d .

$$(2x + 8) - (x + 3) = d \quad \text{y} \quad (4x + 15) - (2x + 8) = d$$

Igualar ambas expresiones puesto que cada una es igual a d .

$$(2x + 8) - (x + 3) = (4x + 15) - (2x + 8)$$

$$x + 5 = 2x + 7$$

$$-2 = x$$

Entonces $x + 3 = -2 + 3 = 1$, $2x + 8 = 2(-2) + 8 = 4$, $4x + 15 = 4(-2) + 15 = 7$, por lo que la sucesión aritmética deseada es 1, 4, 7.

Fórmulas para S_n

La suma de los primeros n términos en una sucesión aritmética también puede determinarse mediante una fórmula. Sea S_n la suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética. Entonces se tiene la serie

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \\ &= a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + \cdots + a_1 + (n-1)d. \end{aligned}$$

Invirtiendo el orden de la suma se obtiene

$$\begin{aligned} S_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 \\ &= a_1 + (n-1)d + a_1 + (n-2)d + a_1 + (n-3)d + \cdots + a_1. \end{aligned}$$

Se suman los términos correspondientes en ambas representaciones de S_n .

$$\begin{array}{r} S_n = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + \cdots + a_1 + (n-1)d \\ S_n = a_1 + (n-1)d + a_1 + (n-2)d + a_1 + (n-3)d + \cdots + a_1 \\ \hline 2S_n = + \cdots + \\ 2S_n = n[2a_1 + (n-1)d] \end{array}$$

EJEMPLO 3

Encontrar el término decimoquinto y la suma de los primeros quince términos de la sucesión aritmética $-2, 1, 4, 7, 10, \dots$.

Se tiene $a_1 = -2$ y $d = 3$, y debe calcularse a_{15} ($n = 15$) y S_{15} .

$$\begin{aligned} a_{15} &= a_1 + (n-1)d = -2 + (14)(3) = -2 + 42 = 40 \\ S_{15} &= \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{15}{2}[2(-2) + (14)3] \\ &= \frac{15}{2}[-4 + (14)3] = \frac{15}{2}[-4 + 42] \\ &= \frac{15}{2}[38] = 285 \end{aligned}$$

Una forma alternativa para S_n se deriva con facilidad de

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d].$$

Escribese $2a_1$ como $a_1 + a_1$ y obsérvese que $a_1 + (n-1)d = a_n$.

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n + (n-1)d]$$

En el ejemplo anterior, puesto que ya se había calculado $a_{15} = 40$, hubiera sido más fácil sustituirlo en la nueva fórmula para S_n .

$$S_{15} = \frac{15}{2}[a_1 + a_{15}] = \frac{15}{2}[-2 + 40] = \frac{15}{2}[38] = 285$$

El siguiente teorema resume las fórmulas que se han derivado para las sucesiones aritméticas.

Fórmulas para sucesiones aritméticas

En una sucesión aritmética el término general o n -ésimo está dado por

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

La suma de los primeros n términos está dada por

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n] \quad \text{o} \quad S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d].$$

EJEMPLO 4

Suponer que el término decimoquinto de una sucesión aritmética es 71 y que el término vigésimo primero es 101. Encontrar a_1 , d los primeros cinco términos y la suma de los primeros cinco términos. Se tiene

$$a_{15} = 71 = a_1 + (15-1)d = a_1 + 14d$$

$$\text{y} \quad a_{21} = 101 = a_1 + (21-1)d = a_1 + 20d.$$

Para encontrar a_1 y d , debe resolverse el siguiente sistema.

$$a_1 + 14d = 71$$

$$a_1 + 20d = 101$$

Restar la primera ecuación de la segunda.

$$6d = 30$$

$$d = 5$$

Sustituir luego este valor para d en la primera ecuación.

$$a_1 + 14 \cdot 5 = 71$$

$$a_1 = 71 - 70 = 1$$

Los primeros cinco términos son 1, 6, 11, 16, 21 y

$$S_5 = \frac{5}{2}[a_1 + a_5] = \frac{5}{2}[1 + 21] = \frac{5}{2}[22] = 55.$$

Medias aritméticas

Consideremos ahora una propiedad de las sucesiones aritméticas que es una generalización del promedio o la media aritmética de dos números. Obsérvese que al ser el promedio $\frac{a+b}{2}$ la posición media entre los números a y b en una recta numérica,

$$a, \frac{a+b}{2}, b$$

Es una sucesión aritmética. Se definen las **medias aritméticas** como todos los términos de una sucesión aritmética entre a_1 y a_n .

EJEMPLO 5

Insertar cuatro medias aritméticas entre los números 8 y -7 .

Ya que deben insertarse cuatro medias aritméticas entre 8 y -7 , habrá seis términos en la sucesión, con $a_1 = 8$ y $a_6 = -7$. Utilizar $a_n = a_1 + (n-1)d$ con $n = 6$, $a_1 = 8$, y $a_6 = -7$ para encontrar d .

$$\begin{aligned} a_6 &= a_1 + (6-1)d \\ -7 &= 8 + 5d \\ -3 &= d \end{aligned}$$

Ya que $8 + (-3) = 5$, $5 + (-3) = 2$, $2 + (-3) = -1$, y $-1 + (-3) = -4$, las cuatro medias aritméticas entre 8 y -7 son 5, 2, -1 , y -4 .

Hay muchas aplicaciones de las sucesiones aritméticas. Considérese el siguiente problema de depreciación.

EJEMPLO 6

Construcción

Una máquina excavadora se compra a 260 000 dólares. Suponer que se deprecia 7.0% el primer año, 6.5% el segundo año, 6.0% el tercer año y continúa de la misma manera durante diez años. si todas las depreciaciones se aplican al costo original, ¿cuál será el valor de la máquina excavadora en diez años?

Calcúlese la suma de las depreciaciones a través de diez años con $a_1 = 7.0$, $a_2 = 6.5$, $a_3 = 6.0$, . . . y $d = -0.5$.

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{10}{2}[2(7.0) + (10-1)(-0.5)] \\ &= 5[14.0 - 4.5] = 47.5 \end{aligned}$$

Así, el porcentaje total de depreciación en diez años es 47.5%, lo cual significa que el valor del equipo será entonces el 52.5% de su valor original.

$$0.525(260,000) = 136,500$$

La máquina excavadora tendrá un valor de 136 500 dólares en diez años.

12.2 Ejercicios

En los ejercicios 1-6 determinar si cada sucesión es o no aritmética. Si lo es, dar la diferencia común d .

1. 4, 8, 12, 16, ...
2. 4, 8, 10, 12, ...
3. 9, -1, -11, -21, ...
4. $\frac{2}{3}, 2, \frac{10}{3}, \frac{14}{3}, \dots$
5. 1, -1, 1, -1, ...
6. $\log 2, \log 4, \log 8, \log 16, \dots$

Encontrar los primeros seis términos de cada sucesión aritmética en los ejercicios 7-12.

7. $a_1 = 2$ y $d = 7$
8. $a_1 = 8$ y $d = -5$
9. $a_1 = -2$ y $a_2 = 5$
10. $a_1 = 2$ y $a_6 = -13$
11. $a_1 = \sqrt{3}$ y $d = 4\sqrt{3}$
12. $a_1 = \ln 10$ y $a_3 = \ln 1\,000$

13. Encontrar x de modo que x , $x + 4$, y $2x$ formen una sucesión aritmética de tres términos en el orden dado.

Determinar la sucesión.

14. Encontrar y de modo que $2y$, $3y + 7$, y $5y + 1$ formen una sucesión aritmética de tres términos en el orden dado.

Determinar la sucesión.

En los ejercicios 15-20 encontrar la suma indicada de la sucesión aritmética.

15. $-8, -1, 6, 13, \dots; S_{10}$
16. $a_1 = 3$ y $a_{10} = 57; S_{10}$
17. $a_4 = 6$ y $a_8 = 26; S_{12}$
18. $a_3 = 9$ y $a_5 = -1; S_{20}$
19. $\sum_{k=1}^6 (k + 2)$
20. $\sum_{k=1}^{30} (1 - 2k)$

En los ejercicios 21-32 se proporcionan algunos de los números n , a_1 , a_n , d y S_n . Encontrar los números no indicados.

21. $a_1 = 2$, $n = 17$, $d = 3$
22. $a_1 = 24$, $a_n = 3$, $n = 8$
23. $a_n = 27$, $S_n = 63$, $a_1 = -9$
24. $a_1 = -40$, $S_{21} = 210$
25. $a_1 = \frac{5}{3}$, $d = \frac{1}{6}$, $n = 12$
26. $a_1 = -7$, $d = 8$, $S_n = 225$
27. $a_{15} = 4$, $S_{15} = 30$
28. $a_1 = 10$, $a_n = -8$, $S_n = 7$
29. $a_1 = -9$, $a_7 = 21$
30. $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_5 = -\frac{1}{4}$
31. $a_1 = \log 7$, $d = \log 49$, $n = 5$
32. $a_1 = \ln 3$, $a_4 = \ln 81$

33. Insertar seis medias aritméticas entre 11 y 32.

34. Insertar ocho medias aritméticas entre 47 y 11.

35. ¿Cuántos enteros entre 39 y 146 son divisibles entre 5?

36. ¿Cuántos enteros entre -92 y 261 son divisibles entre 7?

37. Encontrar la suma de todos los enteros pares entre 1 y 201.

38. Encontrar la suma de todos los enteros divisibles entre 5 del 25 al 350.

39. Demostrar que la suma de la sucesión $2, 4, 6, \dots, 2n$ es $n^2 + n$.

40. Demostrar que la suma de los primeros n números naturales impares es n^2 .

Resolver.

41. **Consumo.** Un automóvil nuevo cuesta 8 400 dólares. Suponer que se deprecia 2.1% el primer año, 1.8% el segundo año, 1.5% el tercero y continúa de la misma manera durante 12 años. Si todas las depreciaciones se aplican al costo original, ¿cuál será el valor del automóvil (redondeado a dólares) en 12 años?
42. **Administración.** Un hombre ganó 3 500 dólares el primer año que trabajó. Si recibió un aumento de 750 dólares al final de cada año durante 20 años, ¿cuál fue su salario al año vigésimo primero de trabajo? ¿A cuánto ascendió su ingreso durante los primeros 21 años de trabajo?
43. **Recreación.** Un teatro tiene 40 filas con 20 butacas en la primera fila, 23 en la segunda fila, 26 en la tercera fila y así sucesivamente. ¿Cuántas butacas hay en el teatro?

44. Una colección de monedas de 5¢ está ordenada en un arreglo triangular con 15 monedas en la fila de base, 14 en la siguiente, 13 en la siguiente y así sucesivamente. Encontrar el valor de la colección.
45. **Banca.** Si una mujer deposita 1 dólar en un banco el primer día de septiembre, 2 dólares el segundo día de septiembre, 3 dólares el tercer día y así sucesivamente. ¿Cuánto dinero habrá depositado al final del mes?
46. **Silvicultura.** Hay 190 troncos para ser apilados de tal manera que un tronco esté en la parte más alta, dos en la segunda fila, tres en la tercera y así sucesivamente. ¿Cuántos troncos deben ponerse en la fila de base de la pila?
47. **Física.** Una piedra se deja caer desde la cima de un alto risco y cae 16 pies en el primer segundo, 48 pies en el segundo, 80 pies en el tercero y así sucesivamente. ¿Cuántos pies cae la piedra en el octavo segundo? (No se tome en cuenta la fricción.)
48. **Demografía.** La población de una ciudad está disminuyendo a una tasa de 500 habitantes por año. Si su población a principios de 1960 era de 20 135, ¿cuál era su población a principios de 1970?

En los ejercicios 49-50 determinar los términos cuarto y quinto de cada sucesión general.

49. $x_n = (-1)^{n+1} 3^{-n}$

50. $x_1 = 6$ y $x_{k+1} = 1 - x_k$

51. Escribir $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \cdots + \frac{n}{n^2 + 1}$ con la notación sigma de sumatoria.

52. Evaluar. $\sum_{k=2}^4 \frac{1}{3k-2}$

El segundo tipo de sucesión especial considerado se ilustra mediante

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

Para esta sucesión

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{a_4}{a_3} = \frac{1}{2}, \quad \frac{a_5}{a_4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{a_6}{a_5} = \frac{1}{2}, \quad \text{y así sucesivamente.}$$

Sucesión geométrica

Una **sucesión geométrica** o **progresión geométrica** es una sucesión con la propiedad de que

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

para toda n . el número r se denomina **razón común**.

Fórmula para a_n

Ya que $\frac{a_n}{a_{n-1}} = r$, entonces $a_n = a_{n-1}r$. Por lo que esta relación puede usarse con el objeto de obtener una fórmula para el término general o n -ésimo de una sucesión geométrica.

$$\begin{aligned}
 \text{término } 1 &= a = a_1 r \\
 \text{término } 2 &= a = a_1 \cdot r = a_1 r \\
 \text{término } 3 &= a = a_2 \cdot r = (a_1 r) \cdot r = a_1 r \\
 \text{término } 4 &= a = a_3 \cdot r = (a_1 r^2) \cdot r = a_1 r \\
 \text{término } 5 &= a = a_4 \cdot r = (a_1 r^3) \cdot r = a_1 r
 \end{aligned}$$

Observar que el término n -ésimo a_n es igual al primer término a_1 multiplicado por r^{n-1} . Así,

EJEMPLO 1

Encontrar los términos séptimo y décimo de la sucesión geométrica

$$-2, \quad 1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{8}, \dots$$

Se tiene $a_1 = -2$ y $r = -1/2$.

$$\begin{aligned}
 a_7 &= a_1 r^{7-1} = (-2) \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = -\frac{1}{32} \\
 a_{10} &= a_1 r^{10-1} = (-2) \left(-\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{256}
 \end{aligned}$$

Obsérvese que la n es a_n es la misma que n en el exponente $n - 1$.

EJEMPLO 2

Encontrar x de modo que $x - 3$, $x - 1$, y $2x + 1$ formen una sucesión geométrica de tres términos en el orden dado. Además, dar la sucesión.

Utilizar el hecho de que la razón de los términos sucesivos es igual a la razón común r .

$$\begin{aligned}
 \frac{x-1}{x-3} &= \frac{2x+1}{x-1} \\
 (x-1)(x-1) &= (x-3)(2x+1) \\
 x^2 - 2x + 1 &= 2x^2 - 5x - 3 \\
 0 &= x^2 - 3x - 4 \\
 0 &= (x+1)(x-4) \\
 x+1 &= 0 \quad \text{o} \quad x-4 = 0 \\
 x &= -1 \quad \quad \quad x = 4
 \end{aligned}$$

Si $x = -1$:

$$\begin{aligned}
 x - 3 &= -1 - 3 = -4 \\
 x - 1 &= -1 - 1 = -2 \\
 2x + 1 &= 2(-1) + 1 = -1;
 \end{aligned}$$

la sucesión es

$$-4, \quad -2, \quad -1 \quad \left(r = \frac{1}{2}\right).$$

Si $x = 4$:

$$\begin{aligned}
 x - 3 &= 4 - 3 = 1 \\
 x - 1 &= 4 - 1 = 3 \\
 2x + 1 &= 2(4) + 1 = 9;
 \end{aligned}$$

la sucesión es

$$1, \quad 3, \quad 9 \quad (r = 3).$$



Fórmulas para S_n

Ahora se procede a derivar una fórmula para calcular la suma de los primeros n términos de una sucesión geométrica. Sea S_n la suma de los primeros n términos. La serie es

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1}.$$

Se multiplica por r .

$$rS_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1} + a_1r^n$$

Se resta.

$$\begin{array}{r} S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1} \\ -rS_n = -a_1r - a_1r^2 - a_1r^3 - \cdots - a_1r^{n-2} - a_1r^{n-1} - a_1r^n \\ \hline S_n - rS_n = a_1 \qquad \qquad \qquad -a_1r^n \\ S_n(1-r) = a_1 - a_1r^n \end{array}$$

EJEMPLO 3

Encontrar el noveno término y la suma de los primeros nueve términos de la siguiente sucesión geométrica.

$$\frac{2}{5}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{20}, \quad \frac{1}{40}, \quad \dots$$

Se tiene $a_1 = 2/5$, $r = 1/2$, y debe calcularse a_9 ($n = 9$) y S_9 .

$$a_9 = a_1r^{9-1} = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{256}\right) = \frac{1}{640}$$

$$S_9 = \frac{a_1 - a_1r^9}{1 - r} = \frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^9}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9\right]}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{5}\left(1 - \frac{1}{512}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}\left(\frac{511}{512}\right)\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{511}{640}$$

Una forma alternativa para S_n se deriva con facilidad de

$$S_n = \frac{a_1 - a_1r^n}{1 - r}$$

al escribir $a_1r^n = r(a_1r^{n-1}) = ra_n$.

En el ejemplo anterior, puesto que ya se había calculado $a_9 = 1/640$, hubiera sido más fácil sustituirlo en la nueva fórmula para S_n .

$$S_9 = \frac{a_1 - ra_9}{1 - r} = \frac{\frac{2}{5} - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{640}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{5} - \frac{1}{1280}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{512}{1280} - \frac{1}{1280}}{\frac{1}{2}} = \frac{511}{640}$$



El siguiente teorema resume las fórmulas que se han derivado para las sucesiones geométricas.

Fórmulas para sucesiones geométricas

Para una sucesión geométrica el término general o n -ésimo está dado por

$$a_n = a_1 r^{n-1}.$$

La suma de los primeros n términos está dada por

$$S_n = \frac{a_1 - ra_n}{1 - r} \quad \text{o} \quad S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}.$$

EJEMPLO 4

Suponer que el tercer término de una sucesión geométrica es 27 y que el quinto término es 243. Encontrar a_1 , r y S_5 .

$$a_3 = a_1 r^{3-1} = a_1 r^2 = 27 \quad \text{y} \quad a_5 = a_1 r^{5-1} = a_1 r^4 = 243$$

Resolver la primera ecuación para a_1 , $a_1 = 27/r^2$, y sustituir en la segunda.

$$\begin{aligned} a_1 r^4 &= \frac{27}{r^2} \cdot r^4 = 27r^2 = 243 \\ r^2 &= 9 \\ r &= \pm\sqrt{9} = \pm 3 \end{aligned}$$

Se obtienen dos soluciones diferentes ya que hay dos valores para r .

$$\begin{array}{ll} a_1 r^2 = 27 & a_1 r^2 = 27 \\ a_1 (3)^2 = 27 & a_1 (-3)^2 = 27 \\ a_1 = 3 & a_1 = 3 \end{array}$$

La primera sucesión es 3, 9, 27, 81, 243, ...

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{a_1 - ra_5}{1 - r} \\ &= \frac{3 - 3 \cdot 243}{1 - 3} \\ &= \frac{3(1 - 243)}{-2} \\ &= 363 \end{aligned}$$

La segunda secuencia es 3, -9, 27, -81, 243, . . .

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{a_1 - ra_5}{1 - r} \\ &= \frac{3 - (-3)(243)}{1 - (-3)} \\ &= \frac{3(1 + 243)}{4} \\ &= 183 \end{aligned}$$

La suma en el primer caso, donde todos los signos son positivos, es mayor que la segunda suma, la cual incluye términos negativos.

Ahora se resolverá el primer problema aplicado que se presenta en la introducción de este capítulo.

EJEMPLO 5

Banca

Gloria Ávila recibió un préstamo de 1 000.00 dólares al 12% de interés compuesto anualmente. Si reembolsa en su totalidad el préstamo al final de tres años, ¿cuánto paga?

Al inicio del primer año	Al inicio del segundo año (o al final del primer año)	Al inicio del tercer año (o al final del segundo año)
$a_1 = 1\,000$	$a_2 = 1\,000 + 0.12(1\,000)$ $= [1 + 0.12](1\,000)$ $= (1.12)(1\,000)$	$a_3 = (1.12)(1\,000) + (0.12)(1.12)(1\,000)$ $= [1 + 0.12](1.12)(1\,000)$ $= (1.12)^2(1\,000)$

Para obtener el siguiente término de la sucesión, se multiplica el término precedente por 1.12. Así,

$$a_n = a_1(1.12)^{n-1}.$$

Para encontrar n debe considerarse el monto recibido a préstamo como el primer término de la sucesión

$$1\,000, 1\,000(1.12), 1\,000(1.12)^2, 1\,000(1.12)^3.$$

Hay cuatro términos ($n = 4$) en la sucesión para el periodo de tres años. Así,

$$a_4 = 1\,000(1.12)^{4-1} = 1\,000(1.12)^3 \approx 1\,404.93.$$

Ella debe pagar 1 404.93 dólares al final de los tres años.

Sucesiones infinitas

Si la definición de la suma de una sucesión se generaliza, puede encontrarse la suma de ciertas sucesiones geométricas infinitas. Escribese la fórmula para la suma como se indica:

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r} = \frac{a_1}{1 - r} - \frac{a_1}{1 - r} r^n.$$

Considérese el caso $r = \frac{1}{2}$.

$$S_n = \frac{a_1}{1 - r} - \frac{a_1}{1 - r} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Conforme n se hace grande, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ se hace pequeño y $\frac{a_1}{1 - r} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ se aproxima a cero. Así, la suma es aproximadamente $\frac{a_1}{1 - r}$. En realidad, puede demostrarse que para $|r| < 1$ la suma de todos los términos de

una sucesión geométrica infinita es exactamente $\frac{a_1}{1-r}$. No hay suma alguna para una sucesión geométrica infinita con razón común r que satisfaga $|r| \geq 1$.

Suma de una sucesión geométrica infinita

Una sucesión geométrica infinita, cuyo primer término es a_1 y cuya razón común es r que satisface $|r| < 1$, tiene una suma dada por

$$S = \frac{a_1}{1-r}.$$

Considerar la sucesión infinita

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

La serie infinita correspondiente

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

puede evaluarse al notar que $a_1 = 1$, $r = 1/2$, y $|r| = 1/2 < 1$ y luego usando la fórmula para S .

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Así, la suma de todos los términos de la sucesión infinita es exactamente 2.

EJEMPLO 6

Encontrar los primeros cinco términos de una sucesión geométrica infinita con $a_1 = 5/2$ y $S = 5$. Sustituir en la fórmula.

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

$$= \frac{5}{1-r}$$

$$5(1-r) = \frac{5}{2}$$

$$5 - 5r = \frac{5}{2}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

Ya que $|r| < 1$, hay una sucesión infinita con las condiciones establecidas y los primeros cinco términos son

$$\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}, \frac{5}{32}.$$

En el ejemplo 6, de haber sido una r tal que $|r| \geq 1$, no hubiera habido una sucesión que satisficiera las propiedades señaladas.

EJEMPLO 7

Convertir $2.\overline{34}$ a una fracción.

Primero se escribe $2.\overline{34}$ como sigue:

$$\begin{aligned} 2.\overline{34} &= 2.3 + 0.04 + 0.004 + 0.0004 + \cdots \\ &= \frac{23}{10} + (0.04 + 0.004 + 0.0004 + \cdots). \end{aligned}$$

La serie $(0.04 + 0.004 + 0.0004 + \cdots)$ es una serie geométrica infinita donde $a_1 = 0.04$ y $r = 0.1$.

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_1}{1-r} = \frac{0.04}{1-0.1} = \frac{0.04}{0.9} = \frac{4}{90} \\ 2.\overline{34} &= \frac{23}{10} + \frac{4}{90} = \frac{207}{90} + \frac{4}{90} = \frac{211}{90} \end{aligned}$$

EJEMPLO 8

Física

Un balón rebota $\frac{4}{5}$ partes de la longitud que recorre al caer. Si el balón se deja caer desde una altura de 40 ft, ¿qué distancia recorre (hacia arriba y hacia abajo) antes de quedar en reposo?

Utilizar una serie geométrica infinita para aproximar la distancia total viajada. Hacer un dibujo que describa la situación (véase la figura 1).

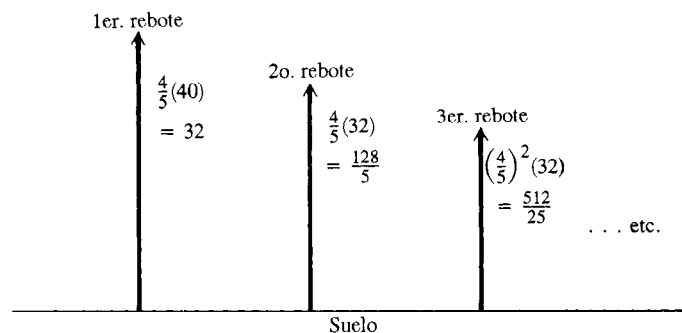


Figura 1. Rebotes del balón.

Se debe encontrar la siguiente suma.

$$\begin{aligned} &40 + 32 + 32 + \frac{128}{5} + \frac{128}{5} + \frac{512}{25} + \frac{512}{25} + \cdots \\ &= 40 + 2 \left[32 + \frac{128}{5} + \frac{512}{25} + \cdots \right] \end{aligned}$$

Ya que existen dos de cada número después de la primera caída, simplemente duplicar la suma de las distancias recorridas hacia arriba en los rebotes, a partir de ese punto para obtener la suma de las distancias

totales recorridas hacia arriba, en los rebotes, y hacia abajo, en las caídas posteriores. Luego, aplicar la fórmula sólo a la serie entre corchetes,

$$32 + \frac{128}{5} + \frac{512}{25} + \cdots,$$

con $a_1 = 32$ y $r = 4/5$.

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{32}{1-\frac{4}{5}} = \frac{32}{\frac{1}{5}} = 5 \cdot 32 = 160$$

Entonces, $40 + 2[32 + 128/5 + 512/25 + \cdots] = 40 + 2[160] = 40 + 320 = 360$. La distancia total recorrida por el balón es 360 ft.

12.3. Ejercicios

Encontrar los primeros seis términos de cada sucesión geométrica en los ejercicios 1-6.

1. $a_1 = 4$ y $r = 2$

2. $a_1 = -\frac{1}{8}$ y $r = -2$

3. $a_1 = -16$ y $r = -\frac{1}{2}$

4. $a_1 = 64$ y $a_6 = \frac{1}{16}$

5. $a_1 = 25$ y $S = 125$

6. $a_1 = 4$ y $S = -7$

7. Encontrar x de modo que $x + 7$, $x - 3$, y $x - 8$ formen una sucesión geométrica de tres términos en el orden dado. Determinar la sucesión.

8. Encontrar y de modo que $2y + 5$, $y + 7$, y $3y - 7$ formen una sucesión geométrica de tres términos en el orden dado. Determinar la sucesión.

En los ejercicios 9-14 encontrar la suma indicada de cada sucesión geométrica. El símbolo $\sum_{k=1}^{\infty}$ representa una serie infinita.

9. $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \dots; S_9$

10. $a_1 = -\frac{1}{9}$ y $a_6 = -27; S_6$

11. $a_3 = \frac{1}{6}$ y $a_5 = \frac{1}{24}; S_5$

12. $a_2 = 2$ y $a_3 = 1; S$

13. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k$

14. $\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k}$

En los ejercicios 15-20 se proporcionan algunos de los números n , a_1 , a_n , r y S_n . Encontrar los números no indicados.

15. $a_1 = 2$, $n = 6$, $r = 2$

16. $a_1 = 1$, $r = -2$, $a_n = 64$

17. $r = \frac{1}{2}$, $a_9 = 1$

18. $a_1 = 2$, $a_n = 32$, $S_n = 62$

19. $a_7 = \frac{1}{5}$, $r = \frac{1}{5}$

20. $r = -2$, $S_n = -63$, $a_n = -96$

Los términos entre a_1 y a_n de una sucesión geométrica se denominan **medias geométricas** de a_1 y a_n . Utilizar esta definición en los ejercicios 21-22.

21. Insertar cuatro medias geométricas entre 5 y -160 .

22. Insertar cuatro medias geométricas entre -8 y $\frac{1}{4}$.

En los ejercicios 23-30 encontrar la suma de cada sucesión geométrica infinita.



23. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ 24. $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$ 25. $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$
 26. $\frac{1}{81}, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \dots$ 27. $-14, 8, -\frac{32}{7}, \frac{128}{49}, \dots$ 28. $2, \frac{2}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \dots$
 29. $15, 1.5, 0.15, 0.015, \dots$ 30. $40, 28, 19.6, 13.72, \dots$

En los ejercicios 31-38 convertir cada decimal a una fracción.

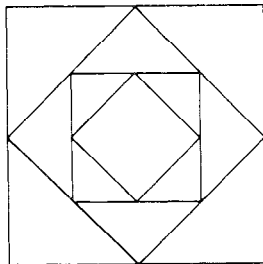
31. $0.\overline{3}$ 32. $0.\overline{8}$ 33. $0.\overline{21}$ 34. $0.\overline{36}$
 35. $0.\overline{123}$ 36. $2.\overline{6}$ 37. $2.\overline{15}$ 38. $4.\overline{23}$
 39. Demostrar que $0.999\ldots = 1$. 40. Demostrar que $4.\overline{9} = 5$.

Resolver.

41. **Consumo.** Un automóvil nuevo que cuesta 6 400 dólares se deprecia 20% de su valor cada año. ¿Cuánto valdrá el automóvil después de seis años?
42. **Consumo.** Un automóvil nuevo que cuesta 5 800 dólares se deprecia 25% de su valor cada año. ¿Cuánto valdrá el automóvil después de cinco años?
43. **Banca.** Lorena Vázquez recibe un préstamo de 2 000.000 dólares al 11% de interés compuesto anualmente. Si reembolsa el préstamo en su totalidad al final de cuatro años, ¿cuánto paga?
44. **Banca.** Rafael Méndez recibe un préstamo de 1 000.00 dólares al 14% de interés compuesto anualmente. Si reembolsa el préstamo en su totalidad al final de cinco años, ¿cuánto paga?
45. **Economía.** A Luis le ofrecieron un ejemplo durante el mes de junio (30 días) y le dijeron que le pagarían 1¢ al final del primer día, 2¢ el segundo, 4¢ el tercer día y así sucesivamente, duplicando el salario de cada día anterior. Sin embargo, Luis rechazó el empleo pensando que la paga era inferior. ¿Debió haber aceptado el empleo? ¿Por qué?
46. **Economía.** Héctor Cano recibió 5 000 dólares el día de su nacimiento y en cada fecha de cumpleaños recibe $\frac{3}{5}$ partes del monto recibido el año anterior. ¿Aproximadamente cuánto recibirá Héctor a lo largo de su vida, suponiendo una prolongada existencia?
47. **Física.** El extremo de un péndulo barre un arco de 20 cm en su primer balanceo. Si en cada balanceo subsiguiente la distancia recorrida es $\frac{4}{5}$ de la longitud del balanceo precedente, ¿cuál es la distancia recorrida por el extremo al final del cuarto arco?
48. **Física.** El extremo de un péndulo oscila de manera que barre un arco de 12 in de longitud y en cada balanceo subsiguiente la distancia recorrida es $\frac{7}{8}$ de la longitud del balanceo precedente. ¿Cuál es la distancia total recorrida por el extremo del péndulo?
49. **Física.** Una pelota se deja caer desde una altura de 12.0 ft. Si en cada rebote se eleva a una altura de $\frac{3}{4}$ la distancia desde la cual cayó, ¿qué distancia, hacia arriba y hacia abajo, habrá recorrido la pelota cuando golpee el suelo por octava vez?
50. **Física.** Un balón se deja caer desde una altura de 18.0 ft. Si en cada rebote se eleva a una altura de $\frac{2}{3}$ la distancia desde la cual cayó, ¿qué distancia, hacia arriba y hacia abajo, habrá recorrido el balón cuando golpee el suelo por sexta vez?
51. **Física.** Una pelota se deja caer desde una altura de 15 m y siempre rebota $\frac{3}{5}$ de altura de la caída previa. ¿Qué distancia recorre, hacia arriba y hacia abajo, antes de quedar en reposo?
52. **Física.** Una pelota de tenis de mesa se deja caer desde una altura de 32 ft y siempre rebota $\frac{1}{4}$ de la distancia de la caída previa. ¿Qué distancia rebota la séptima vez?
53. **Física.** Un balón se deja caer desde una altura de 40 ft y siempre rebota $\frac{1}{2}$ de la longitud de la caída precedente.
 a) ¿Cuál es la longitud del quinto rebote? b) ¿Cuál es la distancia total recorrida, hacia arriba y hacia abajo, cuando

el balón golpea el suelo por sexta vez? c) ¿Cuál es la distancia total recorrida, hacia arriba y hacia abajo, si se deja que el balón continúe rebotando hasta que quede en reposo? d) ¿Cómo podría aproximarse la distancia total recorrida cuando el balón golpea el suelo por centésima vez?

- 54. Recreación.** Sobre un columpio, una niña atraviesa un arco de 22 ft. En cada vaivén subsiguiente, atraviesa un arco que es de $\frac{5}{7}$ la longitud del arco previo. ¿Qué distancia recorre antes de quedar en reposo?
- 55. Demografía.** La población de un pueblo aumenta a una tasa del 20% cada año. Si su población actual es de 1 250 habitantes, ¿cuál será su población dentro de siete años?
- 56. Geometría.** Un cuadrado tiene una área de 64 in^2 (cada lado mide 8 in). Un segundo cuadrado se construye al conectar en orden los puntos medios de los lados del primer cuadrado, un tercer cuadrado al unir en orden los puntos medios de los lados del segundo cuadrado y así sucesivamente. Calcular la suma de las áreas de todos estos cuadrados.



Problemas de repaso

En los ejercicios 57-58 encontrar los primeros cinco términos de la sucesión aritmética.

57. $a_1 = 7$ y $d = -4$

58. $a_1 = -12$ y $a_6 = 23$

En los ejercicios 59-60 encontrar la suma de los primeros nueve términos de la sucesión aritmética.

59. $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

60. $a_1 = -18$ y $a_9 = 38$

61. Insertar cuatro medias aritméticas entre 12 y -13 .

62. Encontrar la suma de los enteros divisibles entre 12 colocados entre -111 y 25 .

63. Recreación. Un teatro tiene 50 filas con 15 butacas en la primera fila, 17 en la segunda, 19 en la tercera y así sucesivamente. ¿Cuántas butacas hay en el teatro?

64. Demografía. La población de un lugar aumentan a una tasa de 700 habitantes por año. Si su población actual es de 1 250, ¿cuál será su población dentro de siete años?

Verificación de la comprensión

Ciertas proposiciones o fórmulas que involucren enteros positivos, tales como las fórmulas de suma para sucesiones aritméticas o geométricas, pueden demostrarse mediante el método llamado **introducción matemática**. El proceso se utiliza cuando cada entero positivo de origen a una proporción particular que debe establecerse. Por ejemplo, podría desearse demostrar que la suma de los primeros n enteros positivos es igual a $\frac{1}{2}n(n+1)$, es decir,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Por sustitución, es posible comprobar que la fórmula es correcta para algunos de los primeros enteros positivos.

<i>Sustitución</i>	<i>Lado izquierdo</i>	<i>Lado derecho</i>
$n = 1$	$1 = 1$	$\frac{1}{2}(1)(1 + 1) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$
$n = 2$	$1 + 2 = 3$	$\frac{1}{2}(2)(2 + 1) = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$
$n = 3$	$1 + 2 + 3 = 6$	$\frac{1}{2}(3)(3 + 1) = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$
$n = 4$	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$	$\frac{1}{2}(4)(4 + 1) = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$
$n = 5$	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$	$\frac{1}{2}(5)(5 + 1) = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15$

Aunque se sabe que la fórmula es cierta para los primeros cinco enteros positivos, no se ha establecido la veracidad para cada entero positivo posible. En muchas situaciones una proposición puede ser cierta para algunos de los primeros enteros positivos, pero falsa para el total de enteros. Por ejemplo, 1, 2, 3, 4, 5 y 6 son divisores de 60. Sin embargo, concluir que todos los enteros son divisores de 60 sería incorrecto ya que 7, por ejemplo, no lo es.

En general, el método de demostración por inducción matemática incluye tres partes.

1. *Verificación* de verdad para un valor particular. Por lo regular, se demuestra que la proposición es cierta cuando $n = 1$.
2. *Inducción*, o extensión de verdad de un valor particular al siguiente. En este paso se demuestra que la proposición es cierta para el siguiente entero positivo ($k + 1$) bajo la **hipótesis de inducción** de que es cierta para un entero positivo determinado (k). Es decir, se supone que la proposición es cierta cuando $n = k$, y se demuestra que también es cierta cuando $n = k + 1$ (el siguiente entero después de k).
3. *Conclusión* de la verdad de la proposición para todos los enteros positivos. En esencia, esta parte combina los resultados de las primeras dos partes. Una vez que se ha demostrado que el resultado es verdadero para un valor particular de n ($n = 1$ por ejemplo), por el paso de inducción se sabe que es verdadero para el valor siguiente de n ($n = 2$). Luego, por inducción otra vez, se sabe que es verdadero para el valor siguiente de n ($n = 3$). Ya que este proceso puede continuarse indefinidamente, se sabe que el resultado es verdadero para cualquier entero positivo n .

Una demostración por inducción matemática podría compararse con el juego de niños de hacer caer las fichas de dominó. Las fichas pueden colocarse de modo que si una cae ($n = k$), la ficha siguiente también caerá ($n = k + 1$), y hará caer a la próxima. Así, si la primera ficha ($n = 1$) recibe un pequeño empujón, se derrumbará la colección completa de fichas.

Principio de inducción matemática

Sea $S(n)$ una proposición que involucra al entero positivo n . Entonces $S(n)$ es cierta para todo entero positivo, siempre que:

1. $S(n)$ sea cierta para $n = 1$. ($S(1)$ es cierta).
2. Bajo la suposición de que $S(n)$ es cierta para $n = k$, puede demostrarse que $S(n)$ es cierta para $n = k + 1$. (si $S(k)$ es cierta, entonces $S(k + 1)$ es cierta).

EJEMPLO 1

Demostrar que

$$S(n): 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

es verdadera para todo entero positivo n .

Verificación: Es obvio que $S(n)$ es verdadera cuando $n = 1$, ya que en este caso se vuelve

$$S(1): 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 + 1) = 1.$$

Inducción: Suponer que la proposición es verdadera para $n = k$.

$$S(k): 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (k + 1) \quad \text{Hipótesis de inducción.}$$

Debe demostrarse que la proposición es verdadera para $n = k + 1$. es decir, debe demostrarse que

$$S(k + 1): 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{1}{2} \cdot (k + 1)[(k + 1) + 1]$$

es verdadera. El lado izquierdo de esta ecuación puede reescribirse como

$$[1 + 2 + 3 + \cdots + k] + (k + 1).$$

Sustituir $(1/2) \cdot k \cdot (k + 1)$ por $[1 + 2 + 3 + \cdots + k]$.

$$\begin{aligned} [1 + 2 + 3 + \cdots + k] + (k + 1) &= \left[\frac{1}{2} \cdot k \cdot (k + 1) \right] + (k + 1) \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot k + 1 \right)(k + 1) && \text{Se factoriza } k + 1 \\ &= \left(\frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \cdot 2 \right)(k + 1) && 1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \\ &= \frac{1}{2}(k + 2)(k + 1) && \text{Se factoriza } \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(k + 1)(k + 2) && \text{Se conmuta} \\ &= \frac{1}{2}(k + 1)[(k + 1) + 1] \end{aligned}$$

Así, haciendo uso de la hipótesis de inducción, se ha demostrado que

$$S(k + 1): 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{1}{2}(k + 1)[(k + 1) + 1]$$

es verdadera; es decir, que $S(n)$ es verdadera cuando $n = k + 1$.

Conclusión: Ya que $S(n)$ es verdadera para $n = 1$ (por verificación), es verdadera para $n = 2$ (por inducción). Asimismo, ya que $S(n)$ es cierta para $n = 2$, es verdadera para $n = 3$ (por inducción). Ya que este proceso puede extenderse de manera indefinida, puede afirmarse que $S(n)$ es verdadera para todo entero positivo n . ■

En una demostración por inducción matemática es habitual que la conclusión se abrevie un poco como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2

Demostrar que

$$S(n): 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$$

es verdadera para todo entero positivo n .

Verificación: Para $n = 1$, el lado izquierdo es 2 (sólo hay un término en el lado izquierdo) y el lado derecho es $1(1 + 1) = 2$. Así, $S(n)$ es verdadera para $n = 1$.

Inducción: Suponer que $S(n)$ es verdadera para $n = k$. es decir, suponer que

$$S(k): 2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k(k + 1) \quad \text{hipótesis de inducción}$$

es verdadera. Enseguida, debe demostrarse que $S(n)$ es verdadera para $n = k + 1$ es decir, debe demostrarse que

$$S(k + 1): 2 + 4 + 6 + \cdots + 2(k + 1) = (k + 1)[(k + 1) + 1]$$

es verdadera. Pero, en realidad, el lado izquierdo de esta ecuación es

$$[2 + 4 + 6 + \cdots + 2k] + 2(k + 1)$$

el cual se transforma en

$$[k(k + 1)] + 2(k + 1)$$

cuando se sustituye $(2 + 4 + 6 + \cdots + 2k)$ por $k(k + 1)$. Al factorizar $(k + 1)$, se obtiene

$$(k + 2)(k + 1)$$

lo cual es igual a

$$(k + 1)[(k + 1) + 1].$$

Así, haciendo uso de la hipótesis de inducción, se ha demostrado que

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2(k + 1) = (k + 1)[(k + 1) + 1].$$

Conclusión: Por el principio de inducción matemática, $S(n)$ es verdadera para todo entero positivo n . ■

EJEMPLO 3

Demostrar que

$$S(n): \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

es verdadera para todo entero positivo n .

Verificación: para $n = 1$,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b} = \frac{a^1}{b^1}.$$

Así, $S(n)$ es cierta para $n = 1$.

Inducción: Suponer que $S(n)$ es cierta para $n = k$. entonces,

Hipótesis de inducción:

$$S(k): \left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}.$$

Ahora se debe demostrar que $S(n)$ es verdadera cuando $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^{k+1} &= \left(\frac{a}{b}\right)^k \left(\frac{a}{b}\right) \\ &= \frac{a^k}{b^k} \cdot \frac{a}{b} \\ &= \frac{a^k \cdot a}{b^k \cdot b} = \frac{a^{k+1}}{b^{k+1}} \end{aligned}$$

Conclusión: Por el principio de inducción matemática, $S(n)$ es verdadera para todo entero positivo n .

EJEMPLO 4

Demostrar que

$$S(n): n < 3^n$$

es verdadera para todo entero positivo n .

Verificación: Es obvio que para $n = 1$, $1 < 3^1 = 3$ por lo tanto, $S(1)$ es verdadera.

Inducción: Suponer que $S(n)$ es verdadera para $n = k$ es decir, suponer que

$$S(k): k < 3^k$$

es verdadera. A continuación, debe demostrarse que $S(n)$ es verdadera para $n = k + 1$ es decir, debe demostrarse que

$$S(k + 1): k + 1 < 3^{k+1}$$

es verdadera. Ya que $k < 3^k$ se sabe que

$$\begin{aligned} 3 \cdot k &< 3 \cdot 3^k \\ 3k &< 3^{k+1}. \end{aligned}$$

Pero, ya que k es un entero positivo,

$$1 \leq k$$

por lo que

$$k + 1 \leq k + k$$

$$k + 1 \leq 2k.$$



Además, $2 < 3$
 $2k < 3k$.

Combinando estos hechos se tiene

$$k + 1 \leq 2k \leq 3k < 3^{k+1}.$$

En consecuencia, $S(n)$ es verdadera para $n = k + 1$.

Conclusión: Por el principio de inducción matemática, $S(n)$ es verdadera para todo entero positivo n . *

En todos los ejemplos, las proposiciones han sido verdaderas para toda $n \geq 1$. Algunas proposiciones no son verdaderas para $n = 1$ pero son verdaderas para $n \geq m$ con $m > 1$. Por ejemplo, $2^n > 10$ es verdadera para toda $n \geq 4$. En casos como este, demuéstrese que $S(m)$ es verdadera y considérese la hipótesis de inducción para $k \geq m$.

12.4. Ejercicios

En los ejercicios 1-6 las proposiciones no son ciertas para toda n . Demostrar que $S(1)$, $S(2)$ y $S(3)$ son verdaderas, luego encontrar el primer entero positivo n para el cual $S(n)$ es falsa.

1. $n < 5$
2. $n > n^2 - 100$
3. n divide a 420
4. $n^2 - n + 5$ es primo
5. $\frac{|n-10|}{n-10} = -1$
6. $n^3 - 6n^2 + 11n - 6 = 0$

En los ejercicios 7-12 escribir en forma completa $S(1)$, $S(k)$ y $S(k+1)$.

7. $S(n)$: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$
8. $S(n)$: $3 + 6 + 9 + \cdots + 3n = \frac{3}{2}n(n+1)$
9. $S(n)$: $n < 2^n$
10. $S(n)$: $n < n+1$
11. $S(n)$: $(ab)^n = a^n b^n$
12. $S(n)$: 5 divide a $6^n - 1$

En los ejercicios 13-18 demostrar que cada proposición presentada en los ejercicios 7-12 es verdadera para todos los enteros positivos n .

13. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$
14. $3 + 6 + 9 + \cdots + 3n = \frac{3}{2}n(n+1)$
15. $n < 2^n$
16. $n < n+1$
17. $(ab)^n = a^n b^n$
18. 5 divide a $6^n - 1$

En los ejercicios 19-24 demostrar que cada enunciación es cierta para todos los enteros positivos n .

19. $5 + 10 + 15 + \cdots + 5n = \frac{5}{2}n(n+1)$
20. $1 + 5 + 9 + \cdots + (4n-3) = n(2n-1)$
21. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$
22. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$
23. $2 \leq 2^n$
24. $2n \leq 2^n$

$$25. 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$$

$$26. 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$$

$$27. \left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1$$

$$28. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$29. 1 + 2n < 3^n, n \geq 2$$

$$30. n + 7 < n^2, n \geq 4$$

$$31. 2 \text{ divide a } n^2 + n$$

$$32. x - 1 \text{ divide a } x^{2n} - 1 \text{ if } x \neq 1$$

$$33. a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$34. a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$$

Para repaso

En los ejercicios 35-36 encontrar los primeros cuatro términos de la sucesión geométrica.

$$35. a_1 = -21 \text{ y } r = -\frac{1}{7}$$

$$36. a_1 = 32 \text{ y } a_6 = 1$$

En los ejercicios 37-38 encontrar la suma de los primeros siete términos de la sucesión geométrica.

$$37. -8, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \dots$$

$$38. 9, 36, 144, 576, \dots$$

39. Conviértase $3.\overline{625}$ a fracción.

40. **Física.** El extremo de un péndulo oscila de tal manera que barre un arco de 18 in de longitud y en cada balanceo subsiguiente la longitud del arco recorrido es $7/9$ de la longitud del balanceo anterior. ¿Cuál es la distancia total recorrida por el extremo del péndulo?

12.5. PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

Técnicas de conteo

Las técnicas para contar el número de maneras en que una colección de objetos o actos puede arreglarse, ordenarse, combinarse, escogerse u ocurrir en sucesión se llaman **álgebra combinatoria**. Como ejemplo, considérese a una estudiante que desea tomar tres cursos; debe seleccionar un curso de matemáticas ya sea de álgebra (A) o trigonometría (T); un curso de inglés ya sea de escritura técnica (E), literatura (L) o retórica (R), y un curso de ciencia ya sea de química (Q), geología (G) o física (F). El **diagrama de árbol** presentado en la figura 2 ayuda a contar el número de maneras en que la estudiante puede seleccionar los tres cursos.

Cada rama del árbol representa una selección posible de cursos. Por ejemplo A, L, G significa que álgebra, literatura y geología fueron los cursos seleccionados. Observar que hay 18 posibles selecciones. Pero $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ es el producto del número de cursos de matemáticas, el número de cursos de inglés y el número de cursos de ciencias. Este ejemplo conduce al **principio fundamental de conteo**.

Principio fundamental de conteo

Si un evento E_1 puede ocurrir de m_1 maneras, E_2 de m_2 maneras, E_3 de m_3 maneras etcétera, entonces el número total de maneras en que E_1, E_2, \dots, E_k pueden ocurrir es

$$m_1 m_2 \cdots m_k.$$

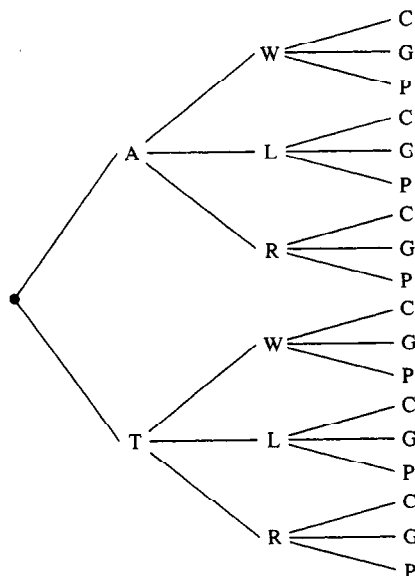


Figura 2. Conteo.

EJEMPLO 1

Considerar la formación de números de tres cifras a partir de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

- a) ¿De cuántas maneras puede hacerse esto si se permite la repetición de dígitos?

Ya que hay tres dígitos a seleccionar, se llenan tres espacios en blanco con el número de maneras en que cada dígito se puede seleccionar. Puesto que se permite la repetición de dígitos, cada uno de los tres espacios en blanco contendrá un 7.

$$\underline{7} \quad \underline{7} \quad \underline{7}$$

Así, hay $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ posibles números diferentes de tres cifras cuando se permite la repetición.

- b) ¿Cuántas maneras hay cuando no se permite la repetición?

Hay siete selecciones para el primer espacio en blanco, sólo seis para el segundo (sin repetición, el primer dígito utilizado ya no está disponible ahora) y sólo cinco para el tercer espacio en blanco.

$$\underline{7} \quad \underline{6} \quad \underline{5}$$

Así, hay $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ posibles números diferentes de tres cifras cuando no se permite la repetición. ■

EJEMPLO 2

Las placas de los automóviles constan de tres letras seguidas por un número de tres cifras. ¿Cuántas placas de automóviles con diferente inscripción son posibles?

Ya que hay 26 letras y 10 cifras (0, 1, 2, ..., 9) y se permiten las repeticiones, el número de placas diferentes puede obtenerse al llenar los espacios en blanco

$$\underline{26} \quad \underline{26} \quad \underline{26} \quad \underline{10} \quad \underline{10} \quad \underline{10}$$

para tener el resultado, $26^3 \cdot 10^3 = 17\,576\,000$ placas de automóviles. ■

A continuación nos concentraremos en el problema de escoger una colección de objetos tomándolos de un conjunto determinado de objetos.

Permutación

Una **permutación** es cualquier arreglo de una colección de objetos en un orden particular.

Considerar las permutaciones (los arreglos) de las letras A, B y C.

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

Hay seis permutaciones de tres objetos. Este número puede determinarse al llenar tres espacios en blanco. Hay tres selecciones para la primera posición, dos para la segunda y una para la tercera.

$$\underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 6$$

El número de permutaciones de cinco objetos diferentes es

$$\underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 120.$$

El número de permutaciones de ocho objetos diferentes es

$$\underline{8} \cdot \underline{7} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 40\,320.$$

En general, el número de permutaciones de n objetos diferentes es

$$n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots 2 \cdot 1.$$

Notación factorial

Ya que los productos de enteros sucesivos en orden decreciente, a partir de uno dado hasta 1, aparecen con tanta frecuencia al trabajar con permutaciones, se usará la **notación factorial**

(léase "factorial de n ")

Así, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$, y $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$. Observar que $1! = 1$.

La frase "el número de permutaciones de n objetos tomados en n en n ", o en forma breve, "el número de permutaciones de n objetos" aparece en repetidas ocasiones, por lo que se usa ${}_nP_n$ para simbolizar esta frase.

Permutaciones de n objetos

El número de permutación es de n objetos, ${}_nP_n$, está dado por

$${}_nP_n = n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots 2 \cdot 1.$$

Fórmula para ${}_nP_r$

Dada una colección de objetos, puede descarse considerar todos los arreglos de subcolecciones de un tamaño particular. Por ejemplo, considerar las permutaciones de las letras A, B, C, D y E tomadas de dos en dos.

AB	BA	CA	DA	EA
AC	BC	CB	DB	EB
AD	BD	CD	DC	EC
AE	BE	CE	DE	ED

En el arreglo hay 20 permutaciones de cinco objetos diferentes, tomados de dos en dos. Por supuesto, este número podría haberse obtenido usando la técnica de llenar los espacios en blanco, ya que hay cinco selecciones para la primera posición y cuatro para la segunda.

$$\underline{5} \cdot \underline{4} = 20$$

En general, el propósito es encontrar "el número de permutaciones de n objetos tomados de r en r "; ${}_nP_r$ simboliza esta frase. Considérese llenar r espacios en blanco. Hay n selecciones para el primer espacio en blanco, $n - 1$ para el segundo, $n - 2$ para el tercero y $n - (r - 1)$ para el r -ésimo espacio en blanco

$$\underline{n} \quad \underline{n-1} \quad \underline{n-2} \quad \underline{n-3} \quad \dots \quad \underline{n-(r-1)}.$$

Así ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots [n-(r-1)].$

Supóngase que se multiplica al lado derecho por $(n-r)!/(n-r)!$, o sea por 1.

$$\begin{aligned} {}nP_r &= n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots [n-(r-1)] \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots [n-(r-1)](n-r)!}{(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

Esto prueba el siguiente teorema.

Permutaciones de n objetos tomados de r en r

El número de permutaciones de objetos tomados de r en r ($r < n$) está dado por

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

En el ejemplo anterior, $n = 5$ y $r = 2$ de manera que, utilizando la fórmula,

$${}_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 5 \cdot 4 = 20.$$

Por lo regular, no se efectúa la evaluación de los factoriales en el numerador y denominador, sólo se indican los productos y se cancelan los factores comunes. Ya que $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, podría haberse abreviado un poco más

$${}_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 5 \cdot 4 = 20$$

Además, si se define $0! = 1$, puede usarse la fórmula

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

en el caso donde $n = r$ [$n - r = 0$ de modo que $(n - r)! = 0! = 1$], y el resultado es la fórmula para ${}_nP_n$.

EJEMPLO 3

$$\text{a) } {}_5P_5 = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = \frac{5!}{1} = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$\text{b) } {}_{10}P_4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,040$$

$$\text{c) } {}_5P_0 = \frac{5!}{(5-0)!} = \frac{5!}{5!} = 1$$

EJEMPLO 4

¿De cuántas maneras se puede elegir un presidente, un vicepresidente y un secretario en un club con 10 miembros?

Ya que el orden es importante en la selección, se trata de un problema de permutación.

$${}_{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$$

Permutaciones distinguibles

Considerar el número de arreglos de las siete letras de la palabra ARIZONA. Ya que dos letras son iguales, no hay $7!$ arreglos diferentes. Cada arreglo posible tiene un gemelo idéntico formado al intercambiarse las dos A. Así, ya que las dos A pueden arreglarse de $2!$ maneras, divídase $7!$ entre $2!$ para obtener el número de arreglos distinguibles. Esto ilustra el siguiente teorema.

Permutaciones distinguibles

El número de **permutaciones distinguibles** de n objetos de los cuales n_1 son iguales, n_2 son iguales, n_3 son iguales y así sucesivamente, es

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots}$$

EJEMPLO 5

Determinar el número de permutaciones distinguibles de las letras de MISSISSIPPI.

En este caso hay 11 letras: una M, cuatro I, cuatro S y dos P; es decir, $n_1 = 1$, $n_2 = 4$, $n_3 = 4$ y $n_4 = 2$. El número de permutaciones distinguibles es

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!n_4!} = \frac{11!}{1!4!4!2!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{4!} \cdot 1 \cdot 2}$$

$$= \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 2} = 34\,650. \quad \blacksquare$$

Permutaciones circulares

Hasta ahora se han arreglado objetos en línea recta, y se ha visto que cuatro objetos pueden arreglarse en línea recta de ${}_4P_4 = 4! = 24$ maneras diferentes. Supóngase que el arreglo de estos mismos cuatro objetos sigue un modelo circular simétrico. Por ejemplo, arrégense A, B, C y D alrededor de un círculo. La figura 3 muestra uno de tales arreglos, la figura 4 presenta los otros tres.

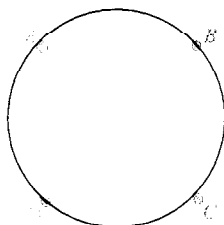


Figura 3. Permutaciones circulares.

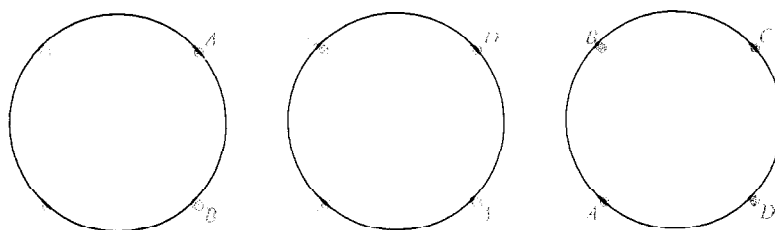


Figura 4. Permutaciones circulares.

¿Son diferentes o distinguibles los arreglos mostrados en la figura 4 del arreglo mostrado en la figura 3? Si no se hace caso de posiciones de las letras y sólo se consideran sus relaciones entre sí, se observa que estos cuatro arreglos son iguales; es decir, puede empezarse en A y moviéndose en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de cualquiera de los círculos se obtiene el mismo arreglo, ABCD y sigue otra vez A. Así, los cuatro arreglos diferentes ABCD, BCDA, CDAB y DABC no son distinguibles en un arreglo circular. En general, si hay x arreglos circulares diferentes de cuatro objetos, habría $4 \cdot x$ arreglos de estos objetos a lo largo de una línea recta. Así, ya que el número de arreglos a lo largo de una línea recta es $4!$, se tiene $4 \cdot x = 4!$ o

$$x = \frac{4!}{4} = \frac{\cancel{4} \cdot 3!}{\cancel{4}} = 3!$$

Éste es un caso especial del siguiente teorema.

Permutaciones circulares

El número de **permutaciones circulares** distinguibles (arreglos regularmente dispuestos alrededor de un círculo) de n objetos es $(n - 1)!$.

EJEMPLO 6

¿De cuántas maneras pueden sentarse seis personas alrededor de una mesa circular?
En este caso $n = 6$, de modo que

$$(n - 1)! = (6 - 1)! = 5! = 120$$

es el número de permutaciones circulares posibles de las seis personas.

Combinación

Una **combinación** es cualquier colección de objetos. El orden de la selección no es importante.

Fórmula para ${}_nC_r$

Considérese las permutaciones ${}_4P_3 = 24$ de las letras A, B, C y D, tomadas de tres en tres.

ABC	ABD	ACD	BCD
ACB	ADB	ADC	BDC
BAC	BAD	CAD	CBD
BCA	BDA	CDA	CDB
CAB	DAB	DAC	DBC
CBA	DBA	DCA	DCB

Obsérvese que las seis permutaciones de la primera columna contienen las mismas tres letras A, B y C, por lo que se cuentan como una sola combinación (en una combinación no importa el orden). En forma análoga, las seis permutaciones que aparecen en la lista en las columnas segunda, tercera y cuarta, originan las combinaciones simples

A, B, D, A, C, D B, C, D.

Como resultado, sólo hay cuatro combinaciones de las cuatro letras A, B, C y D tomadas de tres en tres. En general, hay menos combinaciones que permutaciones en lo que respecta a un grupo particular de objetos.

Por lo regular, se utiliza ${}_nC_r$ para representar el número de combinaciones de n objetos tomados de r en r . En el ejemplo anterior, se encontró que ${}_4C_3 = 4$. Ya que cada combinación de tres objetos puede resolverse en $6 = 3!$ permutaciones de los tres objetos, se tiene que

$${}_4P_3 = (3!) \cdot {}_4C_3 = 3! \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$$

$$\text{o} \quad {}_4C_3 = \frac{{}_4P_3}{3!} = \frac{4!}{(4-3)!3!} = \frac{4!}{(4-3)!3!}$$

el cual es un caso especial del siguiente teorema.

Combinaciones de n objetos tomados de r en r

El número de combinaciones de n objetos tomados de r en r ($r \leq n$) está dado por

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

EJEMPLO 7

$$\begin{aligned} \text{a) } {}_5C_3 &= \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = 10 \\ \text{b) } {}_5C_5 &= \frac{5!}{(5-5)!5!} = \frac{\cancel{5}!}{0!\cancel{5}!} = \frac{1}{1} = 1 \\ \text{c) } {}_5C_0 &= \frac{5!}{(5-0)!0!} = \frac{\cancel{5}!}{\cancel{5}!0!} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

Las partes b) y c) del ejemplo 7 sí tienen sentido. Si se tienen cinco objetos, hay una manera de seleccionar cinco de ellos (simplemente tomar todos) y una manera de escoger a ninguno de ellos (simplemente no se tome ni uno). En realidad, no tiene nada de especial el número cinco en estos ejemplos:

$${}_nC_n = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{\cancel{n}!}{\cancel{n}!0!} = \frac{1}{1} = 1$$

y

para cualquier número natural n .

EJEMPLO 8

¿Cuántas manos de póker con cinco cartas pueden obtenerse, de manera que tres sean reyes y dos no sean reyes, si se juega con una baraja de 52 cartas?

Hay

$${}_4C_3 = \frac{4!}{1!3!} = 4$$

maneras de conseguir tres de los cuatro reyes y

$${}_{48}C_2 = \frac{48!}{46!2!} = \frac{\cancel{48} \cdot \cancel{47} \cdot \cancel{46}!}{\cancel{46}! \cdot \cancel{2}} = 1\,128$$

maneras de tener dos de las 48 cartas que no son reyes. Así, en total, hay

$${}_4C_3 \cdot {}_{48}C_2 = 4 \cdot 1\,128 = 4\,512$$

maneras de tener la mano prescrita.

12.5. Ejercicios

Evaluar ${}_nP_r$ y ${}_nC_r$ en los ejercicios 1-8.

1. ${}_7P_3$

2. ${}_6P_6$

3. ${}_{10}P_2$

4. ${}_8P_0$

5. ${}_9C_0$

6. ${}_{10}C_3$

7. ${}_{10}C_7$

8. ${}_{20}C_{19}$

9. Suponer que hay cinco carreteras que conectan el pueblo A con el pueblo B y tres carreteras que conectan el pueblo B con el pueblo C. ¿De cuántas maneras una persona puede viajar de A a C vía B?
10. ¿Cuántos símbolos de tres cifras pueden formarse utilizando los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, si se permite la repetición de dígitos? ¿Y si no se permite la repetición de dígitos?
11. **Manufactura.** Se van a troquelar placas de automóviles utilizando dos letras seguidas por cuatro dígitos. ¿Cuántas placas pueden fabricarse si se permite la repetición tanto de letras como de dígitos? ¿Cuántas placas pueden manufacturarse si la repetición de letras es posible, pero no se permite la repetición de dígitos? ¿Cuántas placas pueden hacerse si ni las letras ni los dígitos pueden repetirse?
12. **Administración.** Una fábrica de ropa tiene cuatro diseños básicos para camisas, ya sea de manga corta o larga, con ocho patrones de diferente color. ¿Cuántas camisas diferentes deben confeccionarse para asegurar la fabricación de una de cada clase posible?
13. **Milicia.** Una señal se forma al colocar tres banderas, una arriba de la otra, en una asta. Si hay ocho banderas diferentes disponibles, ¿cuántas maneras pueden formarse?
14. **Educación.** ¿De cuántas maneras pueden formarse tres estudiantes de primer año y cuatro de segundo año en la oficina de archivo si no se imponen otras restricciones? ¿Si los cuatro estudiantes de segundo año insisten en estar primero en la fila? ¿Si los estudiantes de segundo año y primer año deben alternarse en la fila? ¿Si un estudiante de segundo debe estar primero y no se impone ninguna otra restricción? ¿Si los estudiantes de segundo año insisten en permanecer juntos y los de primero también?
15. ¿De cuántas maneras pueden arreglarse las letras de la palabra MANTO utilizando las cinco letras?
16. ¿De cuántas maneras pueden arreglarse las letras de la palabra MANTO utilizando cuatro de las letras?
17. **Tribunal.** ¿De cuántas maneras se puede formar a ocho sospechosos en una fila en un departamento de policía?
18. **Música.** Una concertista planea ejecutar nueve selecciones. ¿De cuántas maneras puede ordenar el programa?
19. **Deportes.** ¿De cuántas maneras el director técnico de un equipo de beisbol puede arreglar su orden al bat bajo las siguientes condiciones? a) Cualquier jugador puede batear en cualquier posición. [Sugerencia: Hay nueve jugadores en un equipo de beisbol] b) El lanzador debe batear al último. c) El lanzador debe batear al último y el jardinero central debe batear en la cuarta posición para avanzar a los jugadores en posición de anotar. d) El lanzador debe batear al último y los tres jardineros deben batear en las primeras tres posiciones.
20. Cuatro monedas cuyos valores son 1¢, 5¢, 10¢ y 25¢ se tienen que arreglar en línea recta. a) ¿De cuántas maneras puede hacerse esto? b) Si se hace la distinción entre cara y cruz, ¿de cuántas maneras puede hacerse esto?
21. ¿Cuántas permutaciones distinguibles de las letras que forman cada palabra son posibles? a) ALMAS, b) CALLAR, c) TENNESSEE, d) AARDVARK
22. ¿De cuántas maneras diferentes puede expresarse $x^4y^3z^5$ sin exponentes?
23. **Milicia.** ¿Cuántas señales diferentes pueden hacerse en una asta vertical con 14 banderas si cinco son blancas, cuatro rojas, tres verdes y dos negras?
24. **Recreación.** Si Jorge Ayala Blanco, uno de los principales críticos de cine en México, ha visto 500 películas este año, ¿de cuántas maneras podría hacer una lista, en orden de preferencia, de las 10 mejores películas que ha visto? [Sugerencia: No es necesaria la evaluación de la respuesta].
25. ¿De cuántas maneras ocho personas pueden sentarse alrededor de una mesa circular?
26. ¿De cuántas maneras pudieron haberse sentado los 12 caballeros cuando se reunían en la mesa redonda del Rey Arturo?
27. **Milicia.** ¿De cuántas maneras puede seleccionarse un destacamento pequeño de cinco soldados de un grupo de 14?
28. **Educación.** En un examen, una estudiante debe contestar ocho de 10 preguntas. ¿De cuántas maneras puede seleccionar las ocho preguntas?

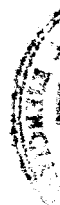


29. **Milicia.** ¿De cuántas maneras puede seleccionarse un destacamento pequeño de cinco soldados de un grupo de 14 y ser presentado con cinco condecoraciones diferentes?
30. ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse ocho personas entre 10 y ordenarse en una línea recta?
31. **Educación.** ¿De cuántas maneras puede elegirse un comité de cinco integrantes si los candidatos son ocho personas mayores y 10 menores bajo las siguientes condiciones? a) El comité debe constar de cuatro personas mayores exactamente. b) El comité debe constar por lo menos de cuatro personas mayores. [Sugerencia: Encontrar el número de maneras de tener cuatro personas mayores y uno menor y sumar a éste el número de maneras de tener cinco personas mayores]. c) El comité debe constar de tres personas menores exactamente. d) El comité debe constar por lo menos de tres personas menores.
32. **Deportes.** Un grupo de 16 estudiantes va a organizar un torneo de tenis integrando cuatro equipos de cuatro jugadores. a) ¿De cuántas maneras puede formarse el primer equipo? b) ¿De cuántas maneras puede formarse el segundo equipo una vez que se ha integrado el primero? c) ¿De cuántas maneras puede formarse el tercer equipo una vez que se han integrado los dos primeros? d) ¿De cuántas maneras puede formarse el cuarto equipo una vez que se han integrado los otros tres?
33. **Geometría.** Los puntos que están sobre la misma recta se denominan colineales. ¿Cuántas rectas pueden determinarse con siete puntos si tres de ellos no son colineales? [Sugerencia: ¿Cuántos puntos determinan una recta?]
34. **Geometría.** Tres puntos no colineales determinan un círculo. ¿Cuántos círculos pueden determinarse con cinco de tales puntos?
35. **Educación.** Un estudiante debe contestar siete de las primeras 10 preguntas de un examen. En las siguientes cinco preguntas, debe contestar cuatro. ¿De cuántas maneras puede hacerse esto?
36. ¿Cuántas diferentes sumas de dinero pueden obtenerse tomando tres de cinco monedas cuyos valores son 1¢, 5¢, 10¢, 25¢ y 50¢?
37. **Recreación.** ¿Cuántas manos de póker de cinco cartas obtenidas de una baraja de 52 cartas son posibles si deben constar de las siguientes cartas? a) Cinco corazones, b) cuatro ases y un siete, c) tres ases y dos cartas que no sean ases, d) tres corazones y dos tréboles, e) tres figuras y dos sietes.
38. **Recreación.** ¿Cuántas manos de póker de cinco cartas obtenidas de una baraja de 52 cartas son posibles si deben constar de las siguientes cartas? a) Cinco cartas negras, b) cuatro ases y un comodín, c) un as y cuatro cartas que no sean ases, d) un as, una reina, un rey y dos cartas que no sean alguna de estas tres, e) dos figuras, dos ases y un ocho.
39. **Consumo.** Fred desea comprar un automóvil nuevo; para ello ha reducido las opciones a uno de tres modelos, uno de cuatro colores de carrocería y uno de cinco colores de tapizado. ¿Cuántas combinaciones posibles hay para que elija una?
40. **Educación.** Un profesor planea conceder tres A, seis B, diez C, cinco D y dos F a su clase compuesta de 26 estudiantes. ¿De cuántas maneras puede hacer esto?
41. Dar un ejemplo para mostrar que $(n!)(m!) \neq (n \cdot m)!$
42. Dar un ejemplo para mostrar que $n! + m! \neq (n + m)!$
43. Demostrar que ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$.
44. Demostrar que ${}_nP_0 = 1$, ${}_nC_0 = 1$, y ${}_nC_n = 1$.

En los ejercicios 45-46 usar la inducción matemática para demostrar la proposición.

45. $3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$

46. 6 divide a $7^n - 1$



12.6. EL TEOREMA DEL BINOMIO

Otra aplicación de las combinaciones está en el desarrollo de $(a + b)^n$ donde $a + b$ es cualquier binomio y n es un entero no negativo. A continuación se desarrollan varias de tales expresiones con el objeto de conformar un modelo.

$$\begin{aligned}
 (a + b)^0 &= 1 \\
 (a + b)^1 &= a + b \\
 (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
 (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 (a + b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
 (a + b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\
 (a + b)^6 &= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6
 \end{aligned}$$

En cada caso se observa lo siguiente:

1. Siempre hay $n + 1$ términos en el desarrollo.
2. Los exponentes de a comienzan con n y decrecen hasta 0.
3. Los exponentes de b comienzan con 0 y crecen hasta n .
4. La suma de los exponentes en cada término siempre es n .

Triángulo de Pascal

Para descubrir el modelo de los coeficientes numéricos de cada término, los coeficientes se escriben de acuerdo con el mismo arreglo que los desarrollos anteriores.

Fila 0	1
Fila 1	1 1
Fila 2	1 2 1
Fila 3	1 3 3 1
Fila 4	1 4 6 4 1
Fila 5	1 5 10 10 5 1
Fila 6	1 6 15 20 15 6 1

Este arreglo triangular se conoce como **triángulo de Pascal**. El número de la fila corresponde al exponente n en el desarrollo de $(a + b)^n$. Los números en cualquier fila, excluyendo al primero y al inmediatamente arriba a la izquierda y arriba a la derecha de cada uno de ellos. Por ejemplo, como se indica, 15 es $5 + 10$. Así, el triángulo de Pascal proporciona una manera de determinar los coeficientes en el desarrollo de un binomio particular.

EJEMPLO 1

Desarrollar $(x + 2y)^5$.

En este ejemplo, $n = 5$, $a = x$ y $b = 2y$. La fila cinco del triángulo de Pascal tiene los siguientes números para los coeficientes.

Se procede a sustituir $a = x$ y $b = 2y$ en

$$a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5$$

para obtener

$$\begin{aligned} & x^5 + 5x^4(2y) + 10x^3(2y)^2 + 10x^2(2y)^3 + 5x(2y)^4 + (2y)^5 \\ &= x^5 + 5x^4(2y) + 10x^3(4y^2) + 10x^2(8y^3) + 5x(16y^4) + 32y^5 \\ &= x^5 + 10x^4y + 40x^3y^2 + 80x^2y^3 + 80xy^4 + 32y^5. \end{aligned}$$

Cerciórese de haber evaluado $b^3 = (2y)^3$ como $2^3y^3 = 8y^3$ y no como $2y^3$. Éste es quizá el error más común que se comete con esta técnica de desarrollo.

EJEMPLO 2

Desarrollar $(2y - 3)^4$.

Expresar $(2y - 3)^4$ como $(2y + (-3))^4$; entonces $n = 4$, $a = 2y$ y $b = -3$. En la fila cuatro del triángulo de Pascal, los coeficientes indicados son:

Se procede a sustituir $a = 2y$ y $b = -3$ en

$$a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4,$$

para obtener

$$\begin{aligned} & (2y)^4 + 4(2y)^3(-3) + 6(2y)^2(-3)^2 + 4(2y)(-3)^3 + (-3)^4 \\ &= 16y^4 + 4(8y^3)(-3) + 6(4y^2)(9) + 4(2y)(-27) + 81 \\ &= 16y^4 - 96y^3 + 216y^2 - 216y + 81. \end{aligned}$$

Cuando n es grande, o cuando interesa determinar sólo un término particular de un desarrollo binomial, es útil hacer una observación adicional acerca de los coeficientes binomiales en el triángulo de Pascal. Es fácil comprobar que el triángulo de Pascal es en realidad un arreglo de combinaciones.

Fila 0	1
Fila 1	${}_1C_0$ ${}_1C_1$
Fila 2	${}_2C_0$ ${}_2C_1$ ${}_2C_2$
Fila 3	${}_3C_0$ ${}_3C_1$ ${}_3C_2$ ${}_3C_3$
Fila 4	${}_4C_0$ ${}_4C_1$ ${}_4C_2$ ${}_4C_3$ ${}_4C_4$
Fila 5	${}_5C_0$ ${}_5C_1$ ${}_5C_2$ ${}_5C_3$ ${}_5C_4$ ${}_5C_5$
Fila 6	${}_6C_0$ ${}_6C_1$ ${}_6C_2$ ${}_6C_3$ ${}_6C_4$ ${}_6C_5$ ${}_6C_6$

Por ejemplo,

$${}_6C_1 = \frac{6!}{(6-1)!1!} = \frac{6!}{5!1!} = 6, \quad {}_5C_3 = \frac{5!}{2!3!} = 10, \quad {}_4C_2 = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

Como resultado, las entradas en cualquier fila n ($n \geq 1$) pueden encontrarse al evaluar ${}_nC_r$ donde r tiene valores $0, 1, 2, \dots, n$.

Teorema del binomio

Enseguida se enuncia el teorema del binomio haciendo uso de una nueva notación para ${}_nC_r$, la cual se utiliza comúnmente en este contexto.

$$\binom{n}{r} = {}_nC_r$$

$$\text{Así,} \quad \binom{5}{3} = {}_5C_3 = \frac{5!}{2!3!} = 10 \quad \text{y} \quad \binom{7}{0} = {}_7C_0 = \frac{7!}{0!7!} = 1.$$

Teorema del binomio

Para cualquier binomio $a + b$ y cualquier entero positivo n ,

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{n}b^n.$$

Haciendo uso de la notación de sumatoria,

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r.$$

A $\binom{n}{r}$ se le denomina **coeficiente binomial** del término $(r + 1)$ -ésimo del desarrollo.

$$\text{término } (r + 1)\text{-ésimo} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

PRECAUCIÓN: Puesto que r varía de 0 a n , un término particular se denomina término $(r + 1)$ -ésimo. Por ejemplo, cuando $r = 0$ se tiene el término $(0 + 1)$ -ésimo o primer término. El tercer término es el término $(2 + 1)$ -ésimo, el cual es el término $(r + 1)$ -ésimo para $r = 2$. Así, si se requiere un término particular, identifíquense n , a y b , y recuérdese simplemente que r es el número del término solicitado, menos 1.

Demostración del teorema del binomio

El teorema del binomio se demuestra utilizando inducción matemática. Recuérdese que debe demostrarse que $S(1)$ es verdadera, y que si $S(k)$ es verdadera, entonces $S(k + 1)$ es verdadera.

Primero se demuestra que $S(1)$ es verdadera; es decir, que el teorema del binomio es correcto para $n = 1$.

$$\sum_{r=0}^1 \binom{1}{r} a^{1-r} b^r = \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1 = a + b = (a + b)^1$$

Así, el teorema es cierto para $n = 1$; es decir,

$$(a + b)^1 = \sum_{r=0}^1 \binom{1}{r} a^{1-r} b^r.$$

Supóngase ahora que $(a + b)^k = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} a^{k-r} b^r$, se demostrará que $(a + b)^{k+1} = \sum_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} a^{k+1-r} b^r$.

Para hacer esto, se comienza con la igualdad de premisa y se multiplican ambos lados por $a + b$.

$$\begin{aligned}(a + b)^k &= \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} a^{k-r} b^r \\(a + b)^k (a + b) &= \left[\sum_{r=0}^k \binom{k}{r} a^{k-r} b^r \right] (a + b) \\&= \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} a^{k-r} b^r a + \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} a^{k-r} b^r b \\&= \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} a^{k+1-r} b^r + \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} a^{k-r} b^{r+1}.\end{aligned}$$

Al desarrollar estas sumas y agrupar términos semejantes, el resultado es la siguiente serie.

$$\begin{aligned}(a + b)^{k+1} &= \binom{k}{0} a^{k+1} + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1} \right] a^k b + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2} \right] a^{k-1} b^2 + \dots \\&\quad + \left[\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} \right] a b^k + \binom{k}{k} b^{k+1}.\end{aligned}$$

En la sección de ejercicios se pide demostrar que

$$\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}, \quad \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1} \quad \text{y} \quad \binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \binom{k+1}{r}.$$

Utilizando estas ecuaciones se tiene

$$\begin{aligned}(a + b)^{k+1} &= \binom{k+1}{0} a^{k+1} + \binom{k+1}{1} a^k b + \binom{k+1}{2} a^{k-1} b^2 + \dots + \binom{k+1}{k} a b^k + \binom{k+1}{k+1} b^{k+1} \\&= \sum_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} a^{k+1-r} b^r.\end{aligned}$$

Así, por inducción matemática, el teorema del binomio se ha demostrado para todo entero positivo n .

EJEMPLO 3

a) Encontrar el quinto término en el desarrollo de $(x + 2y)^7$.

En este ejemplo $n = 7$, $a = x$, $b = 2y$ y ya que se desea encontrar el quinto término, r es 4.

$$\begin{aligned}\binom{n}{r} a^{n-r} b^r &= \binom{7}{4} (x)^{7-4} (2y)^4 \\&= \frac{7!}{3!4!} x^3 (16y^4) \\&= 35x^3 (16y^4) = 560x^3 y^4\end{aligned}$$

b) Encontrar el séptimo término en el desarrollo de $(a^2 - 3y)^{10}$.

Se tiene $n = 10$, $a = a^2$, $b = (-3y)$ [tener cuidado en escribir $(a^2 - 3y)^{10}$ como $(a^2 + (-3y))^{10}$]
y $r = 6$ (7 menos 1).

$$\begin{aligned}\binom{n}{r} a^{n-r} b^r &= \binom{10}{6} (a^2)^{10-6} (-3y)^6 \\ &= \frac{10!}{4!6!} (a^2)^4 (729y^6) \\ &= 210a^8(729y^6) = 153\,090a^8y^6\end{aligned}$$

12.6. Ejercicios

En los ejercicios 1-6 evaluar cada coeficiente binomial.

1. $\binom{4}{2}$

2. $\binom{6}{4}$

3. $\binom{5}{0}$

4. $\binom{5}{5}$

5. $\binom{10}{8}$

6. $\binom{12}{7}$

Desarrollar cada binomio en los ejercicios 7-18.

7. $(x + y)^5$

8. $(x - y)^5$

9. $(3a - 1)^5$

10. $(x^2 - 2)^4$

11. $(3x - y)^4$

12. $(x + 3y)^4$

13. $(u^2 + v^2)^6$

14. $(u^2 - v^2)^6$

15. $(a + a^{-1})^7$

16. $(a^{-2} - a^2)^7$

17. $(x^{1/2} - y^{1/2})^4$

18. $(x - 1)^9$

En los ejercicios 19-30 encontrar el término indicado en cada desarrollo binomial.

19. Tercer término; $(x + 2)^5$

20. Quinto término; $(x - 2)^5$

21. Cuarto término; $(x + 2y)^5$

22. Cuarto término; $(x - 2y)^5$

23. Cuarto término; $(x + y^2)^5$

24. Cuarto término; $(x - y^2)^5$

25. Sexto término; $(3a - b)^7$

26. Tercer término; $(4a - 2)^6$

27. Término medio; $(4a - 2)^6$

28. Término medio; $(2a - 3b)^8$

29. Sexto término; $(a - a^{-1})^8$

30. Cuarto término; $(1 - \sqrt{x})^7$

En los ejercicios 31-34 encontrar el valor del número complejo o real elevado a una potencia.

31. $(1 + 1)^7$

32. $(1 + \sqrt{2})^3$

33. $(1 + i)^5$

34. $(1 - 3i)^4$

35. Encontrar el término que contiene a x^5 en $(3x - 5y)^6$.

36. Encontrar el término que contiene a y^5 en $(5x - 2y)^6$.

37. Utilizar los primeros cuatro términos de $(1 - 0.1)^6$ para aproximar $(0.9)^6$. Comparar el resultado con el valor encontrado utilizando una calculadora.

38. Utilizar los primeros cuatro términos de $(1 + 0.1)^6$ para aproximar $(1.1)^6$. Comparar el resultado con el valor encontrado utilizando una calculadora.

39. Demostrar que $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$ y $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$.

40. Demostrar que $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$.



41. **Deportes.** ¿De cuántas maneras pueden presentarse al público los cinco miembros de un equipo de baloncesto si el centro debe ser el primero?
42. ¿Cuántas permutaciones distinguibles de las letras de la palabra ALABAMA son posibles?
43. **Manufactura.** ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse cuatro focos eléctricos de un total de 24 focos para control de calidad?
44. **Educación.** ¿De cuántas maneras es posible seleccionar cuatro ensayos de 24 para otorgarles los premios de primero, segundo, tercero y cuarto lugares?
45. ¿De cuántas maneras pueden sentarse seis comensales alrededor de una mesa redonda?

La probabilidad se originó con problemas relacionados con juegos de azar, pero hoy en día se ha extendido e incluye aplicaciones en áreas tales como genética, seguros, física, ciencias sociales y medicina.

La determinación de la incertidumbre de un evento particular es la esencia de la probabilidad. En realidad, una definición precisa requiere del empleo de cierta terminología especializada. El término **experimento** se usa para indicar la realización de alguna actividad tal como lanzar una moneda, sacar una carta o arrojar los dados. Si se realiza un experimento, el conjunto de todos los **resultados** posibles se denomina **espacio muestral del experimento**. Por lo regular, se supone que cualquier resultado particular es tan probable de que ocurra como cualquier otro; es decir, los resultados son **igualmente probables**. Cualquier subconjunto del espacio muestral se denomina **evento**. Los elementos de un evento particular se denominan **resultados favorables** o **éxitos**, mientras que los resultados no presentes en el evento se denominan **resultados desfavorables** o **fracasos**.

El experimento de lanzar dos monedas en buen estado tiene un espacio muestral

$$S = \{hh, ht, th, tt\},$$

donde hh corresponde al hecho de obtener una cara en cada moneda y ht corresponde al hecho de obtener una cara en la primera moneda y una cruz en la segunda. Obsérvese que ht y th son diferentes. Es obvio que si se trata de una moneda de 10¢ y otra de 25¢, hay dos maneras de obtener una cara y una cruz. El evento

$$E = \{tt\}$$

es el evento que consiste en obtener dos cruces, mientras que

$$F = \{ht, th\}$$

es el evento que consiste en obtener una cara y una cruz.

El experimento de arrojar dos dados no cargados tiene un espacio muestral que consta de 36 pares de números, donde cada número varía del 1 al 6. A ello se debe haber insistido en que cada resultado es tan probable como cualquier otro. No puede utilizarse $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ para representar el espacio muestral, ya que el total de 7 puede obtenerse de seis maneras

$$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$$

mientras que el total de 2 es menos probable puesto que sólo se obtiene de una manera, $(1, 1)$.

Obsérvese que (2, 5) y (5, 2) son resultados diferentes. Tal vez sea más fácil entender esto si se piensa que los dados son de diferentes colores, uno rojo y otro blanco. Un 2 con el dado rojo y un 5 con el dado blanco es claramente un resultado diferente que un 5 con el dado rojo y un 2 con el dado blanco.

A continuación se presenta el espacio muestral para este experimento.

	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
F	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)
E						

El evento E de obtención de un total de 8 es

$$E = \{(6, 2), (5, 3), (4, 4), (3, 5), (2, 6)\}$$

mientras que el evento F de obtención de un total de 4 es

$$F = \{(3, 1), (2, 2), (1, 3)\}.$$

Los pares que dan un total particular se encuentran a lo largo de una diagonal que va de la parte izquierda inferior a la parte derecha superior.

Con base en los conceptos antes expuestos es posible enunciar una definición precisa de probabilidad junto con varias propiedades importantes. Se utiliza $n(S)$, léase " n de S ", para representar el número de elementos del conjunto S y $n(E)$ para el número de elementos en E .

Probabilidad

Sea S el espacio de muestras de un experimento y E un evento (E es un subconjunto de S).

La **probabilidad de que E ocurra**, o simplemente la **probabilidad de E** , denotada por $P(E)$, está dada por

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{\text{Número de resultados favorables}}{\text{Número total de resultados}}.$$

Ya que E es un subconjunto de S , $0 \leq n(E) \leq n(S)$, por lo que dividiendo todo entre $n(S)$ se obtiene

$$\frac{0}{n(S)} \leq \frac{n(E)}{n(S)} \leq \frac{n(S)}{n(S)}$$

o

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

En consecuencia, la probabilidad de un evento siempre es un número entre 0 y 1, inclusive. Si $P(E) = 0$, se dice que E es **imposible** (E no puede ocurrir). Si $P(E) = 1$, se dice que E es **seguro** (E debe ocurrir). Si E y F son dos eventos tales que $P(E) < P(F)$, se dice que E es **menos probable que F** , o que F es **más probable que E** . Si $P(E) = P(F)$, los eventos son **igualmente probables**.

EJEMPLO 1

El espacio muestral para el experimento de lanzar dos monedas en buen estado es $S = \{hh, ht, th, tt\}$.

- a) Si E es el evento que consiste en obtener dos caras, ¿cuál es $P(E)$?

Ya que $E = \{hh\}$,

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{4}. \quad \text{Recuerda que } n(S) = 4 \text{ resultados.}$$

- b) Si F es un evento que consiste en obtener al menos una cara, encontrar $P(F)$.

$$F = \{hh, ht, th\}.$$

Así,

$$P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{3}{4}. \quad \square$$

EJEMPLO 2

Considerar el espacio muestral para el experimento de arrojar dos dados.

- a) Determinar la probabilidad de que caiga un total de 8.

El espacio muestral ya se indicó anteriormente en esta sección.

$$E = \{(6, 2), (5, 3), (4, 4), (3, 5), (2, 6)\}$$

Así,

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{5}{36}.$$

- b) Determinar la probabilidad de que caiga un total de 3.

De acuerdo con el arreglo de resultados proporcionado en esta sección, el número de maneras de obtener un total de tres es 2. Así,

$$P(3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}. \quad \square$$

Las probabilidades en el ejemplo 2 no significan que si los dados se arrojan 36 veces se van a obtener exactamente cinco sumas de 8 y dos sumas de 3. Sí significa que, si los dados se arrojan cientos de veces, es probable que aproximadamente $5/36$ de los lanzamientos darán por resultado una suma de 8 y alrededor de $1/18$ de los lanzamientos dará por resultado una suma de 3.

EJEMPLO 3

Encontrar la probabilidad de sacar una mano de cinco cartas que conste de tres ases y dos cartas que no sean ases, de una baraja de 52 cartas.

Sea E el evento. Hay ${}_{48}C_2$ maneras de sacar dos cartas que no sean ases y ${}_{52}C_5$ maneras totales de sacar cinco cartas. Así,

$$P(E) = \frac{{}_4C_3 \cdot {}_{48}C_2}{{}_{52}C_5} = \frac{\frac{4!}{3!1!} \frac{48!}{46!2!}}{\frac{52!}{5!47!}} = \frac{94}{54\,145} \approx 0.0017. \quad \square$$

Probabilidad de A o B

Cuando dos o más eventos se unen con la palabra *o*, se dice que el resultado es la **disyunción** de los eventos. Si A es el evento que consiste en obtener un 5 con un dado y B el evento que consiste en obtener un 3 con un dado, entonces A o B es el evento que consiste en obtener un 3 o un 5 con un dado. En este caso, es obvio que

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$$

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}.$$

La **conjunción** de dos o más eventos se forma al unirlos con la palabra *y*. En el caso anterior, es imposible que ocurra tanto A como B en un solo tiro. Cuando esto sucede, se dice que A y B son **mutuamente excluyentes**, además, obsérvese que la probabilidad de que ocurra tanto A como B es 0; es decir,

$$P(A \text{ y } B) = 0.$$

Así, el evento $(A \text{ y } B)$ es imposible.

Supóngase que A es el evento "sacar un as" y B es un evento "sacar una espada" en el experimento de extraer una carta de una baraja bien barajada de 52 cartas. Entonces $(A \text{ o } B)$ es el evento "sacar un as o una espada en un ensayo de extraer una carta". Ya que hay 13 espadas y cuatro ases, existe la tentación de hacer la suma para obtener 17 como el número de resultados favorables a $(A \text{ o } B)$. Sin embargo, el as de espadas se ha contado dos veces (una como espada y otra como as) por lo que 17 es 1 más que el número de resultados favorables. Así, $P(A \text{ o } B) = 16/52$. Este mismo resultado puede obtenerse mediante la siguiente fórmula.

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52}$$

$$= \frac{16}{52}$$

Cuando A y B son mutuamente excluyentes, $P(A \text{ y } B) = 0$ de modo que la fórmula todavía se aplica. Los ejemplos anteriores son casos específicos del siguiente teorema.

Probabilidad de A o B

Sean A y B eventos: Entonces,

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B).$$

Si A y B son mutuamente excluyentes, $P(A \text{ y } B) = 0$ y la fórmula se reduce a

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B).$$

EJEMPLO 4

Si se saca una carta de una baraja bien barajada de 52 cartas, encontrar la probabilidad de extraer las siguientes cartas.

a) Un as o un rey

$$\begin{aligned} P(\text{as o rey}) &= P(\text{as}) + P(\text{rey}) - P(\text{as y rey}) \\ &= \frac{4}{52} + \frac{4}{52} - \frac{0}{52} = \frac{8}{52} = \frac{2}{13} \end{aligned}$$

b) Una figura o un corazón

$$\begin{aligned} P(\text{figura o corazón}) &= P(\text{figura}) + P(\text{corazón}) - P(\text{figura y corazón}) \\ &= \frac{12}{52} + \frac{13}{52} - \frac{3}{52} \\ &= \frac{22}{52} = \frac{11}{26} \end{aligned}$$

c) Un as y una sota

$$P(\text{as y sota}) = 0 \text{ ya que los dos eventos son mutuamente excluyentes.}$$

A continuación se resolverá el segundo problema aplicado que se presenta en la introducción de este capítulo.

EJEMPLO 5

Biología

Una pareja planea tener dos hijos. Suponiendo que es igualmente probable que nazca niño o niña, ¿cuál es la probabilidad de que la pareja tenga dos niñas?, ¿cuál de que tenga dos niños? y ¿cuál de que tenga un niño y una niña?

El espacio muestral para este experimento es

$$S = \{gg, gb, bg, bb\},$$

donde gb significa primero una niña y luego un niño, y bg significa primero un niño y luego una niña. La probabilidad de dos niñas es

$$P(gg) = \frac{n(gg)}{n(S)} = \frac{1}{4}.$$

La probabilidad de dos niños es la misma.

$$P(bb) = \frac{n(bb)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

Sin embargo, la probabilidad de un niño y una niña es

$$P(1 \text{ niño y } 1 \text{ niña}) = P(gb) + P(bg) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Eventos complementarios

Si E es un evento y F es el evento descrito como no E , entonces E y F son **eventos complementarios**. Puesto que ya sea E o F debe ser cierto, $P(E \text{ o } F) = 1$. Además, $P(E \text{ y } F) = 0$. Así,

$$P(E \text{ or } F) = P(E) + P(F) = 1$$

o bien,

$$P(F) = 1 - P(E).$$

Eventos complementarios

Si E es un evento y F es el evento de que E no ocurra, entonces E y F son complementarios y

$$P(F) = 1 - P(E).$$

EJEMPLO 6

Medicina

Durante un brote de sarampión y de paperas, los funcionarios de salubridad advertían a los padres que vacunaran a sus hijos. Si no los llevaban a vacunar, la probabilidad de que un niño contrajera sarampión era 0.012; de que contrajera paperas 0.031, y de que contrajera ambas enfermedades 0.005.

- a) Encontrar la probabilidad de que un niño no vacunado contrajera el sarampión o las paperas.

$$\begin{aligned} P(\text{Sa o Pa}) &= P(\text{Sa}) + P(\text{Pa}) - P(\text{Sa y Pa}) \\ &= 0.012 + 0.031 - 0.005 \\ &= 0.038 \end{aligned}$$

- b) Encontrar la probabilidad de que un niño no contrajera ninguna de las dos enfermedades.
Sea F el evento de no contraer ninguna de las dos enfermedades.

$$\begin{aligned} P(F) &= 1 - P(\text{Sa o Pa}) \\ &= 1 - 0.038 = 0.962 \end{aligned}$$

12.7 Ejercicios

En los ejercicios 1-6 responder *sí* cuando el número pueda expresar probabilidad y *no* cuando no sea posible.

- | | | |
|------|------------------|-------------------|
| 1. 0 | 2. $\frac{2}{3}$ | 3. $-\frac{1}{2}$ |
| 4. 1 | 5. 0.00001 | 6. $\frac{5}{4}$ |

Recreación. Sea $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ el espacio muestral al tirar un dado no cargado. Determinar la probabilidad de evento en los ejercicios 7-12.

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 7. De que caiga un 5 | 8. De que caiga un número menor que 3 |
| 9. De que caiga un número mayor que 0 | 10. De que caiga un múltiplo de 3 |
| 11. De que caiga un número $n \geq 4$ | 12. De que caiga un número $n < 1$ |

Sea S el espacio muestral para el experimento de arrojar dos dados no cargados. Encontrar la probabilidad de cada evento en los ejercicios 13-18.

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------|
| 13. De que caiga un total de 7 | 14. De que caiga un total de 11 |
|--------------------------------|---------------------------------|

15. De que caiga un total de 7 u 11

16. De que caiga un total de 5 o 2

17. De que caiga un total >3

18. De que caiga un total ≤ 11

Recreación. En un juego de dados, un jugador gana en el primer tiro si obtiene un total de 7 u 11, y pierde un total de 2, 3 o 12. Cualquier otro total se convierte en su punto, y debe continuar tirando los dados hasta que repita su punto y gane, o tire un 7 y pierda. Encontrar la probabilidad del evento en los ejercicios 19-21 y responder la pregunta en el ejercicio 22.

19. De ganar en el primer tiro

20. De perder en el primer tiro

21. De que caiga un total diferente a la combinación ganadora o perdedora en el primer tiro

22. De todos los puntos 4, 5, 6, 8, 9, 10, ¿cuáles dos son los más probables que caigan? ¿Cuáles dos son los menos probables que caigan?

Recreación. Una rueda de ruleta contiene 38 ranuras numeradas 00, 0, 1, 2, 3, 4,..., 35, 36. Dieciocho de las ranuras numeradas del 1 al 36 son de color negro y las demás, rojas. Las ranuras 00 y 0 son de color verde y se les llama números de la casa. La rueda se hace girar y una bolita se desliza alrededor del borde en dirección opuesta. Al final, la bolita cae en una ranura. Encontrar la probabilidad de cada evento en los ejercicios 23-30.

23. La bolita cae en la ranura número 3

24. La bolita cae en una ranura negra

25. La bolita cae en una ranura roja

26. La bolita cae en una ranura verde

27. La bolita cae en una ranura azul

28. La bolita cae en una ranura negra o roja

29. La bolita cae en una ranura numerada impar

30. La bolita cae en la ranura número 0

Recreación. Se saca una carta de una baraja bien barajada de 52 cartas. En los ejercicios 31-44 encontrar la probabilidad de cada evento.

31. Sacar un as

32. Sacar un corazón

33. Sacar una carta negra

34. Sacar una figura

35. Sacar la reina de corazones

36. Sacar un comodín

37. Sacar un 7 o una reina

38. Sacar un 7 o una carta negra

39. Sacar un 7 o un diamante

40. Sacar una figura o una carta negra

41. Sacar una figura o un corazón

42. Sacar una figura o un 3

43. Sacar un rey y un corazón

44. Sacar una figura y un corazón

Si se reparten cinco cartas de una baraja bien barajada de 52 cartas, encontrar la probabilidad de obtener las manos indicadas en los ejercicios 45-50.

45. Cinco corazones

46. Cinco cartas negras

47. Cuatro ases y una carta que no sea un as

48. Cuatro ases y un comodín

49. Tres ases y dos reyes

50. Dos ases, dos reyes y una carta que no sea ni as ni rey

51. **Recreación.** Si la probabilidad de ganar un juego es $\frac{4}{7}$, ¿cuál es la probabilidad de perderlo?

52. **Deportes.** Si la probabilidad de que un caballo pierda una carrera es $\frac{9}{11}$, ¿cuál es la probabilidad de que gane?

53. Un niño descuelga el teléfono y marca siete dígitos al azar; ¿cuál es la probabilidad de que haya marcado su propio número?

54. Claudio ha lanzado al aire 50 veces una moneda en buen estado y ha caído cara todas las veces, conjetura que en el quincuagésimo primer intento la probabilidad de que caiga cruz ciertamente aumentará. ¿Se puede estar de acuerdo con él? ¿Cuál es la probabilidad de que caiga cruz en el quincuagésimo primer volado?

- 55. Genética.** Se ha determinado que el número de combinaciones genéticas posibles que un hijo de una pareja puede tener es 2^{48} . Suponiendo que el señor y la señora Colín tienen un hijo, ¿cuál es la probabilidad de que un segundo hijo tenga la misma composición genética?
- 56. Genética.** Una pareja planea tener tres hijos. a) Dar el espacio muestral que representa a estos hijos de acuerdo con el sexo, b) ¿cuál es la probabilidad de tener tres hijos?, c) ¿cuál es la probabilidad de tener tres hijos del mismo sexo? d) ¿cuál es la probabilidad de dos niñas y un niño?, e) ¿cuál es la probabilidad de al menos dos niños?

Para repasar:

- 57.** Utilizar el teorema del binomio para desarrollar $(2x - 5y)^4$.
- 58.** Encontrar el valor del número complejo $(2 - i)^5$.
- 59.** Encontrar el quinto término de $(x^2 - 2y)^7$.
- 60.** Encontrar el término sin x en $(x^{-1} + x)^6$.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 12

En los ejercicios 1-2 se proporciona el término n -ésimo de una sucesión. Encontrar los primeros cinco y el octavo términos de cada una.

1. $a_n = \frac{n^2 - 1}{n}$
2. $x_n = \frac{(-1)^n}{3n + 1}$
3. Escribir $\sum_{k=0}^3 \sqrt{k^2 + 1}$ sin usar la notación de sumatoria
4. Escribir $\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{4} + \frac{16}{5} + \cdots + \frac{n^2}{n+1}$ utilizando la notación de sumatoria.

En los ejercicios 5-6 determinar el segundo y tercer términos de cada sucesión.

5. $a_1 = -3$; $a_{n+1} = 1 - 2a_n$
6. $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_n = 9x_{n-1} - 5$

Evaluar cada serie en los ejercicios 7-8.

7. $\sum_{k=1}^5 (-1)^{k+1} 2^k$
8. $\sum_{m=3}^6 \frac{m+5}{m-2}$

9. Escribir los primeros seis términos de una sucesión aritmética con $a_1 = -9$ y $d = 4$, y encontrar S_{12} .
10. Para una sucesión aritmética, $a_1 = 5$, $a_n = 19$, y $S_n = 96$. Encontrar n y d .
11. Insertar tres medias aritméticas entre 17 y 5.
12. Encontrar x de modo que $x + 1$, $2x + 3$, $4x + 1$ formen una sucesión aritmética de tres términos. Además, dar la sucesión.
13. Encontrar la suma de los enteros divisibles entre 4 que estén entre -25 y 125 .
14. **Demografía.** La población de lugar está disminuyendo a razón de 400 habitantes cada año. Si su población actual es de 8 500 habitantes, ¿cuál será en nueve años?
15. **Consumo.** Un automóvil nuevo que cuesta 9 000.00 dólares se deprecia 24% el primer año, 20% el segundo, 16% el tercero y continúa de esa manera durante cinco años. Si todas las depreciaciones se aplican al costo original, ¿cuál será el valor del automóvil en cinco años?

16. Una colección de monedas de 10¢ se ordena en un arreglo triangular con 20 monedas en la fila de base, 19 en la siguiente, 18 en la próxima y así sucesivamente. Encontrar el valor de la colección
17. Escribir los primeros seis términos de una sucesión geométrica con $a_1 = \frac{1}{6}$ y $r = 2$, y encontrar S_6 .
18. Encontrar la suma de los primeros ocho términos de la sucesión geométrica con $a_1 = \frac{1}{27}$ y $a_8 = 81$.
19. Insertar cuatro medias geométricas entre -12 y $\frac{3}{8}$.
20. Encontrar un número positivo x de modo que $3x - 1$, $x + 3$, $x - 2$ formen una sucesión geométrica de tres términos en el orden indicado. Además, dar la sucesión.
21. Encontrar la suma de la sucesión geométrica infinita $8, -2, 1/2, -1/8, \dots$.
22. Encontrar los primeros cinco términos de una sucesión geométrica infinita con $a_1 = 30$ y $S = 36$.

En los ejercicios 23-24 convertir cada decimal a fracción.

23. $1.\bar{2}$

24. $5.\overline{15}$

25. **Administración.** Miguel Cruz recibe un préstamo de 1 500.00 dólares al 9% de interés compuesto anualmente. Si el préstamo lo reembolsa por completo al final de cinco años, ¿cuánto paga?
26. **Física.** Una pelota se deja caer desde una altura de 30.0 ft. Si en cada rebote se eleva a $\frac{4}{5}$ de la distancia desde la cual cayó, ¿a qué altura se eleva en el quinto rebote y qué distancia, hacia arriba y hacia abajo, ha recorrido cuando golpea el piso por sexta vez?
27. **Recreación.** Un niño al balancearse en un columpio recorre un arco de 8 m. En cada balanceo subsecuente recorre un arco que es $\frac{8}{9}$ de la longitud del arco anterior. ¿Qué distancia recorre antes de quedar en reposo?
28. **Física.** Un balón que se deja caer desde una altura de 27 ft siempre rebota $\frac{2}{3}$ de la altura que alcanzó en el rebote anterior. ¿Qué distancia recorre, hacia arriba y hacia abajo, antes de quedar en reposo?

En los ejercicios 29-30 utilizar el principio de inducción matemática para demostrar que cada proposición es cierta para todo entero positivo n .

29. $S(n): 4 + 8 + 12 + \dots + 4n = 2n(n + 1)$

30. $S(n): 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$

Evaluar cada permutación o combinación en los ejercicios 31-36.

31. ${}_3P_2$

32. ${}_3C_2$

33. ${}_5P_5$

34. ${}_5C_5$

35. ${}_8P_0$

36. ${}_8C_0$

37. ¿Cuántos números de serie formados por una letra seguida por un número de tres cifras son posibles bajo las siguientes condiciones. a) Sin imposición de otras restricciones, b) la letra no debe ser A y no se permite la repetición de dígitos, c) la letra debe ser A, B o C y el primer dígito no puede ser cero.
38. ¿De cuántas maneras pueden ser elegidos cuatro funcionarios de una organización que consta de 13 miembros?
39. ¿De cuántas maneras pueden formar una fila nueve personas?
40. ¿De cuántas maneras pueden sentarse nueve personas alrededor de una mesa circular?
41. ¿Cuántas permutaciones distinguibles hay de las letras de la palabra FLAGSTAFF?
42. **Geometría.** ¿Cuántas rectas se determinan con seis puntos si tres de ellos no son colineales?
43. **Recreación.** ¿De cuántas maneras puede seleccionarse un comité para una comida campestre, integrado por tres hombres y dos mujeres, de un grupo de ocho hombres y 11 mujeres?

44. ¿De cuántas maneras puede escogerse un comité de cuatro personas de una organización que consta de 13 miembros?
45. ¿Cuántas manos de póker de cinco cartas que consten de tres ases y dos ochos son posibles con una baraja ordinaria de 52 cartas? ¿Cuál es la probabilidad de recibir tal mano en el reparto?
46. **Educación.** ¿De cuántas maneras un estudiante puede seleccionar 10 de 15 problemas en un examen?
47. Desarrollar $(3a - z)^5$.
48. Desarrollar $(y^{-1} + y)^4$.
49. Encontrar el cuarto término en el desarrollo binomial de $(2x - y^2)^6$.
50. Encontrar el quinto término en el desarrollo binomial de $(a - 3b)^7$.

De una bolsa que contiene ocho canicas rojas y siete canicas negras, se selecciona una sin ver. En los ejercicios 51-54 determinar la probabilidad del evento indicado.

- 51.** Seleccionar una canica roja.
- 52.** Seleccionar una canica negra.
- 53.** Seleccionar una canica azul.
- 54.** Seleccionar una canica que no sea azul.

Recreación. Se extrae una carta de una baraja bien barajada de 52 cartas. En los ejercicios 55-66 determinar la probabilidad del evento indicado.

55. Sacar una espada.
57. Sacar una carta negra.
59. Sacar la sota de corazones.
61. Sacar un comodín.
63. Sacar un 10 o una reina.
65. Sacar una carta roja o un as.
67. **Recreación.** Si la probabilidad de ganar el primer premio en un certamen es 10^{-4} , ¿cuál es la probabilidad de no ganarlo?
68. **Educación.** Dado que la probabilidad de pasar inglés es 0.92, de pasar matemáticas, 0.85 y de aprobar ambos cursos es 0.78, encontrar la probabilidad de pasar inglés o matemáticas. ¿Cuál es la probabilidad de reprobador ambos cursos?
56. Sacar una figura.
58. Sacar una carta que no sea una figura.
60. Sacar un as rojo.
62. Sacar un corazón o un trébol.
64. Sacar un 10 y una reina.
66. Sacar una figura o un trébol.

Apéndice

A



Desde hace unos años las calculadoras científicas han sustituido a las tablas logarítmicas. Sin embargo, cuando no se tenga a la mano una calculadora, resultará útil la tabla 1 de logaritmos comunes. Dicha tabla se limita a una precisión de tres dígitos significativos (cuatro si se utiliza la interpolación).

Si n es cualquier número positivo, n se puede escribir en notación científica como:

$$n = m \times 10^c,$$

donde $1 \leq m < 10$ y c es un entero. Utilizando la regla del producto,

$$\log n = \log (m \times 10^c) = \log m + \log 10^c = \log m + c.$$

El $\log m$, la **mantisa** del $\log n$, es un decimal mayor que o igual a 0 y menor que 1. La **característica** c del $\log n$ es un entero. Ya que cualquier número positivo se puede escribir en notación científica, la tabla 1 de logaritmos de números entre 1.00 y 9.99 con incrementos de 0.01, permite obtener los logaritmos de cualquier número, con tres dígitos significativos.

EJEMPLO 1

a) Encontrar $\log 1.23$

Ya que $1.23 = 1.23 \times 10^0$,

$$\begin{aligned}\log 1.23 &= \log (1.23 \times 10^0) \\ &= \log 1.23 + 0\end{aligned}$$

La columna izquierda de la tabla 1 muestra números desde 1.0 hasta 9.9, mientras que los números 0 a 9 encabezan cada una de las otras columnas. Para encontrar $\log 1.23$, se busca en la columna de la izquierda 1.2, se lee en la columna encabezada por el 3 y se encuentra el decimal .0899, la mantisa del $\log 1.23$. Así,

$$\log 1.23 = .0899 + 0 = 0.0899.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732

b) Encontrar $\log 123$.

Ya que $123 = 1.23 \times 10^2$,

$$\begin{aligned}
 \log 123 &= \log (1.23 \times 10^2) \\
 &= \log 1.23 + \log 10^2 \\
 &= \log 1.23 + 2 \\
 &= .0899 + 2 = 2.0899
 \end{aligned}$$

c) Encontrar $\log 0.000123$.

Ya que $0.000123 = 1.23 \times 10^{-4}$,

$$\begin{aligned}
 \log (0.000123) &= \log (1.23 \times 10^{-4}) \\
 &= \log 1.23 + \log 10^{-4} \\
 &= .0899 + (-4) \\
 &= -3.9101.
 \end{aligned}$$

Se pudo haber dejado $\log 0.000123$ en la forma $0.0899 - 4$ en lugar de simplificarlo a -3.9101 . De hecho, para el uso de la tabla, se prefiere esta forma ya que muestra la mantisa positiva (0.0899) y la característica (-4).

Hasta ahora se ha ilustrado cómo encontrar un logaritmo de un número dado. Ahora se muestra cómo encontrar un número cuando se da su logaritmo, es decir, cómo encontrar un **antilogaritmo** (**antilog**). En el uso de la tabla 1, el logaritmo dado debe estar en forma estándar con la mantisa positiva y la característica entera.

EJEMPLO 2

a) Encontrar antilog de 2.7679.

De hecho se da que

$$\log n = 2.7679,$$

y se pide encontrar n . Ya que $\log n = 2.7679 = 0.7679 + 2$, la mantisa es .7679 y la característica es 2. En el cuerpo de la tabla 1 encontrar .7679 en la fila encabezada por 5.8 bajo la columna encabezada por 6. Así,

$$\begin{aligned}
 n &= 5.86 \times 10^2 \\
 &= 586.
 \end{aligned}$$

b) Encontrar el antilog de -2.2321 .

Primero se debe expresar



$$\frac{0.002}{0.010} - \frac{2}{10} = \frac{u}{0.0006}$$

$$u = \frac{2}{10}(0.0006) \approx 0.0001$$

$$\log 6.412 \approx \log 6.41 + 0.0001$$

$$= 0.8069 + 0.0001$$

$$= 0.8070$$

$$\log 0.006412 = 0.8070 - 3 = -2.1930$$

Si se requiere un cálculo para encontrar el antilog de un logaritmo cuya mantisa no está en la tabla 1, se puede utilizar la interpolación lineal para aproximarlos a los cuatro dígitos.

EJEMPLO 4

Encontrar el antilog de 2.4705.

La característica 2 indica dónde colocar el punto decimal en la respuesta final. Así, se puede concentrar en 0.4705. En la tabla 1, 0.4705 está entre $\log 2.95 = 0.4698$ y $\log 2.96 = 0.4713$.

x	$\log x$
2.950	0.4698
?	0.4705
2.960	0.4713

$$\frac{u}{0.010} = \frac{0.0007}{0.0015} = \frac{7}{15}$$

$$u = \frac{7}{15}(0.010) \approx 0.005$$

$$\log 2.955 \approx 0.4705$$

Así, antilog de 2.4705 es aproximadamente

$$2.955 \times 10^2 = 295.5.$$

Ejercicios del apéndice A

En los ejercicios 1-6 usar la tabla 1 para encontrar el logaritmo común de cada número.

1. 4.68

2. 46.8

3. 0.0468

4. 0.000279

5. 279

6. 2.79

En los ejercicios 7-12 usar la tabla 1 para encontrar el antilogaritmo de cada número.

7. 0.7364

8. 0.9827

9. 3.5855

10. 4.7896

11. -2.3799

12. -3.2692

En los ejercicios 13-18 usar la tabla e interpolación lineal para aproximar el logaritmo de cada número.

13. 3.278

14. 6.157

15. 437.6

16. 249.7

17. 0.003972

18. 0.0004256

En los ejercicios 19-24 usar la tabla 1 e interpolación lineal para aproximar el antilogaritmo de cada número.

19. 1.6974

20. 1.2390

21. 0.5409 - 2

22. 2.6754

23. -3.1155

24. -2.8118

B

Tabla de funciones trigonométricas e interpolación

Como las tablas de logaritmos, las tablas de funciones trigonométricas se han vuelto casi obsoletas con el advenimiento de la calculadora científica. Sin embargo, si una calculadora no tiene las funciones trigonométricas, se puede recurrir a la tabla 2 con los valores de las funciones trigonométricas para calcular ángulos con diez minutos de aproximación. Los ángulos desde $0^{\circ}00'$ hasta $45^{\circ}00'$ se encuentran abajo de la columna izquierda, mientras que, cada función trigonométrica de estos ángulos aparece en forma de lista a lo largo de la fila superior. Los ángulos desde $45^{\circ}00'$ hasta $90^{\circ}00'$ se encuentran arriba de la columna de la derecha, mientras que cada función trigonométrica de estos ángulos aparecen en forma de lista a lo largo de la fila inferior. La tabla se puede usar también para ángulos con medida en radianes, consultando las columnas tituladas "radianes".

EJEMPLO 1

Usar la tabla 2 para encontrar los valores de funciones trigonométricas.

a) $\text{sen } 52^{\circ}50'$

Buscando hacia arriba en la columna de la derecha, llegar a $52^{\circ}50'$ como se muestra abajo. Seguir hacia la columna titulada $\text{sen } \theta$ en la fila inferior para encontrar 0.7969. Así,

$$\text{sen } 52^{\circ}50' = 0.7969.$$

$37^{\circ}00'$.6458	.6018	1.662	.7536	1.327	1.252	.7986	.9250	$53^{\circ}00'$
10	487	041	655	581	319	255	969	221	50
20	516	065	649	627	311	258	951	192	40
30	.6545	.6088	1.643	.7673	1.303	1.260	.7934	.9163	30
40	574	111	636	720	295	263	916	134	20
50	603	134	630	766	288	266	898	105	10
$38^{\circ}00'$.6632	.6157	1.624	.7813	1.280	1.269	.7880	.9076	$52^{\circ}00'$

		$\cos \theta$	$\sec \theta$	$\cot \theta$	$\tan \theta$	$\csc \theta$	$\text{sen } \theta$	Radianes	Grados
								Ángulo θ	

b) $\cot 11^\circ 40'$

Buscar hacia abajo de la columna de grados para encontrar $11^\circ 40'$, después hacia 4.843 en la columna titulada " $\cot \theta$ ". Así,

$$\cot 11^\circ 40' = 4.843.$$

La tabla 2 se puede usar también para determinar un ángulo de acuerdo con el valor dado de una función trigonométrica determinada.

EJEMPLO 2

Encontrar A en grados aproximando a los $10'$ usando la tabla 2.

a) $\tan A = 0.7907$

Se busca 0.7907 en las columnas de tangentes (hay dos de dichas columnas, una titulada " $\tan \theta$ " en la parte superior, y la otra titulada " $\tan \theta$ " en la parte inferior). El valor 0.7907 se encuentra en la columna titulada " $\tan \theta$ " de la parte superior, por lo que se sigue horizontalmente hacia la izquierda para encontrar $38^\circ 20'$. Así $A = 38^\circ 20'$.

b) $\sec A = 4.560$

Localizar 4.560 en la columna de secantes (en la fila inferior) y seguir horizontalmente a la derecha para encontrar $77^\circ 20'$. Asegurarse de leer hacia arriba de la columna desde 77° , no hacia abajo desde 78° . Así, $A = 77^\circ 20'$.

Aunque la tabla 2 se puede utilizar para encontrar funciones trigonométricas de ángulos dados con diez minutos de aproximación, también puede utilizarse para aproximar ángulos al minuto más cercano con la **interpolación lineal**. Supóngase que se ilustra este proceso aproximando $\sin 28^\circ 43'$ (véase la figura 1).

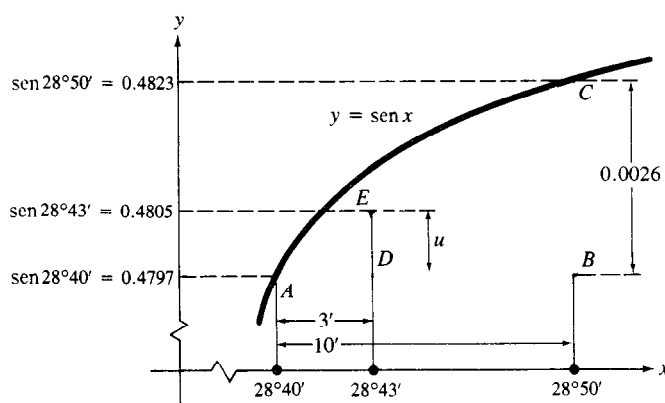


Figura 1. Interpolación

Al observar que los triángulos ABC y ADE son semejantes, se concluye que

$$\frac{3}{10} = \frac{u}{0.0026}$$

Así,

$$u = \frac{3}{10}(0.0026) \approx 0.0008.$$

Ya que $\text{sen } 28^\circ 40' < \text{sen } 28^\circ 50'$, se suma 0.0008 a $\text{sen } 28^\circ 40'$ para obtener la aproximación de $\text{sen } 28^\circ 43'$.

$$\begin{aligned}\text{sen } 28^\circ 43' &\approx \text{sen } 28^\circ 40' + 0.0008 \\ &= 0.4797 + 0.0008 \\ &= 0.4805\end{aligned}$$

La interpolación lineal se puede aplicar a cualquier función trigonométrica. Si se tiene una función decreciente como $\cos x$, $\cot x$, o $\csc x$, recuérdese restar el valor de u . Este proceso se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3

Usar la interpolación lineal para encontrar $\cot 36^\circ 26'$.



$$\begin{aligned}\frac{6}{10} &= \frac{u}{0.009} \\ u &= \frac{6}{10}(0.009) \approx 0.005\end{aligned}$$

Como $\cot 36^\circ 20' > \cot 36^\circ 30'$, se resta 0.005 a $\cot 36^\circ 20'$, lo cual da 1.360.

$$\begin{aligned}\cot 36^\circ 26' &\approx \cot 36^\circ 20' \\ &= 1.360 \\ &= 1.355\end{aligned}$$

Si en el proceso de cálculo se obtiene un valor de una función trigonométrica que no se encuentre en la tabla, se puede usar la interpolación para encontrar el ángulo con un minuto de aproximación.

EJEMPLO 4

Encontrar x aproximando al minuto más cercano si $\cos x = 0.3001$.

Usando la tabla 2, se ve que 0.3001 está entre $\cos 72^\circ 30' = 0.3007$ y $\cos 72^\circ 40' = 0.2979$.



$$\begin{aligned}\frac{u}{10} &= \frac{0.0006}{0.0028} = \frac{6}{28} \\ u &= \frac{6}{28}(10) \approx 2 \\ x &\approx 72^\circ 32'\end{aligned}$$

Ejercicios del apéndice B

En los ejercicios 1-6, usar la tabla 2 para encontrar el valor de cada función trigonométrica.

- | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|
| 1. $\sin 79^\circ 20'$ | 2. $\cos 48^\circ 50'$ | 3. $\tan 26^\circ 30'$ |
| 4. $\cot 31^\circ 10'$ | 5. $\csc 51^\circ 40'$ | 6. $\sec 63^\circ 20'$ |

En los ejercicios 7-12, usar la tabla 2 para encontrar cada ángulo de acuerdo con el valor dado de cada función trigonométrica aproximando a los $10'$ más cercanos.

- | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| 7. $\cos A = 0.8936$ | 8. $\sin A = 0.5568$ | 9. $\cot A = 0.8342$ |
| 10. $\tan A = 1.411$ | 11. $\sec A = 1.431$ | 12. $\csc A = 2.166$ |

Usar la interpolación lineal en los ejercicios 13-18 para encontrar el valor de cada función trigonométrica.

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 13. $\sin 41^\circ 17'$ | 14. $\cos 18^\circ 42'$ | 15. $\tan 81^\circ 26'$ |
| 16. $\cot 58^\circ 14'$ | 17. $\sec 40^\circ 49'$ | 18. $\csc 23^\circ 25'$ |

Usar la interpolación lineal en los ejercicios 19-24 para encontrar x aproximando al minuto más cercano.

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|----------------------|
| 19. $\sin x = 0.9215$ | 20. $\cos x = 0.1122$ | 21. $\tan x = 2.131$ |
| 22. $\cot x = 1.739$ | 23. $\sec x = 1.404$ | 24. $\csc x = 3.159$ |



Tabla 1. Logaritmos comunes

<i>n</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396
<i>n</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tabla 1. (Continuación.)

<i>n</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996
<i>n</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tabla 2. Valores de las funciones trigonométricas

Ángulo θ									
Grados	Radianes	$\text{sen } \theta$	$\text{csc } \theta$	$\text{tan } \theta$	$\text{cot } \theta$	$\text{sec } \theta$	$\text{cos } \theta$		
0°00'	.0000	.0000	Sin valor	.0000	Sin valor	1.000	1.0000	1.5708	90°00'
10	.029	.029	343.8	.029	343.8	.000	.000	.679	50
20	.058	.058	171.9	.058	171.9	.000	.000	.650	40
30	.0087	.0087	114.6	.0087	114.6	1.000	1.0000	1.5621	30
40	.116	.116	85.95	.116	85.94	.000	.9999	.592	20
50	.145	.145	68.76	.145	68.75	.000	.999	.563	10
1°00'	.0175	.0175	57.30	.0175	57.29	1.000	.9998	1.5533	89°00'
10	.204	.204	49.11	.204	49.10	.000	.998	.504	50
20	.233	.233	42.98	.233	42.96	.000	.997	.475	40
30	.0262	.0262	38.20	.0262	38.19	1.000	.9997	1.5446	30
40	.291	.291	34.38	.291	34.37	.000	.996	.417	20
50	.320	.320	31.26	.320	31.24	.001	.995	.388	10
2°00'	.0349	.0349	28.65	.0349	28.64	1.001	.9994	1.5359	88°00'
10	.378	.378	26.45	.378	26.43	.001	.993	.330	50
20	.407	.407	24.56	.407	24.54	.001	.992	.301	40
30	.0436	.0436	22.93	.0437	22.90	1.001	.9990	1.5272	30
40	.465	.465	21.49	.466	21.47	.001	.989	.243	20
50	.495	.494	20.23	.495	20.21	.001	.988	.213	10
3°00'	.0524	.0523	19.11	.0524	19.08	1.001	.9986	1.5184	87°00'
10	.553	.552	18.10	.553	18.07	.002	.985	.155	50
20	.582	.581	17.20	.582	17.17	.002	.983	.126	40
30	.0611	.0610	16.38	.0612	16.35	1.002	.9981	1.5097	30
40	.640	.640	15.64	.641	15.60	.002	.980	.068	20
50	.669	.669	14.96	.670	14.92	.002	.978	.039	10
4°00'	.0698	.0698	14.34	.0699	14.30	1.002	.9976	1.5010	86°00'
10	.727	.727	13.76	.729	13.73	.003	.974	.981	50
20	.756	.756	13.23	.758	13.20	.003	.971	.952	40
30	.0785	.0785	12.75	.0787	12.71	1.003	.9969	1.4923	30
40	.814	.814	12.29	.816	12.25	.003	.967	.893	20
50	.844	.843	11.87	.846	11.83	.004	.964	.864	10
5°00'	.0873	.0872	11.47	.0875	11.43	1.004	.9962	1.4835	85°00'
10	.902	.901	11.10	.904	11.06	.004	.959	.806	50
20	.931	.929	10.76	.934	10.71	.004	.957	.777	40
30	.0960	.0958	10.43	.0963	10.39	1.005	.9954	1.4748	30
40	.989	.987	10.13	.992	10.08	.005	.951	.719	20
50	.1018	.1016	9.839	.1022	9.788	.005	.948	.690	10
6°00'	.1047	.1045	9.567	.1051	9.514	1.006	.9945	1.4661	84°00'
		$\text{cos } \theta$	$\text{sec } \theta$	$\text{cot } \theta$	$\text{tan } \theta$	$\text{csc } \theta$	$\text{sen } \theta$	Radianes	Grados
								Ángulo θ	

Tabla 2. (Continuación.)

Ángulo θ									
Grados	Radianes	sen θ	csc θ	tan θ	cot θ	sec θ	cos θ		
6°00'	.1047	.1045	9.567	.1051	9.514	1.006	.9945	1.4661	84°00'
10	076	074	9.309	080	9.255	006	942	632	50
20	105	103	9.065	110	9.010	006	939	603	40
30	.1134	.1132	8.834	.1139	8.777	1.006	.9936	1.4573	30
40	164	161	8.614	169	8.556	007	932	544	20
50	193	190	8.405	198	8.345	007	929	515	10
7°00'	.1222	.1219	8.206	.1228	8.144	1.008	.9925	1.4486	83°00'
10	251	248	8.016	257	7.953	008	922	457	50
20	280	276	7.834	287	7.770	008	918	428	40
30	.1309	.1305	7.661	.1317	7.596	1.009	.9914	1.4399	30
40	338	334	7.496	346	7.429	009	911	370	20
50	367	363	7.337	376	7.269	009	907	341	10
8°00'	.1396	.1392	7.185	.1405	7.115	1.010	.9903	1.4312	82°00'
10	425	421	7.040	435	6.968	010	899	283	50
20	454	449	6.900	465	6.827	011	894	254	40
30	.1484	.1478	6.765	.1495	6.691	1.011	.9890	1.4224	30
40	513	507	6.636	524	6.561	012	886	195	20
50	542	536	6.512	554	6.435	012	881	166	10
9°00'	.1571	.1564	6.392	.1584	6.314	1.012	.9877	1.4137	81°00'
10	600	593	277	614	197	013	872	108	50
20	629	622	166	644	084	013	868	079	40
30	.1658	.1650	6.059	.1673	5.976	1.014	.9863	1.4050	30
40	687	679	5.955	703	871	014	858	1.4021	20
50	716	708	855	733	769	015	853	992	10
10°00'	.1745	.1736	5.759	.1763	5.671	1.015	.9848	1.3963	80°00'
10	774	765	665	793	576	016	843	934	50
20	804	794	575	823	485	016	838	904	40
30	.1833	.1822	5.487	.1853	5.396	1.017	.9833	1.3875	30
40	862	851	403	883	309	018	827	846	20
50	891	880	320	914	226	018	822	817	10
11°00'	.1920	.1908	5.241	.1944	5.145	1.019	.9816	1.3788	79°00'
10	949	937	164	974	066	019	811	759	50
20	978	965	089	.2004	4.989	020	805	730	40
30	.2007	.1994	5.016	.2035	4.915	1.020	.9799	1.3701	30
40	036	.2022	4.945	065	843	021	793	672	20
50	065	051	876	095	773	022	787	643	10
12°00'	.2094	.2079	4.810	.2126	4.705	1.022	.9781	1.3614	78°00'
10	123	108	745	156	638	023	775	584	50
20	153	136	682	186	574	024	769	555	40
30	.2182	.2164	4.620	.2217	4.511	1.024	.9763	1.3526	30
40	211	193	560	247	449	025	757	497	20
50	240	221	502	278	390	026	750	468	10
13°00'	.2269	.2250	4.445	.2309	4.331	1.026	.9744	1.3439	77°00'
		cos θ	sec θ	cot θ	tan θ	csc θ	sen θ	Radianes	Grados
									Ángulo θ

Tabla 2. (Continuación.)

Ángulo θ									
Grados	Radianes	$\text{sen } \theta$	$\text{csc } \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\cos \theta$		
13°00'	.2269	.2250	4.445	.2309	4.331	1.026	.9744	1.3439	77°00'
10	298	278	390	339	275	027	737	410	50
20	327	306	336	370	219	028	730	381	40
30	.2356	.2334	4.284	.2401	4.165	1.028	.9724	1.3352	30
40	385	363	232	432	113	029	717	323	20
50	414	391	182	462	061	030	710	294	10
14°00'	.2443	.2419	4.134	.2493	4.011	1.031	.9703	1.3265	76°00'
10	473	447	086	524	3.962	031	696	235	50
20	502	476	039	555	914	032	689	206	40
30	.2531	.2504	3.994	.2586	3.867	1.033	.9681	1.3177	30
40	560	532	950	617	821	034	674	148	20
50	589	560	906	648	776	034	667	119	10
15°00'	.2618	.2588	3.864	.2679	3.732	1.035	.9659	1.3090	75°00'
10	647	616	822	711	689	036	652	061	50
20	676	644	782	742	647	037	644	032	40
30	.2705	.2672	3.742	.2773	3.606	1.038	.9636	1.3003	30
40	734	700	703	805	566	039	628	974	20
50	763	728	665	836	526	039	621	945	10
16°00'	.2793	.2756	3.628	.2867	3.487	1.040	.9613	1.2915	74°00'
10	822	784	592	899	450	041	605	886	50
20	851	812	556	931	412	042	596	857	40
30	.2880	.2840	3.521	.2962	3.376	1.043	.9588	1.2828	30
40	909	868	487	994	340	044	580	799	20
50	938	896	453	.3026	305	045	572	770	10
17°00'	.2967	.2924	3.420	.3057	3.271	1.046	.9563	1.2741	73°00'
10	996	952	388	089	237	047	555	712	50
20	.3025	979	357	121	204	048	546	683	40
30	.3054	.3007	3.326	.3153	3.172	1.048	.9537	1.2654	30
40	083	035	295	185	140	049	528	625	20
50	113	062	265	217	108	050	520	595	10
18°00'	.3142	.3090	3.236	.3249	3.078	1.051	.9511	1.2566	72°00'
10	171	118	207	281	047	052	502	537	50
20	200	145	179	314	018	053	492	508	40
30	.3229	.3173	3.152	.3346	2.989	1.054	.9483	1.2479	30
40	258	201	124	378	960	056	474	450	20
50	287	228	098	411	932	057	465	421	10
19°00'	.3316	.3256	3.072	.3443	2.904	1.058	.9455	1.2392	71°00'
10	345	283	046	476	877	059	446	363	50
20	374	311	021	508	850	060	436	334	40
30	.3403	.3338	2.996	.3541	2.824	1.061	.9426	1.2305	30
40	432	365	971	574	798	062	417	275	20
50	462	393	947	607	773	063	407	246	10
20°00'	.3491	.3420	2.924	.3640	2.747	1.064	.9397	1.2217	70°00'
		$\cos \theta$	$\sec \theta$	$\cot \theta$	$\tan \theta$	$\csc \theta$	$\sin \theta$	Radianes	Grados
								Ángulo θ	

Tabla 2. (Continuación.)

Ángulo θ									
Grados	Radianes	$\text{sen } \theta$	$\text{csc } \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\cos \theta$		
20°00'	.3491	.3420	2.924	.3640	2.747	1.064	.9397	1.2217	70°00'
10	520	448	901	673	723	065	387	188	50
20	549	475	878	706	699	066	377	159	40
30	.3578	.3502	2.855	.3739	2.675	1.068	.9367	1.2130	30
40	607	529	833	772	651	069	356	101	20
50	636	557	812	805	628	070	346	072	10
21°00'	.3665	.3584	2.790	.3839	2.605	1.071	.9336	1.2043	69°00'
10	694	611	769	872	583	072	325	1.2014	50
20	723	638	749	906	560	074	315	985	40
30	.3752	.3665	2.729	.3939	2.539	1.075	.9304	1.1956	30
40	782	692	709	973	517	076	293	926	20
50	811	719	689	.4006	496	077	283	897	10
22°00'	.3840	.3746	2.669	.4040	2.475	1.079	.9272	1.1868	68°00'
10	869	773	650	074	455	080	261	839	50
20	898	800	632	108	434	081	250	810	40
30	.3927	.3827	2.613	.4142	2.414	1.082	.9239	1.1781	30
40	956	854	595	176	394	084	228	752	20
50	985	881	577	210	375	085	216	723	10
23°00'	.4014	.3907	2.559	.4245	2.356	1.086	.9205	1.1694	67°00'
10	043	934	542	279	337	088	194	665	50
20	072	961	525	314	318	089	182	636	40
30	.4102	.3987	2.508	.4348	2.300	1.090	.9171	1.1606	30
40	131	.4014	491	383	282	092	159	577	20
50	160	041	475	417	264	093	147	548	10
24°00'	.4189	.4067	2.459	.4452	2.246	1.095	.9135	1.1519	66°00'
10	218	094	443	487	229	096	124	490	50
20	247	120	427	522	211	097	112	461	40
30	.4276	.4147	2.411	.4557	2.194	1.099	.9100	1.1432	30
40	305	173	396	592	177	100	088	403	20
50	334	200	381	628	161	102	075	374	10
25°00'	.4363	.4226	2.366	.4663	2.145	1.103	.9063	1.1345	65°00'
10	392	253	352	699	128	105	051	316	50
20	422	279	337	734	112	106	038	286	40
30	.4451	.4305	2.323	.4770	2.097	1.108	.9026	1.1257	30
40	480	331	309	806	081	109	013	228	20
50	509	358	295	841	066	111	001	199	10
26°00'	.4538	.4384	2.281	.4877	2.050	1.113	.8988	1.1170	64°00'
10	567	410	268	913	035	114	975	141	50
20	596	436	254	950	020	116	962	112	40
30	.4625	.4462	2.241	.4986	2.006	1.117	.8949	1.1083	30
40	654	488	228	.5022	1.991	119	936	054	20
50	683	514	215	059	977	121	923	1.1025	10
27°00'	.4712	.4540	2.203	.5095	1.963	1.122	.8910	1.0996	63°00'
		$\cos \theta$	$\sec \theta$	$\cot \theta$	$\tan \theta$	$\csc \theta$	$\text{sen } \theta$	Radianes	Grados
								Ángulo θ	

Tabla 2. (Continuación.)

Ángulo θ									
Grados	Radianes	$\text{sen } \theta$	$\text{csc } \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\cos \theta$		
27°00'	.4712	.4540	2.203	.5095	1.963	1.122	.8910	1.0996	63°00'
10	741	566	190	132	949	124	897	966	50
20	771	592	178	169	935	126	884	937	40
30	.4800	.4617	2.166	.5206	1.921	1.127	.8870	1.0908	30
40	829	643	154	243	907	129	857	879	20
50	858	669	142	280	894	131	843	850	10
28°00'	.4887	.4695	2.130	.5317	1.881	1.133	.8829	1.0821	62°00'
10	916	720	118	354	868	134	816	792	50
20	945	746	107	392	855	136	802	763	40
30	.4974	.4772	2.096	.5430	1.842	1.138	.8788	1.0734	30
40	.5003	797	085	467	829	140	774	705	20
50	032	823	074	505	816	142	760	676	10
29°00'	.5061	.4848	2.063	.5543	1.804	1.143	.8746	1.0647	61°00'
10	091	874	052	581	792	145	732	617	50
20	120	899	041	619	780	147	718	588	40
30	.5149	.4924	2.031	.5658	1.767	1.149	.8704	1.0559	30
40	178	950	020	696	756	151	689	530	20
50	207	975	010	735	744	153	675	501	10
30°00'	.5236	.5000	2.000	.5774	1.732	1.155	.8660	1.0472	60°00'
10	265	025	1.990	812	720	157	646	443	50
20	294	050	980	851	709	159	631	414	40
30	.5323	.5075	1.970	.5890	1.698	1.161	.8616	1.0385	30
40	352	100	961	930	686	163	601	356	20
50	381	125	951	969	675	165	587	327	10
31°00'	.5411	.5150	1.942	.6009	1.664	1.167	.8572	1.0297	59°00'
10	440	175	932	048	653	169	557	268	50
20	469	200	923	088	643	171	542	239	40
30	.5498	.5225	1.914	.6128	1.632	1.173	.8526	1.0210	30
40	527	250	905	168	621	175	511	181	20
50	556	275	896	208	611	177	496	152	10
32°00'	.5585	.5299	1.887	.6249	1.600	1.179	.8480	1.0123	58°00'
10	614	324	878	289	590	181	465	094	50
20	643	348	870	330	580	184	450	065	40
30	.5672	.5373	1.861	.6371	1.570	1.186	.8434	1.0036	30
40	701	398	853	412	560	188	418	1.0007	20
50	730	422	844	453	550	190	403	977	10
33°00'	.5760	.5446	1.836	.6494	1.540	1.192	.8387	.9948	57°00'
10	789	471	828	536	530	195	371	919	50
20	818	495	820	577	520	197	355	890	40
30	.5847	.5519	1.812	.6619	1.511	1.199	.8339	.9861	30
40	876	544	804	661	501	202	323	832	20
50	905	568	796	703	1.492	204	307	803	10
34°00'	.5934	.5592	1.788	.6745	1.483	1.206	.8290	.9774	56°00'
		$\cos \theta$	$\sec \theta$	$\cot \theta$	$\tan \theta$	$\csc \theta$	$\text{sen } \theta$	Radianes	Grados
								Angle θ	

Tabla 2. (Continuación.)

Ángulo θ									
Grados	Radianes	$\text{sen } \theta$	$\text{csc } \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\cos \theta$		
34°00'	.5934	.5592	1.788	.6745	1.483	1.206	.8290	.9774	56°00'
10	963	616	781	787	473	209	274	745	50
20	992	640	773	830	464	211	258	716	40
30	.6021	.5664	1.766	.6873	1.455	1.213	.8241	.9687	30
40	050	688	758	916	446	216	225	657	20
50	080	712	751	959	437	218	208	628	10
35°00'	.6109	.5736	1.743	.7002	1.428	1.221	.8192	.9599	55°00'
10	138	760	736	046	419	223	175	570	50
20	167	783	729	089	411	226	158	541	40
30	.6196	.5807	1.722	.7133	1.402	1.228	.8141	.9512	30
40	225	831	715	177	393	231	124	483	20
50	254	854	708	221	385	233	107	454	10
36°00'	.6283	.5878	1.701	.7265	1.376	1.236	.8090	.9425	54°00'
10	312	901	695	310	368	239	073	396	50
20	341	925	688	355	360	241	056	367	40
30	.6370	.5948	1.681	.7400	1.351	1.244	.8039	.9338	30
40	400	972	675	445	343	247	021	308	20
50	429	995	668	490	335	249	004	279	10
37°00'	.6458	.6018	1.662	.7536	1.327	1.252	.7986	.9250	53°00'
10	487	041	655	581	319	255	969	221	50
20	516	065	649	627	311	258	951	192	40
30	.6545	.6088	1.643	.7673	1.303	1.260	.7934	.9163	30
40	574	111	636	720	295	263	916	134	20
50	603	134	630	766	288	266	898	105	10
38°00'	.6632	.6157	1.624	.7813	1.280	1.269	.7880	.9076	52°00'
10	661	180	618	860	272	272	862	047	50
20	690	202	612	907	265	275	844	.9018	40
30	.6720	.6225	1.606	.7954	1.257	1.278	.7826	.8988	30
40	749	248	601	.8002	250	281	808	959	20
50	778	271	595	050	242	284	790	930	10
39°00'	.6807	.6293	1.589	.8098	1.235	1.287	.7771	.8901	51°00'
10	836	316	583	146	228	290	753	872	50
20	865	338	578	195	220	293	735	843	40
30	.6894	.6361	1.572	.8243	1.213	1.296	.7716	.8814	30
40	923	383	567	292	206	299	698	785	20
50	952	406	561	342	199	302	679	756	10
40°00'	.6981	.6428	1.556	.8391	1.192	1.305	.7660	.8727	50°00'
10	.7010	450	550	441	185	309	642	698	50
20	039	472	545	491	178	312	623	668	40
30	.7069	.6494	1.540	.8541	1.171	1.315	.7604	.8639	30
40	098	517	535	591	164	318	585	610	20
50	127	539	529	642	157	322	566	581	10
41°00'	.7156	.6561	1.524	.8693	1.150	1.325	.7547	.8552	49°00'
		$\cos \theta$	$\sec \theta$	$\cot \theta$	$\tan \theta$	$\csc \theta$	$\sin \theta$	Radianes	Grados
								Ángulo θ	

Tabla 2. (Continuación.)

Ángulo θ									
Grados	Radianes	$\text{sen } \theta$	$\text{csc } \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\cos \theta$		
41°00'	.7156	.6561	1.524	.8693	1.150	1.325	.7547	.8552	49°00'
10	185	583	519	744	144	328	528	523	50
20	214	604	514	796	137	332	509	494	40
30	.7243	.6626	1.509	.8847	1.130	1.335	.7490	.8465	30
40	272	648	504	899	124	339	470	436	20
50	301	670	499	952	117	342	451	407	10
42°00'	.7330	.6691	1.494	.9004	1.111	1.346	.7431	.8378	48°00'
10	359	713	490	057	104	349	412	348	50
20	389	734	485	110	098	353	392	319	40
30	.7418	.6756	1.480	.9163	1.091	1.356	.7373	.8290	30
40	447	777	476	217	085	360	353	261	20
50	476	799	471	271	079	364	333	232	10
43°00'	.7505	.6820	1.466	.9325	1.072	1.367	.7314	.8203	47°00'
10	534	841	462	380	066	371	294	174	50
20	563	862	457	435	060	375	274	145	40
30	.7592	.6884	1.453	.9490	1.054	1.379	.7254	.8116	30
40	621	905	448	545	048	382	234	087	20
50	650	926	444	601	042	386	214	058	10
44°00'	.7679	.6947	1.440	.9657	1.036	1.390	.7193	.8029	46°00'
10	709	967	435	713	030	394	173	.7999	50
20	738	988	431	770	024	398	153	970	40
30	.7767	.7009	1.427	.9827	1.018	1.402	.7133	.7941	30
40	796	030	423	884	012	406	112	912	20
50	825	050	418	942	006	410	092	883	10
45°00'	.7854	.7071	1.414	1.000	1.000	1.414	.7071	.7854	45°00'
		$\cos \theta$	$\sec \theta$	$\cot \theta$	$\tan \theta$	$\csc \theta$	$\text{sen } \theta$	Radianes	Grados
								Ángulo θ	

1. verdadero 3. falso 5. falso 7. verdadero 9. verdadero 11. falso 13. verdadero 15. falso 17. verdadero
 19. verdadero 21. verdadero 23. falso 25. propiedad conmutativa de la suma 27. ley simétrica de la igualdad
 29. identidad aditiva 31. $(x + 3) + 7$ 33. $a < 9$ 35. -15 37. -3 39. $10 - x$ 41. $-\frac{4}{9}$ 43. $-\frac{1}{2}$
 45. $\frac{3}{4}$ 47. $y - x$ 49. 3 51. -3 53. 4 55. 10 57. 5 59. $y - 7$ 61. $y - x$ 63. Un conjunto de
 números es $a = 1$, $b = 2$ y $c = 3$. 65. Se comienza con $0 - a$, se usa la definición de resta y la propiedad de la identidad aditiva.
 67. Se comienza con $a + c = a + c$ y se usa el axioma de sustitución. 69. Se comienza con $-a + (-(-a)) = 0$ y $0 = (-a) + a$.
 Se utiliza la ley transitiva y luego la propiedad de igualdad con respecto a la suma. 71. Se comienza por utilizar el hecho de
 que $-(a + b) = (-1)(a + b)$.

1. x^7 3. $6x$ 5. b^6 7. $\frac{a^3}{b^2}$ (no puede simplificarse) 9. 1 11. $\frac{1}{8x}$ 13. $2x^4$ 15. 1 17. $\frac{xy}{y+x}$
 19. $\frac{1}{4x^4y^6}$ 21. $\frac{x^7}{4y^4}$ 23. $\frac{x^{24}y^6}{27}$ 25. $\frac{x^{12}y^4}{4}$ 27. $\frac{4a^4}{b^{10}}$ 29. $\frac{a^8}{4b^4}$ 31. 4.56×10^8 33. 1×10^{-2}
 35. 235 000 000 37. 0.000 000 041 7 39. 1.17×10^2 41. 1.18×10^9 43. $\$2.95 \times 10^3 = \$2\,950$
 45. 1.50×10^{11} m 47. verdadero 48. falso 49. verdadero 50. verdadero

1. binomio; 3 3. trinomio; 7 5. $x^2 + 2x$ 7. $10a^2b^2 + 5ab - 3$ 9. $8x^2 - 7x + 5$ 11. $9a^2b^2 - 12ab$
 13. $a^3 + 2a$ 15. $2y^5 + 2y^2 - 8$ 17. $-a^4b^2 - 13a^2b^4 + 10$ 19. $7a^2b^2 + 2$ 21. $18x^6y^4$ 23. $-12a^3b^5 + 20a^2b^4$
 25. $a^2 + ab - 2b^2$ 27. $10x^2y^2 - 29xy - 21$ 29. $x^2 - 4y^2$ 31. $x^2 + 4xy + 4y^2$ 33. $x^2 - 4xy + 4y^2$ 35. $9a^4 - b^4$
 37. $12x^2 - 32xy + 21y^2 + 4x - 6y$ 39. $12a^3 - 34a^2b + 35ab^2 - 49b^3$ 41. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 10x - 20y + 25$
 43. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 25$ 45. $x^{3n}y^n - x^{2n}y^{2n}$ 47. $x^{2n} - y^{2n}$ 49. $x^{2n+2} + 2x^{n+1}y^{n+1} + y^{2n+2}$
 51. $2x^4 - 2x^3y - 11x^2y^2 + 17xy^3 - 6y^4$ 53. $y^3 - 6y^2 + 5y - \frac{1}{y^2}$ 55. $-3x^2 + xy - 2x^3y^2$ 57. $a^2 + a + 2 - \frac{1}{a-1}$
 59. $x + 3y$ 61. $x^3 - x^2 + 3x - 1$ 63. $3xy(2xy - 1)$ 65. $(5ab + 3)(a - 2)$ 67. $(2a^2b^2 - 3c^2)(4ab - 1)$
 69. $(x + 1)(x + 7)$ 71. $(u + 4)(u + 5)$ 73. $(3x + 1)(x - 2)$ 75. $(5u - v)(u + 5v)$ 77. $(2x + 3y)(2x - 3y)$
 79. $(2x + 3y)^2$ 81. $(3u - v)(9u^2 + 3uv + v^2)$ 83. $6(x + y)(x - y)$ 85. $2(2x - 5y)(7x + 3y)$ 87. $(uv - 2)(5uv - 1)$
 89. $3(u - 10v)^2$ 91. $4(2x + y^3)(4x^2 - 2xy^3 + y^6)$ 93. primo 95. $-5(u - 6v)(u - 8v)$ 97. $(u + 2v)(3u - 8v)$
 99. $(u - v + 4)(u - v - 4)$ 101. $(3u^3 - 5v^2)^2$ 103. $(3x + 5y)(5x + 3y)$ 105. $(x + y + u + v)(x + y + u - v)$
 107. $(x^2 + 5y^2)(x^2 - 3y^2)$ 109. $(2u + v)(u - v)(4u^2 - 2uv + v^2)(u^2 + uv + v^2)$ 111. $(2x^n + y^n)(2x^n - y^n)$
 113. $(3x^n - 2y^n)(9x^{2n} + 6x^ny^n + 4y^{2n})$ 115. $(x - 2y)(x + 2y + 6)$ 117. $(u + 5v + w)(u + 5v - w)$
 119. $(x + y)(x^2 + xy + y^2)$ 121. (a) $6u^2 + 11$ (b) $\$1361$ 123. (a) $\pi(R + r)(R - r)$ (b) 255.47 m^2

c) aproximadamente 341 125. $\frac{1}{9x^6y^4}$ 126. $\frac{4}{a^8b^{12}}$ 127. $\frac{2x^7y^2}{5}$ 128. $\frac{a^6}{2b^{14}}$ 129. $\frac{9y^9}{x^{20}}$ 130. $\frac{9}{a^{10}b^5}$

[1.4]

1. $x = -7$; $y = 2$, 3 3. $a = 0$; $a = -b$ 5. si 7. $\frac{7y^2}{3x}$ 9. $\frac{x(2x+3)}{3-x}$ 11. $\frac{xy(x+y)}{2}$ 13. $\frac{5xy}{12(x^2-y^2)}$
 15. $\frac{5(x-1)}{(x-3)(x+4)}$ 17. 1 19. $\frac{(y-1)(y+2)}{2(y-2)}$ 21. $\frac{x(u+x)}{v-w}$ 23. $x-2y$ 25. x^2y^2
 27. $5x^2(x-3)(x^2+3x+9)$ 29. $\frac{3y-1}{y^2}$ 31. $\frac{-2}{a-2}$ 33. $\frac{3(7x-6)}{5(x-2)(x+2)}$ 35. $\frac{1}{y+1}$ 37. $\frac{21x-16}{(x-6)(x-1)}$
 39. $\frac{11x^2+46x+80}{12(x-2)(x+2)(x+1)}$ 41. $\frac{y^2+yx+x^2}{y^2}$ 43. $\frac{x-2}{x}$ 45. $\frac{x+4}{x+2}$ 47. $-a^2$ 49. $\frac{-2x-h}{x^2(x+h)^2}$
 51. $\frac{6(2x+1)(x+1)}{(4x+3)^2}$ 53. $\frac{ab}{a+b}$ 55. $\frac{v+u}{uv}$ 57. $\frac{ab}{a+3b}$ 59. $\frac{u(1+uv)}{1+u^2+uv}$ 60. $10(x+10y)(x-10y)$
 61. $(3u-7v)(2u+5v)$ 62. $(3u-4v)(9u^2+12uv+16v^2)$ 63. $4a^3b^2-3a^2b^3+9$ 64. $27x^3+125y^3$
 65. $4x^3-3x^2+2x-5$ 66. verdadero 67. verdadero 68. verdadero 69. falso 70. a) y^2 b) y^3
 71. a) $4x^2$ b) $8x^3$ 72. a) $9z^4$ b) $27z^6$

[1.5]

1. 9 3. -5 5. $2a^3$ 7. $-3ab^2$ 9. $x+5$ 11. 100 13. $28\sqrt[3]{2}$ 15. $2xy\sqrt[3]{x^2y}$ 17. $\frac{5x}{y}$ 19. $5xy$
 21. x^2v^3 23. $2xy^2\sqrt[4]{x^2y}$ 25. $5x\sqrt{5}$ 27. $2a^3b^4$ 29. $5x^2y^3\sqrt{3xy}$ 31. $\frac{5a^3b}{2}$ 33. $2(x+y)\sqrt[4]{2(x+y)}$ 35. $\frac{y^6}{8x^9}$
 37. $27\sqrt{3}$ 39. $21\sqrt[4]{3}$ 41. $16x\sqrt{2xy}$ 43. $2+\sqrt{3}$ 45. $\frac{5\sqrt{30}}{9}$ 47. $\frac{2\sqrt{3xy}}{3y}$ 49. $\frac{\sqrt[3]{12xy^2}}{2y}$ 51. $\frac{2a\sqrt[4]{ab}}{b}$
 53. $-(\sqrt{3}+\sqrt{5})$ 55. $\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}$ 57. $\frac{28\sqrt{5a}}{5}$ 59. $\frac{x-y}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}$ 61. 0.819 63. 2.2 65. $\frac{1}{x-8y}$
 66. $\frac{-2a-13}{(a+3)(a-3)(a-4)}$ 67. $\frac{y^2}{x^2}$ 68. $\frac{u+v}{uv-1}$ 69. $9u^2-12uv+4v^2+6u-4v+1$ 70. $-x^2y^2-3xy^2+4xy$

Ejercicios de repaso del capítulo 1

1. falso 2. verdadero 3. falso 4. verdadero 5. ley asociativa de la suma 6. ley transitiva de $<$ 7. b 8. -7
 9. $-x$ 10. $\frac{1}{2}$ 11. $4\sqrt{7}$ 12. $\frac{5}{x^2}$ 13. $\frac{3}{y}$ 14. x^2y^6 15. $\frac{y^3}{125x^9}$ 16. 3.29×10^{-13} 17. 1.57×10^{10}
 18. $11x^2y^2-4xy+9$ 19. $-x^2-7y^2-x-2y$ 20. $8u^3v^2-4u^2v^3-u^2v^2+2$ 21. $-10x^4y^3+35x^5y^3$
 22. $49x^2-28xy+4y^2$ 23. $9a^2-64b^2$ 24. $10a^4+a^2b-2b^2$ 25. $10u^3+u^2v-19uv^2+8v^3$
 26. $9x^2-12xy+4y^2-30x+20y+25$ 27. $-2ab+4-\frac{7b^2}{a}$ 28. $x^2-xy-y^2-\frac{6y^3}{x-3y}$ 29. $5xy^2(2xy-3)$
 30. $(2x-3)(x-2y)$ 31. $(3a-4b)(3a+4b)$ 32. $(3a+7b)(a-2b)$ 33. $2(3x+y^2)(9x^2-3xy^2+y^4)$ 34. $(5x+3y)^2$
 35. $(2u-3v)(4u+5v)$ 36. $(5x-4y)(25x^2+20xy+16y^2)$ 37. $(4x-7y)^2$ 38. $(u+v)(u-v)(2u^2+v^2)$
 39. $(x+y-5)(x-y+5)$ 40. $(3x^n+y^n)(3x^n-y^n)$ 41. 1, 2 42. $a=2$, -2 ; $b=-7$ 43. si 44. no
 45. $\frac{12a}{25b^2}$ 46. -1 47. $\frac{x+8}{x-7}$ 48. $\frac{a-2}{a-5}$ 49. $\frac{(a-b)(a+5)}{a-1}$ 50. $(a-b)^2(a^2+ab+b^2)$
 51. $(a-1)(a-6)^2$ 52. $\frac{3-2y}{y(y+1)}$ 53. $\frac{3x+4y}{x+y}$ 54. $-\frac{a}{b}$ 55. $\frac{a-2}{a-5}$ 56. -3 57. no un número real
 58. $3a^2$ 59. $3a^2b^5$ 60. $12xy\sqrt{3}$ 61. $2ab^3$ 62. $\frac{2ab\sqrt[4]{b}}{3}$ 63. $40\sqrt{5}$ 64. $-14y\sqrt[3]{3x}$ 65. $3\sqrt[3]{6}-7$
 66. $\frac{2x+3\sqrt{xy}+y}{4x-y}$ 67. $\frac{58\sqrt{10a}}{5}$ 68. $-\frac{3x^2}{y^2}$ 69. $2a^3b^3\sqrt[3]{b}$ 70. $\frac{1}{729x^5y^{12}}$ 71. 9.46×10^{12} km
 72. $\frac{-2x^2+3}{4x^4}$ 73. 1.12s; \$27 440 74. 611 ft

Capítulo 2

[2.1]

1. $\frac{1}{2}$ 3. 6.625 5. $\frac{7}{2}$ 7. $\frac{13}{11}$ 9. sin solución 11. todo número real 13. 3 15. -7 17. 3 19. 2
 21. 4 23. -1 25. sin solución 27. 3 29. 1 31. -11 33. 20 35. sin solución 37. $\frac{2}{3}$ 39. 2, -4
 41. -2 43. 4, $-\frac{2}{3}$ 45. $-\frac{1}{2}$ 47. todos los números $y \geq 1$ 49. $a = \frac{5c-2b}{3}$ 51. $y = \frac{x}{z^2}$ 53. $a = c - 2\sqrt{cb}$

55. $h = \frac{2A}{b_1 + b_2}$ 57. $r = \frac{A - P}{Pr}$ 59. $r_2 = \frac{Rr_1}{r_1 - R}$ 61. $g = \frac{2(h - vt)}{t^2}$ 63. -9.531 65. 2.218 67. 2
 69. -2 71. no 73. b^{12} 74. $\frac{1}{3y}$ 75. $\frac{3}{y}$ 76. $24u^2 + 2uv - v^2$ 77. $-24u^3v^3 + 2u^2v^2 + 47uv - 15$ 78. $-x$
 79. $\frac{7}{(x-7)^2}$ 80. $\frac{5a^3b^2\sqrt{5a}}{2}$

1. $\frac{17}{3}$ 3. 35, 37, 39 5. 84 7. Samuel tiene 28, Humberto tiene 14 9. $\frac{7}{12}$ 11. \$2.10 13. \$23 000 15. \$1 450
 17. $116^\circ, 37^\circ, 27^\circ$ 19. 420 m por 460 m 21. 4.2 días 23. 31.5 min 25. 2.9 días 27. 2.5 h 29. 480 mi/h
 31. 530 mi/h 33. 25 mi/h 35. 81 lb 37. 105 ft 39. ± 15 41. 3
 43. 4 45. 330 hertz, 396 hertz 47. \$6000 49. 1.5 h 51. $-\frac{1}{2}$ 52. $\frac{22}{3}$ 53. $1, \frac{7}{5}$ 54. $r = \frac{S - a_n}{S}$
 55. $(x-6)^2$ 56. $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2$ 57. 3 58. $\sqrt{17}$

1. 5, -2 3. 6, -1 5. $-\frac{1}{2}$ 7. 0, $-\frac{3}{2}$ 9. 0, $-\frac{3}{5}$ 11. ± 6 13. ± 5 15. 2, -4 17. 16 19. $\frac{1}{4}$
 21. 8, -3 23. $\frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$ 25. -8, 3 27. $\frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$ 29. $-1 \pm \sqrt{2}$ 31. $\frac{1}{2}, -5$ 33. ± 4 35. 0, 3
 37. $-\frac{1}{3}, -4$ 39. $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$ 41. $2 \pm \sqrt{3}$ 43. $\pm 6a$ 45. $\pm(a+b)$ 47. $2a, -a$ 49. 3.37, -1.27
 51. 0.89, -2.42 53. 67 54. \$1200 55. 62 mi/h, 50 mi/h 56. 320 mi 57. 22 km/h 58. 2 59. 16
 60. 6

1. $\pm 1, \pm 3$ 3. -2, -1 5. -125, 343 7. -1, 1, 3 9. $\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}$ 11. $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}$ 13. $\frac{16}{9}, 9$ 15. 64
 17. 3, -1 19. -2, 1 21. $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ 23. -2, 4 25. 12 27. sin solución 29. 4, 7 31. 5, 8 33. ± 3
 35. -1 37. 2 39. 3 41. 1 43. 2.41, -2.41, 0.41, -0.41 45. 4.46, 0.34 47. $7, -\frac{3}{2}$ 48. ± 10
 49. 0, -3 50. $\frac{1 \pm \sqrt{21}}{10}$

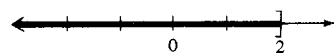
1. 13, 15 3. 12 5. 2 o $\frac{1}{2}$ 7. 5 in por 16 in 9. 4 ft 11. 18 in 13. 36 in, 64 in 15. 11% 17. 9
 19. 40 21. 11, 15 23. Juan: 45 h; Padre: 36 h 25. 22.8 h 27. 30 mi/h, 40 mi/h 29. 40 mi/h 31. 9.6 s
 33. 2.97 s 35. 1.26 s 37. 61.2 mi/h 39. aproximadamente 36 mi/h 41. La ecuación se resuelve utilizando la fórmula
 cuadrática para obtener las dos soluciones $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$ y $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$. Sumándolas se obtiene $-b$. 43. -5, $-\frac{5}{4}$
 44. 5, $-\frac{5}{2}$ 45. sin solución 46. 4, -1, $\frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$ 47. Cada número es una solución 48. $\frac{3 \pm \sqrt{41}}{2}$
 49. $\frac{4\sqrt{2} - 5}{7}$ 50. $\frac{-7 - \sqrt{5}}{4}$

1. $2i\sqrt{2}$ 3. $-\sqrt{35}$ 5. $\sqrt{5}$ 7. $-i$ 9. $i\sqrt{29}$ 11. $-3i$ 13. $x = 1; y = 0$ 15. $x = 2; y = 2$ 17. $2 + 7i$
 19. $2 + 2i$ 21. $-2 + 11i$ 23. $10 - 15i$ 25. $117 - 44i$ 27. $8i$ 29. $-3 - i\sqrt{5}$ 31. $\frac{9}{13} + \frac{19}{13}i$
 33. $\frac{7}{26} - \frac{17}{26}i$ 35. $\frac{1}{3}i$ 37. $1 - i$ 39. $\frac{-1 \pm i\sqrt{2}}{3}$ 41. $\pm i\sqrt{3}, \pm 2$ 43. $\frac{3 \pm i\sqrt{7}}{2}$ 45. $1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$
 47. 0, $2i, -2i$ 49. $\pm 1, \pm i$ 51. una solución real 53. $x_1 + x_2 = 10; x_1 \cdot x_2 = 25$ 55. $x_1 + x_2 = 2; x_1 \cdot x_2 = -\frac{2}{3}$
 57. Sí, 2 y 1 son soluciones. 59. No, 4 y $-\frac{1}{4}$ no son soluciones. 61. a) -1 b) $-i$ c) 1 d) i 63. a) 5

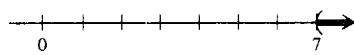
b) $\sqrt{2}$ c) 9 65. Sea $x = a + bi$ y $y = c + di$. Entonces
 $\overline{x - y} = \overline{(a + bi) - (c + di)} = \overline{(a - c) + (b - d)i} = (a - c) - (b - d)i$. Además,
 $\overline{x - y} = \overline{(a + bi) - (c + di)} = (a - bi) - (c - di) = (a - c) + (d - b)i = (a - c) - (b - d)i$. Así, $\overline{x - y} = \overline{x} - \overline{y}$.
 67. $\overline{x \cdot y} = \overline{(a + bi) \cdot (c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i$. Además,
 $\overline{x \cdot y} = \overline{(a + bi)(c + di)} = (ac - bd) + (ad + bc)i = (ac - bd) - (ad + bc)i = (ac - bd) - (ad + bc)i$. Así, $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$.
 69. Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces las soluciones a la ecuación son $x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}$. Ya que $-\frac{b}{2a}$ es un número racional, se tiene

el resultado deseado. 71. a) Ya que $b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(-56) = 225 = 15^2$, por el ejercicio 70, $x^2 + x - 56$ puede factorizarse. De hecho $x^2 + x - 56 = (x - 7)(x + 8)$. b) Ya que $b^2 - 4ac = 9 - 4(7)(9) = -243$ y -243 no es un cuadrado perfecto, $7x^2 - 3x + 9$ no puede factorizarse. c) Ya que $b^2 - 4ac = 3600 - 4(36)(25) = 0$, por el ejercicio 69, $36x^2 - 60x + 25$ puede factorizarse. De hecho, $36x^2 - 60x + 25 = (6x - 5)^2$. 73. 4 cm, 11 cm. 74. 20 acciones 75. 5.5 días 76. a) 8 s b) a 3 segundos en el camino hacia arriba y a 5 segundos en el camino hacia abajo c) 4 s; esta es la altura máxima del cohete d) El cohete no alcanzará una altura de 300 ft (la altura máxima es 256 ft). Al resolver la ecuación con $h = 300$, las soluciones para t no son números reales. 77. $\pm 1, \pm 3$ 78. $\pm 3, \pm i\sqrt{7}$

1. $x \leq 2; (-\infty, 2]$



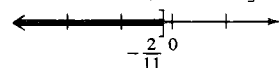
3. $y > 7; (7, \infty)$



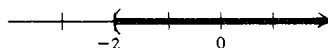
5. $z > \frac{1}{4}; (\frac{1}{4}, \infty)$



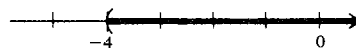
7. $y \leq -\frac{2}{11}; (-\infty, -\frac{2}{11}]$



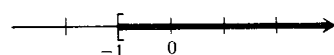
9. $y > -2; (-2, \infty)$



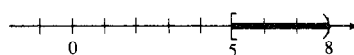
11. $z > -4; (-4, \infty)$



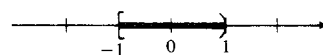
13. $y \geq -1; [-1, \infty)$



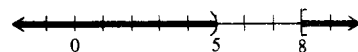
15. $5 \leq x < 8; [5, 8)$



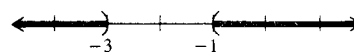
17. $-1 \leq z < 1; [-1, 1)$



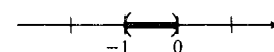
19. $y < 5$ o $y \geq 8; (-\infty, 5)$ o $[8, \infty)$



21. $z < -3$ o $z > -1; (-\infty, -3)$ o $(-1, \infty)$



23. $-1 < y < 0; (-1, 0)$



25. $x > -5$

27. todos los valores de x excepto $x = -5$, es decir, $x < -5$ o $x > -5$

29. $x > -5$

31. $5^\circ \leq F \leq 86^\circ$

33. $145 \leq x \leq 185$; lo cual es imposible si la calificación máxima posible es 100%

35. $2 \leq l \leq 21$

37. $-7 < x < 7; (-7, 7)$

39. $z = 0$

41. cada número real excepto 0, es decir, $y < 0$ o $y > 0$; $(-\infty, 0)$ o $(0, \infty)$

43. $x > 1$ o $x < -5$; $(1, \infty)$ o $(-\infty, -5)$

45. $-1 < z < \frac{7}{5}; (-1, \frac{7}{5})$

47. $y > 2$ o $y < -16$; $(2, \infty)$ o $(-\infty, -16)$

49. sin solución

51. $z = \frac{7}{2}$

53. $m > 1$

55. $m < \frac{1}{8}$

57. Ya que $a < b$, $b - a$ es positivo. Además, ya que $a > 0$ y $b > a$, tanto a como b son positivos; por consiguiente, $b + a$ es positivo. Así, $(b + a)(b - a) = b^2 - a^2$ es positivo, de modo que $a^2 < b^2$. Si $0 < a$ se suprime, el resultado no es verdadero. Por ejemplo, $-2 < 1$ pero $(-2)^2 > 1^2$.

58. $-6 - 2i$

59. $14 - 2i$

60. $\frac{3}{5} + \frac{16}{5}i$

61. $\frac{1}{6} + \frac{1}{6}i$

62. $\frac{1 \pm i\sqrt{11}}{6}$

63. 0, $\frac{5 \pm i\sqrt{7}}{4}$

64. $x_1 + x_2 = 2$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{6}$

65. Ya que $b^2 - 4ac = -19 < 0$, la ecuación tiene dos soluciones complejas.

1. $x < -5$ o $x > 3$; $(-\infty, -5)$ o $(3, \infty)$

3. $x \leq -4$ o $x \geq \frac{5}{2}$; $(-\infty, -4]$ o $[\frac{5}{2}, \infty)$

5. $x < 1 - \sqrt{3}$ o $x > 1 + \sqrt{3}$;

$(-\infty, 1 - \sqrt{3})$ o $(1 + \sqrt{3}, \infty)$

7. cada número real; $(-\infty, \infty)$

9. $x = \frac{5}{2}$

11. $\frac{1 - \sqrt{6}}{5} \leq x \leq \frac{1 + \sqrt{6}}{5}$;

$[\frac{1 - \sqrt{6}}{5}, \frac{1 + \sqrt{6}}{5}]$

13. $x < -1$ o $x \geq 3$; $(-\infty, -1)$ o $[3, \infty)$

15. $-3 < x < 4$; $(-3, 4)$

17. $x \leq -8$ o $x > 3$;

$(-\infty, -8]$ o $(3, \infty)$

19. $-2 \leq x \leq 2$ o $x \geq 5$; $[-2, 2]$ o $[5, \infty)$

21. $x \leq -1$ o $x \geq 4$; $(-\infty, -1]$ o $[4, \infty)$

23. $x < -6$ o $1 < x < 3$; $(-\infty, -6)$ o $(1, 3)$

25. $x \leq -5$ o $-3 \leq x \leq 0$ o $x \geq 2$; $(-\infty, -5]$ o $[-3, 0]$ o $[2, \infty)$

27. $-1 \leq x \leq 0$ o $x \geq 1$; $[-1, 0]$ o $[1, \infty)$

29. $x \leq -5$ o $x \geq 0$; $(-\infty, -5]$ o $[0, \infty)$

31. $-8 < x \leq 3$; $(-8, 3]$

33. $-4 < m < 4$ o $(-4, 4)$

35. $t > 5$

37. $0 \leq t \leq 5$ s

39. 6 sec $< t < 9$ s

41. 4 sec $< t < 7$ s

43. $x < -2.05$ o $3.55 < x \leq 6.25$

44. $y \leq -1$; $(-\infty, -1]$

45. $z < -3$; $(-\infty, -3)$

46. $x < -1$ o $x > \frac{3}{2}$;

$(-\infty, -1)$ o $(\frac{3}{2}, \infty)$

47. $-\frac{14}{3} \leq z \leq 2$; $[-\frac{14}{3}, 2]$

48. $x \geq 175$; es decir, debe vender al menos 175 ratones.

49. 15 días

Ejercicios de repaso del capítulo 2

1. $\frac{3}{2}$

2. 3

3. 10

4. 3

5. $\frac{5}{7}$

6. sin solución

7. 2, -9

8. $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$

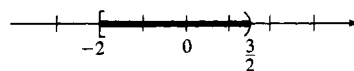
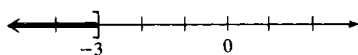
9. $\frac{-1 \pm 2i}{5}$

10. -1

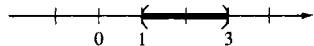
11. $-5, -\frac{7}{3}$ 12. $\frac{1}{2}, -8$ 13. $1 \pm \sqrt{2}$ 14. 4, 1 15. 5 16. $-3, 0$ 17. $\frac{3}{4}$ 18. 0 19. $y = \frac{xz}{z-x}$

20. todo número real 21. $x < -5$ o $3 < x < 7$ 22. $-2 \leq x \leq \frac{5}{3}$ 23. $x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ o $x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

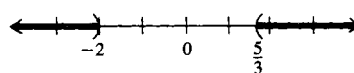
24. sin solución 25. $x \leq -3; (-\infty, -3]$ 26. $-2 \leq x < \frac{3}{2}; [-2, \frac{3}{2})$



27. $1 < x < 3; (1, 3)$



28. $x < -2$ o $x > \frac{5}{3}; (-\infty, -2) \cup (\frac{5}{3}, \infty)$



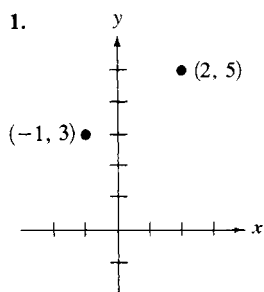
29. $11 - 7i$ 30. $-\frac{11}{5} + \frac{7}{5}i$ 31. dos soluciones complejas 32. $x_1 + x_2 = 2; x_1 \cdot x_2 = 5$ 33. 42, 44, 46 34. 75 kg

35. \$28 000 36. 23 m por 12 m 37. $25^\circ, 145^\circ, 10^\circ$ 38. 10.3 min 39. 9:30 A.M. 40. 120 km/h

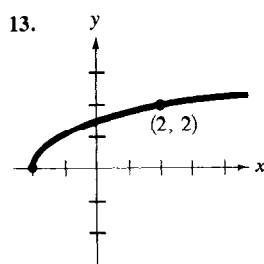
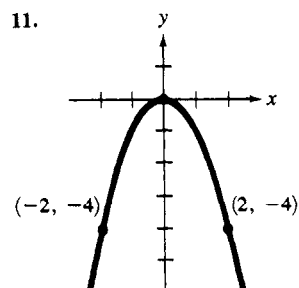
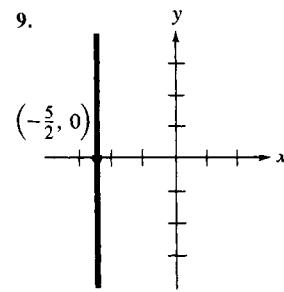
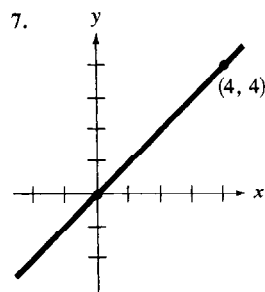
41. 44 ft, 20 ft 42. 50 ft 43. 45 mi/h, 60 mi/h 44. 6 45. Lucía: 12 min; Madre: 24 min 46. 38.6 mi

47. $1 \text{ s} < t < 3 \text{ s}$ 48. 1 000 antílopes 49. $x > 3$, es decir, se obtendrá una utilidad cuando se venden más de tres estufas por semana. 50. 1.31, -0.88

Capítulo 3



3. II 5. III



15. 5; $(\frac{5}{2}, 5)$ 17. $\sqrt{85}; (6, \frac{7}{2})$

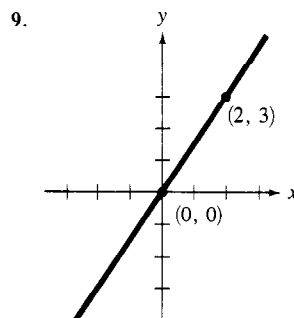
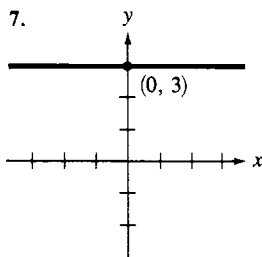
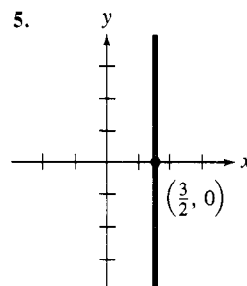
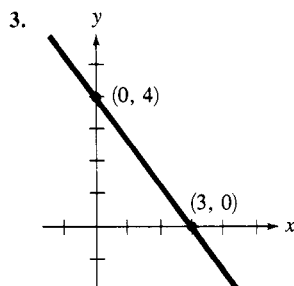
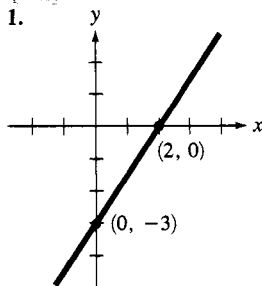
19. 7; $(-6, -\frac{3}{2})$ 21. $a = -1, b = -4$

23. 4, 12 25. lados: $7\sqrt{2}, 2\sqrt{5}, 3\sqrt{10}$; no es un triángulo rectángulo 27. 6.4 mi 29. (J, 2.5), (F, 3.7), (M, 6.3)

31. $x < -3$ o $x > -2; (-\infty, -3) \cup (-2, \infty)$ 32. Cada número real es una solución; $(-\infty, \infty)$. 33. $-\frac{3}{2} < x \leq 5; (-\frac{3}{2}, 5]$

34. $x \leq \frac{1}{2}$ o $x \geq 1; (-\infty, \frac{1}{2}] \cup (1, \infty)$ 35. a) $y = 3$ b) $x = 6$ c) $y = -\frac{1}{2}x + 3$

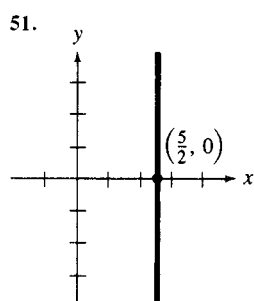
[3.2]



11. $-\frac{3}{2}$ 13. indefinida 15. 0 17. $2x + y + 1 = 0$ 19. $4x - 3y - 12 = 0$ 21. $y + 5 = 0$
23. $2x - 5y + 26 = 0$ 25. $2x + y - 1 = 0$ 27. $y - 3 = 0$ 29. $x + 5 = 0$ 31. $\frac{2}{7}; (0, \frac{5}{7})$ 33. $-\frac{8}{3}; (0, \frac{7}{3})$
35. 0; (0, 2) 37. perpendiculares 39. paralelas 41. perpendiculares 43. Sí, la pendiente de la recta que atraviesa P y Q es la misma que la pendiente de la recta que atraviesa Q y R . 45. sea $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; $2x + y = 0$ 47. $x + 3y - 2 = 0$
49. $y = 4\,000x + 85\,000$; \$113\,000 51. 10 años 53. a) \$1\,524 b) 5 años 55. a) $g = \frac{1}{4}t - 1$ (g representa a y y t a x)
- b) 4 gm c) Los gramos producidos a $t = 0$ no deben ser -1 . 57. $\sqrt{41}; (\frac{3}{2}, 4)$ 58. $\sqrt{113}; (0, -\frac{3}{2})$ 59. $x = -1, 5$
60. $x \leq -3$

[3.3]

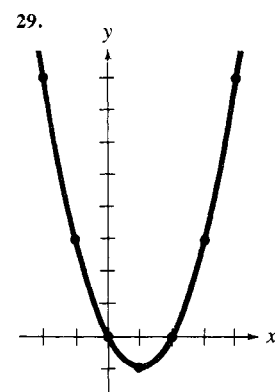
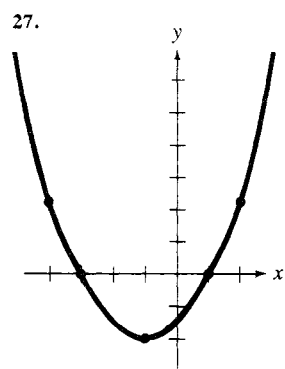
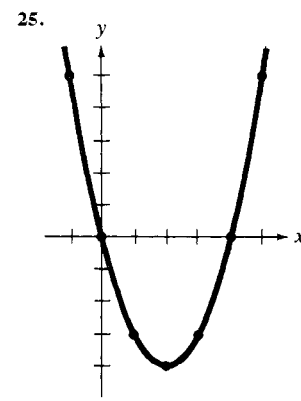
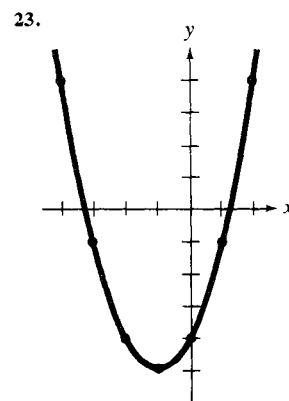
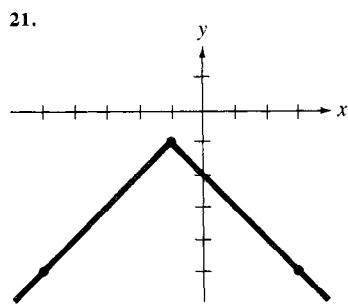
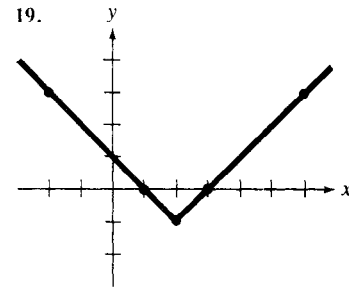
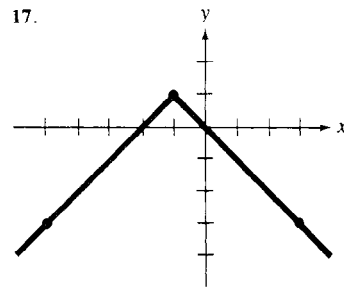
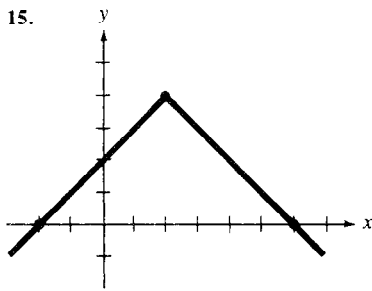
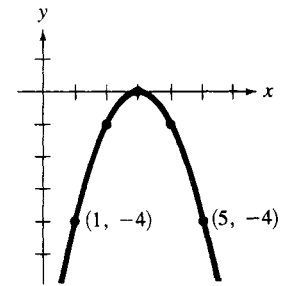
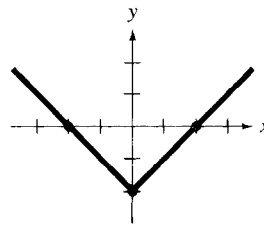
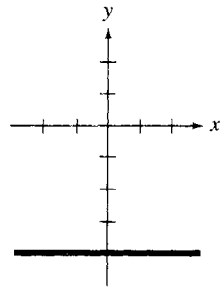
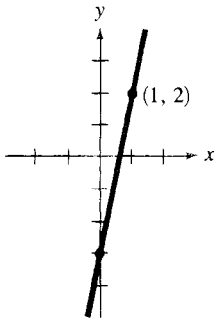
1. función 3. función 5. función 7. $\{2, 7, 12\}$ 9. todos los números reales no negativos 11. todos los números reales excepto 0
13. todos los números reales 15. $x \leq 2$ 17. $x \geq -8$ y $x \neq -2$ y $x \neq 3$ 19. identidad 21. lineal 23. constante
25. $-3, 2, -18, 5a - 3, 5a - 8$ 27. 7, 7, 7, 7, 7 29. 5, 4, 8, $|a - 5|, |a - 6|$ 31. $3a^2 - 7, (3a - 7)^2, \frac{3}{a} - 7,$
- $\frac{1}{3a - 7}$ 33. $\frac{1}{a^2} + 6, (\frac{1}{a} + 6)^2, a + 6, \frac{a}{1 + 6a}$ 35. $h + 6, 1, x + h + 5, 1$ 37. $h^2 + 2h + 3, h + 2,$
- $x^2 + 2xh + h^2 + 2, 2x + h$ 39. a) $S(c) = 1.285c$, b) \$71.96 41. a) $S(x) = 50(1 - x)$, b) $T(x) = 52.5(1 - x)$,
- c) 20% 43. a) $T(r) = 5\pi r^2$ b) \$1\,447.65 45. a) La imagen está dada por $\$112.77 \leq c(x) \leq \203.17 b) para $x = 0.30$ el costo sería de $-\$12.87$ lo cual obviamente no es razonable. 47. $x - 3y + 10 = 0$ 48. $x - 2y - 6 = 0$ 49. $x - 8 = 0$
50. $4x + 10y + 21 = 0$



52. $\frac{7}{6}$

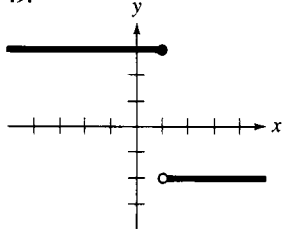
1. función 3. no es una función

5. función

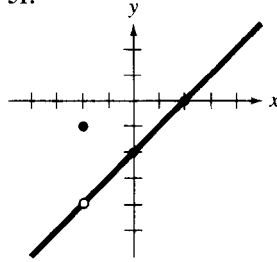
7. crece para toda x 9. constante para toda x 11. decrece para $x \leq 0$
crece para $x \geq 0$ 13. crece para $x \leq 3$
decrece para $x \geq 3$ 

31. $g(x) = f(x) - 3$ 33. $h(x) = g(x - 4) + 3$ 35. impar 37. tanto par como impar 39. par 41. eje x , eje y , origen
43. eje y 45. ninguna 47. origen

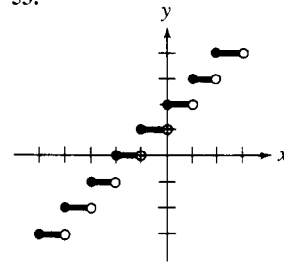
49.



51.



53.



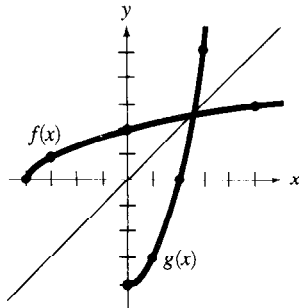
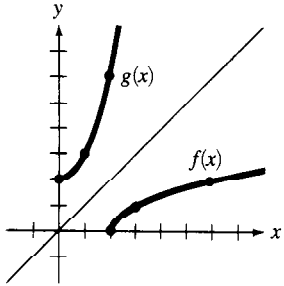
55. 1, $x^2 - 2x - 2$, $x^4 - 3$ 56. 25, $(x - 4)^2$, $(x^2 - 3)^2$ 57. a) $S(x) = 1.08x + 1200$ b) \$21,180
58. a) $V(x) = 4x(8 - x)(6 - x)$ b) 192 in^3 59. $\sqrt{58}$ 60. (3, -5)

[3.5]

1. 20, -17, $15x - 10$, $15x - 2$ 3. 8, -2, $2x^2$, $-2x^2$ 5. -11, 11, $-2x^2 - 3$, $4x^2 - 4x + 3$ 7. 2, -1, x , x
9. uno a uno 11. no es uno a uno 13. uno a uno

15. Sí

17. Sí

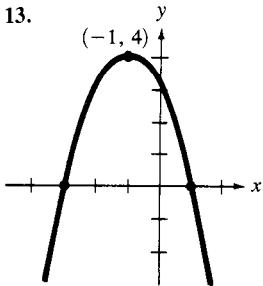


19. $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$ 21. $h^{-1}(x) = x^2 + 3$, $x \geq 0$ 23. $k^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{2}}$ 25. $g^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$, $0 \leq x \leq 1$
27. $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{m}$, $m \neq 0$ 29. a) $C(t) = 2\pi(2t^2 - 1)$ b) $A(t) = \pi(2t^2 - 1)^2$ 31. a) $22\,000(3t^2 + 2t + 1)$
b) $374\,000 \text{ m}^2$ 33. 4 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba 34. 4 unidades a la izquierda y 2 unidades hacia abajo
35. impar 36. par 37. $3x - 2y + 22 = 0$ 38. $3x + 2y + 2 = 0$ 39. a) 16 b) $\frac{9}{4}$ 40. $\frac{1}{2}$, -5

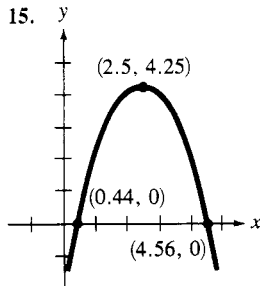
[4.6]

1. $(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4})$; (2, 0) y (3, 0) 3. (-1, 1); sin intersección con el eje x 5. (-4, 16); (0, 0) y (-8, 0) 7. (0, -4); $(\sqrt{2}, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$ 9. (2, 13); $(\frac{-4+\sqrt{26}}{2}, 0)$ y $(\frac{-4-\sqrt{26}}{2}, 0)$ 11. (3, 2); sin intersecciones con el eje x

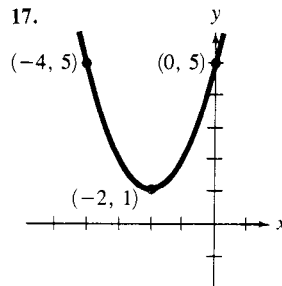
13.

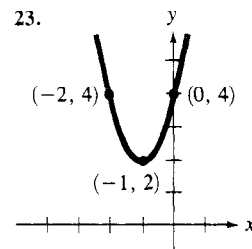
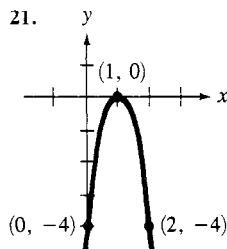
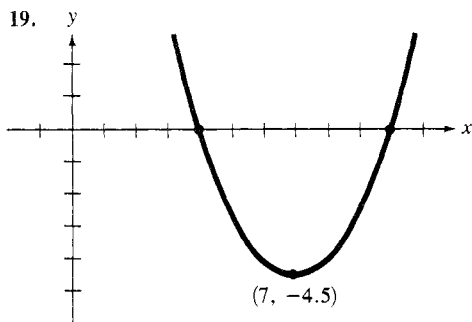


15.



17.

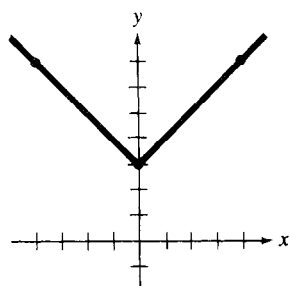
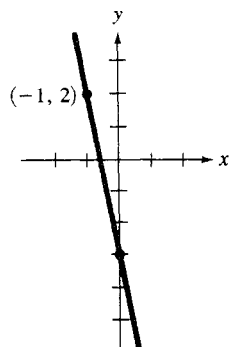




25. 250 yd por 250 yd; 62,500 yd² 27. 45 ft 29. a) 8 s b) 1 024 ft c) 16 s 31. 60; \$2 600
 33. $C(x) = 2x^2 - 120x + 2\,000$ 35. 300 unidades 36. 19, 15, $-6x + 19$, $-6x + 3$ 37. 5, 9, $x^2 + 5$, $(x + 5)^2$
 38. $f^{-1}(x) = \frac{x-8}{7}$ 39. $g^{-1}(x) = x^2 - 4$, $x \geq 0$ 40. $h^{-1}(x) = x^3 - 1$

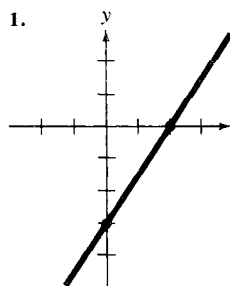
41. crece para toda x

42. decrece para $x \leq 0$
 crece para $x \geq 0$

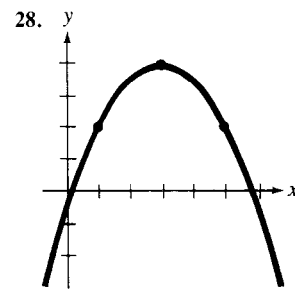
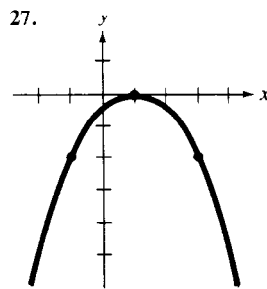
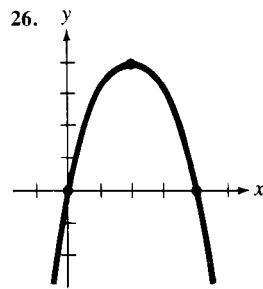
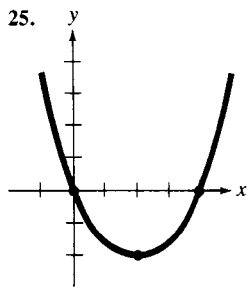


1. $y = \frac{1}{2}x$ 3. $z = \frac{60}{w}$ 5. $z = 3xy$ 7. $a = \frac{225b^2}{\sqrt{d}}$ 9. $w = \frac{0.825x^2\sqrt[3]{y}}{\sqrt{z}}$ 11. \$1156.25 13. \$39,337
 15. 13.2 17. 120 in³ 19. el peso se divide entre 4 21. 2.10 s 23. la distancia debe multiplicarse por $\frac{1}{\sqrt{2}}$
 25. 110 s 27. 61 mi/h 29. $M = \frac{5}{12}m$ 31. $(\frac{7}{2}, -\frac{25}{4})$; (1, 0), (6, 0) 32. (-6, 25); (-1, 0), (-11, 0)
 33. $(\frac{3}{4}, \frac{169}{8})$; (4, 0), $(-\frac{5}{2}, 0)$ 34. $(-\frac{2}{3}, -\frac{16}{3})$; (-2, 0), $(\frac{2}{3}, 0)$ 35. $(\frac{1}{2}, 0)$; $(\frac{1}{2}, 0)$ 36. $(\frac{1}{4}, -\frac{7}{4})$; ninguna
 37. $8x + y + 32 = 0$ 38. $2x - 3y - 14 = 0$ 39. $5x + 2y - 15 = 0$ 40. $x - 3y - 24 = 0$

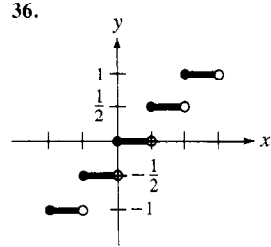
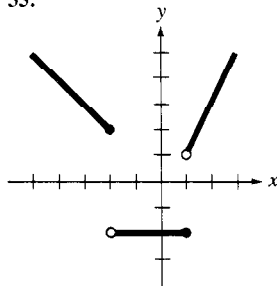
Ejercicios de repaso del capítulo 3



2. $3\sqrt{10}$ 3. (6, -1) 4. (6, 2), (-2, 2) 5. 9 6. $9x - 2y + 13 = 0$
 7. $4x - 3y + 8 = 0$ 8. $\frac{7}{2}$; (0, -2) 9. paralelas 10. perpendiculares 11. sí
 12. $x + 2y - 5 = 0$ 13. función 14. no es una función 15. $x > -1$ 16. $x \neq \pm 3$
 17. lineal 18. constante 19. 0, 2, 2, $2a^2 + 3a$, $2a^2 + 7a + 5$ 20. $3a^3 - 5$, $\frac{3-5a}{a}$, $3\sqrt{a} - 5$ 21. no es una función 22. función 23. decrece para toda x 24. decrece para toda x donde esté definida



29. par 30. impar 31. ninguna de las dos 32. eje x, eje y, origen 33. origen 34. eje x



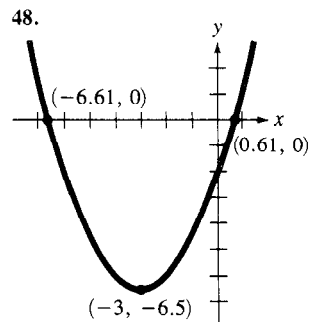
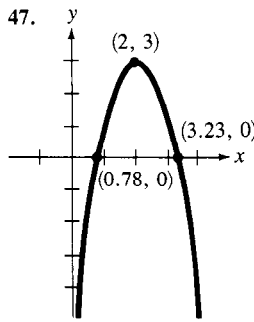
37. 14, 24, $3x^2 - 30x + 77$, $3x^2 - 3$ 38. 10, 0, $x^2 + 1$, $-x^2 + 4x - 3$

39. uno a uno 40. no es uno a uno

41. $f^{-1}(x) = 2x - 6$ 42. $g^{-1}(x) = x^2 - 5$, $x \geq 0$

43. $h^{-1}(x) = \sqrt{2x + 4}$ 44. $k^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x}$

45. $(-\frac{9}{4}, -\frac{121}{8})$; $(\frac{1}{2}, 0)$; $(-5, 0)$ 46. $(-\frac{1}{3}, \frac{25}{3})$; $(\frac{4}{3}, 0)$; $(-2, 0)$



49. $S = 1.33x$; \$2 926 50. $163.8(1 - x)$; \$98.28

51. $x = 20$ ft, $y = 60$ ft 52. 20; \$1 400

53. $f(x) = -2x^2 + 600x - 44 150$ 54. \$7 187.50

55. $C(t) = 120t^2 + 120t + 8 030$; \$9 470 56. 95.1%

57. $C(r) = 12.8\pi r^2$, \$411.77 58. 144 ft, 6 s

59. 4.8 caballos de fuerza 60. l tendría que ser nueve veces más larga

Capítulo 4

[4.1]

1. a) 3 b) 1 c) -7 d) -10 3. a) 1 b) -2 c) $-4 + \sqrt{2}$ d) $2 + \sqrt{2}$ 5. a) 4 b) -1 c) -9 d) 0

7. a) 0 b) 8 c) 8 d) 8 9. a) 12 b) 3 c) 12 255 d) 0 11. $f(1) = 0$, $f(-1) = 0$, $f(2) = 39$; 1 y -1 son

ceros 13. 0 y 1 son soluciones 15. $\frac{3 + i\sqrt{3}}{2}$ y $\frac{3 - i\sqrt{3}}{2}$ son soluciones 17. Ya que $h(20) = 0$, la altura del objeto después de 20 segundos es cero, lo cual significa que toma 20 segundos para que el objeto golpee el piso. 19. Q: $3y^2 + 4y + 9$; R: 13

21. Q: $3z^3 + 9z^2 + 25z + 76$; R: 225 23. Q: $2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 9x + 28$; R: 92 25. Q: $y^3 - 1$; R: -2

27. Q: $6x^2 + 3x + \frac{1}{2}$; R: $\frac{17}{4}$ 29. Q: $t^2 + (3 - i)t - 3i$; R: 0 31. Q: $7x^4 - 39x^3 + 158x^2 - 486x + 1277$; R: 46

33. Q: $6.5x^2 - 26.17x + 105.625$; R: -836.579 35. Ya que todas las potencias impares de x tienen un coeficiente negativo, cada uno de estos términos sería positivo para un valor negativo de x . Ya que todos los términos elevados a una potencia par también serían positivos en este caso, el polinomio siempre será positivo, nunca nulo, para un valor negativo de x . 37. $m = -1$ 39. a) 3 b) 3

c) El residuo es igual a $P(1)$. 41. $(\frac{9}{2}, 2)$ 42. 0 43. $2x - y - 11 = 0$ 44. Q: $3x^2 + 2x + 5$; R: 3 45. (a) $3 + 2i$ (b) $5 - i\sqrt{7}$

[4.2]

1. 0 3. 56 5. -2 7. -320 9. 0 11. 37 13. 17 15. 87 17. $P(x) = (x^2 + x - 2)(x - 7) + 0$

19. $P(x) = (x^2 - 7x - 2)(x + 1) + 16$ 21. sí 23. no 25. $P(r)$ 27. $x - r$ 29. 1 31. $(x - 5)^2$ 33. 5

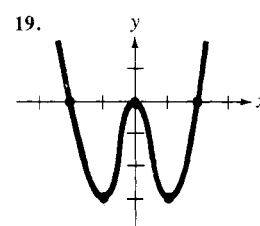
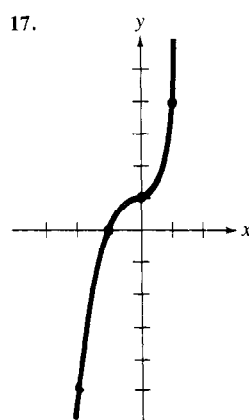
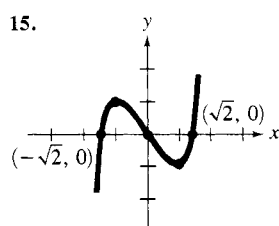
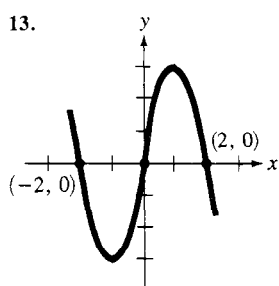
35. $3 - 2i$ 37. $1 + 3\sqrt{2}$ 39. La sustitución muestra que 3 es una solución. Las otras soluciones 1 y -1, son soluciones de $x^2 - 1 = 0$, el polinomio obtenido cuando el original se divide entre $x - 3$. 41. 5; 1; 5



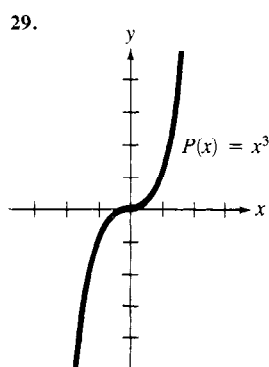
43. $P(x) = x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 48x + 45$ 45. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2$ 47. $P(-2.6) = 1518.713$ 49. 3; 1, $-1 \pm i\sqrt{3}$
 51. Se considera el polinomio $P(x) - Q(x) = 0$, y se usa el ejercicio 50. 53. La sustitución directa muestra que $P(1 + \sqrt{2}) = 0$. No; el teorema en esta sección es cierto para coeficientes racionales no para coeficientes (irracionales) reales. 54. a) 9 b) -1 c) 7
 55. el único punto de equilibrio es 15, $P(15) = 0$. 56. $x^7 + 8x^6 - 7x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 5$ 57. a) $P(-x) = 15x^4 + 3x^3 + x^2 - 7x - 6$
 b) $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$ (c) $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

En los ejercicios 1-7, las diversas posibilidades para soluciones se escriben en el orden: negativo, positivo, no real. 1. ya sea 1, 2, 0 o 1, 0, 2 3. ya sea 0, 0, 4; 0, 2, 2; o 0, 4, 0 5. ya sea 1, 1, 4; 1, 3, 2; 3, 1, 2; o 3, 3, 0 7. cota superior: 1; cota inferior: -1 9. cota superior: 3; cota inferior: -4 11. cota superior: 3; cota inferior: -2 13. 1, -1, -2
 15. 4, $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ 17. $-\frac{1}{3}, \pm 2i$ 19. 0, $\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ 21. 2 tendría que dividir al coeficiente principal 1 para que $\frac{1}{2}$ sea una solución. 23. Ya que el número de variaciones de signos es 0 tanto para $f(x) = x^4 + a$ como para $f(-x)$ no hay soluciones reales positivas o negativas. Además, es obvio que 0 no es una solución; de modo que $x^4 + a = 0$ no puede tener una raíz real.
 25. 30 in por 10 in por 8 in 27. 9 ft 29. 5 30. $P(-3) = 314$ 31. Ya que $P(5) = 0$, $x - 5$ es un factor de $P(x)$.
 32. 6; 1; 6 33. $5 + 2i$ 34. $1 - \sqrt{7}$ 35. $P(x) = x^6 - 8x^5 + 25x^4 - 38x^3 + 26x^2 - 8$

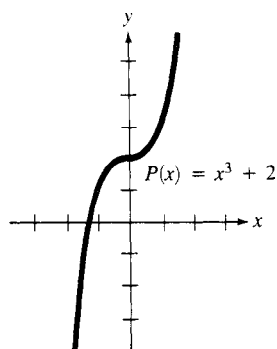
1. d) 3. c) 5. a) 3 b) 2 c) (0, 7) d) hacia arriba e) hacia abajo 7. a) 3 b) 2 c) (0, 12) d) hacia abajo e) hacia arriba 9. a) 4 b) 3 c) (0, -1) d) hacia arriba e) hacia arriba 11. a) 6 b) 5 c) (0, -5) d) hacia abajo e) hacia abajo



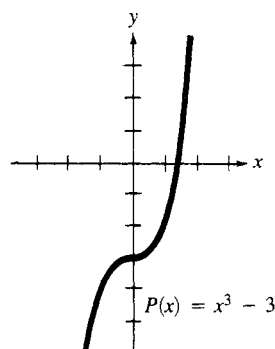
21. $P(1) = -6$ y $P(2) = 14$; de modo que por el teorema del valor intermedio hay un cero entre 1 y 2. 23. $P(-3) = 8$ y $P(-2) = -12$; de modo que por el teorema del valor intermedio hay un cero entre -3 y -2. 25. 1.73 27. 2.24



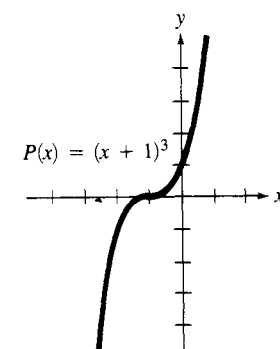
a) La gráfica de $P(x) = x^3 + 2$ es la gráfica de $P(x) = x^3$ desplazada dos unidades hacia arriba.



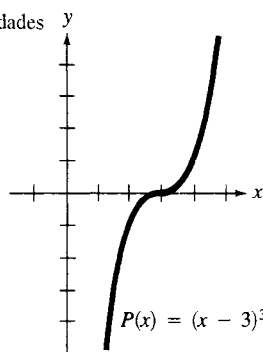
b) La gráfica de $P(x) = x^3 - 3$ es la gráfica de $P(x) = x^3$ desplazada tres unidades hacia abajo.



c) La gráfica de $P(x) = (x + 1)^3$ es la gráfica de $P(x) = x^3$ desplazada una unidad a la izquierda.



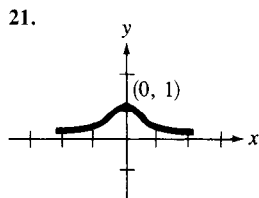
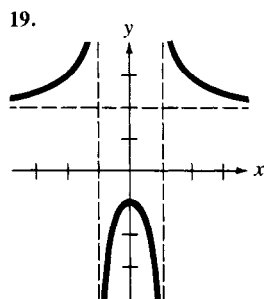
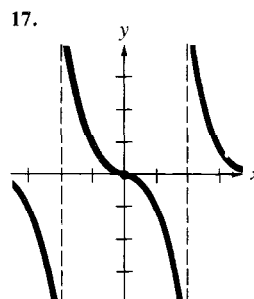
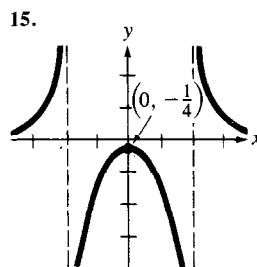
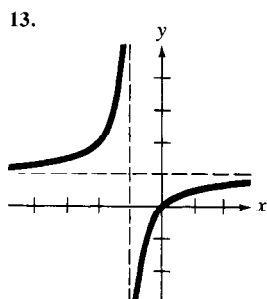
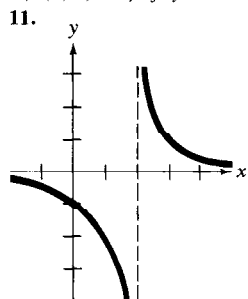
d) La gráfica de $P(x) = (x - 3)^3$ es la gráfica de $P(x) = x^3$ desplazada tres unidades a la derecha.



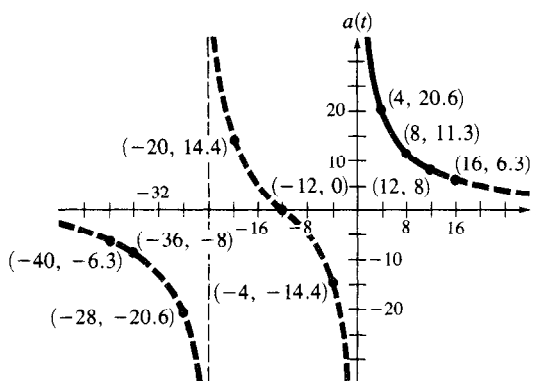
31. $m = -15$ 33. $5, i, -i$ 34. $3, -\frac{1}{2}, \sqrt{5}, -\sqrt{5}$ 35. Q: $y^4 - 4y^3 + 5y^2 - 12y + 13$; R: -15 36. $P(4.1) = 0$
 37. $3; -2, 1 \pm i\sqrt{3}$ 38. todos los números reales excepto $x = -3$ 39. todos los números reales

[4.5]

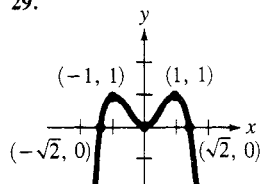
1. a) $x = -2$ b) $y = 0$ c) ninguna d) ninguna e) $(0, \frac{5}{2})$ f) ninguna 3. a) $x = 5$ b) $y = 4$ c) ninguna d) $(0, 0)$
 e) $(0, 0)$ f) ninguna 5. a) $x = 1$ y $x = -2$ b) $y = 0$ c) ninguna d) $(-1, 0)$ e) $(0, -\frac{1}{2})$ f) ninguna 7. a) $x = 5$
 b) ninguna c) $y = x + 6$ d) $(2, 0)$ y $(-3, 0)$ e) $(0, \frac{6}{5})$ f) ninguna 9. a) ninguna b) $y = 5$ c) ninguna d) $(0, 0)$
 e) $(0, 0)$ f) eje y

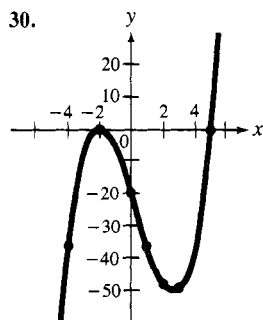


23. El costo promedio de producción decrece a un mínimo de 8 dólares por unidad después de 12 horas.



25. $f(x) = \frac{3}{x-1}$ 27. Si, véase el ejemplo 7. 29.



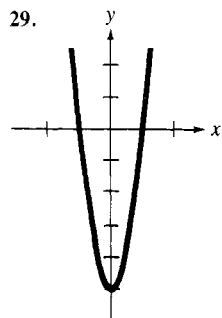
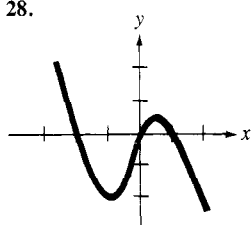


31. Ya sea 0, 0, 4; 2, 0, 2 o 4, 0, 0 (en orden negativo, positivo, no real)

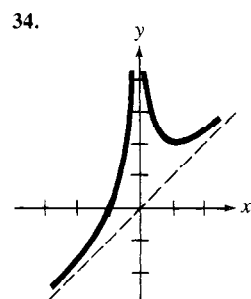
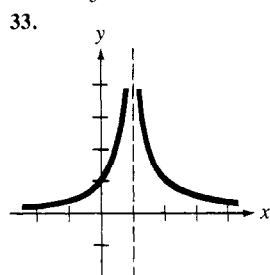
32. cota superior: 2; cota inferior: -2

Ejercicios de repaso del capítulo 4

1. a) 4 b) 3 c) 0 d) -14 2. Los tres son ceros. 3. $x^3 - 6x^2 + 18x - 53$, 15/7 4. $P(5)$
 5. teorema del residuo 6. $x + 3$ 7. teorema del factor 8. Ya que $P(100) = 0$, 100 es un punto de equilibrio. 9. $m = 25$; 0
 10. a) $P(1) = -8$ b) $P(-1) = -10$ c) $P(2) = 14$ 11. a) $x - 4$ es un factor b) $x + 1$ es un factor c) $x + 2$ no es un factor
 12. $(x + 4)^3$ 13. $2 + 7i$ 14. $3 - \sqrt{11}$ 15. 7; 1; 7 16. $P(x) = x^6 - 6x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 28x - 12$
 17. Ya sea 1, 3, 2 o 1, 1, 4 18. 1, 0, 4 19. cota superior: 3; cota inferior: -1 20. cota superior: 1; cota inferior: -5
 21. a) 5 b) 4 22. Si $\frac{p}{q}$ es una solución racional, entonces $q = 1$; ya que q debe ser un factor de 1. 23. $\frac{1}{3}$, $\frac{3 \pm i\sqrt{7}}{4}$
 24. -1, -1, 5 25. $r = 3$ 26. a) 3 b) 2 c) (0, -5) d) hacia arriba e) hacia abajo 27. a) 4 b) 3 c) (0, 8)
 28.



30. 3.32 31. a) $x = 9$ b) $y = 0$ c) ninguna d) ninguna e) $(0, -\frac{10}{9})$ f) ninguna 32. a) $x = \frac{1}{3}$ y $x = -\frac{1}{3}$
 b) $y = \frac{2}{3}$ c) ninguna d) (0, 0) e) (0, 0) f) ninguna



35. 6.5 in

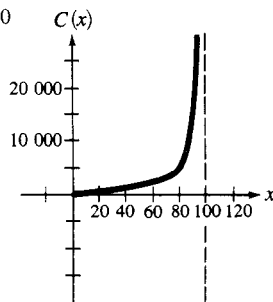
Capítulo 5

1. $\log_2 8 = 3$ 3. $\log_5 9 = v$ 5. $\log_a c = -3$ 7. $\log_a w = -v$ 9. $3^2 = 9$ 11. $a^7 = b$ 13. $3^b = \frac{1}{27}$

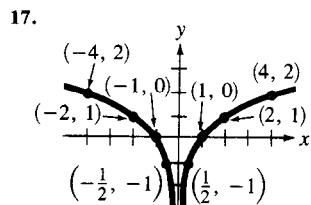
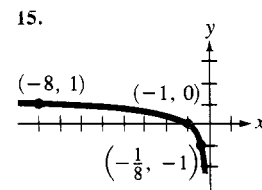
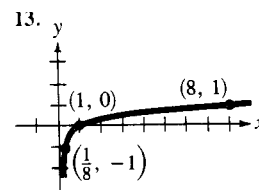
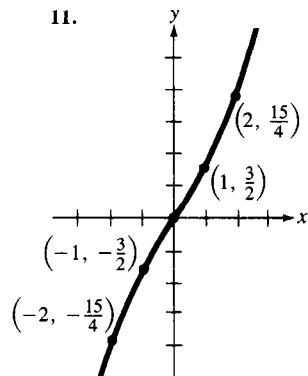
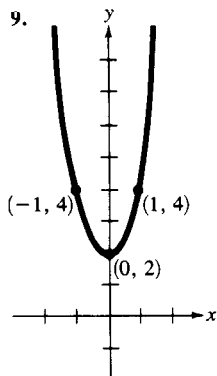
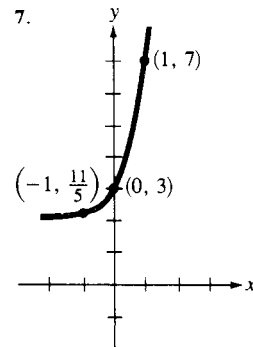
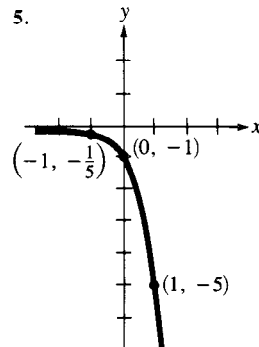
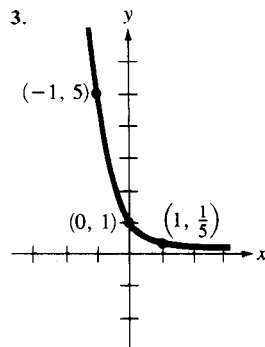
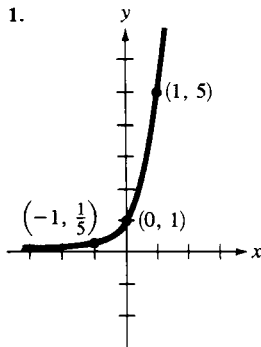
15. $a^c = 6$ 17. 5 19. 5 21. $\frac{1}{2}$ 23. 49 25. $\frac{1}{36}$ 27. 3 29. 81 31. 3 33. -1 35. ± 2

37. a) 10 b) 20 39. a) 5 b) 4 c) (0, -9) d) hacia abajo e) hacia arriba

40. $C(95) = \$19\,000$
dólares

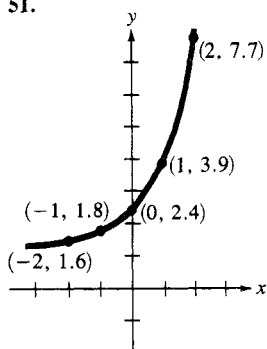


[5.2]



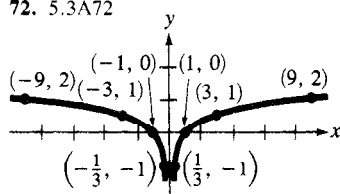
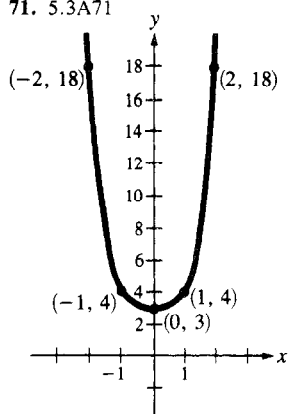
19. 3 21. -3 23. $x + 7$ 25. 16.2425 27. -7.2625 29. 0.0793 31. 3.2810 33. (0, 1) 35. todos los números reales 37. todos los números reales positivos 39. $a = 3$ 41. Si $a = 1$, $\log_1 x = y$ es equivalente a $1^y = x$, o $x = 1$ para todos los valores de y , la cual no sería una función. 43. $f^{-1}(x) = -1 + \log_2(x - 1)$; para toda $x > 1$ 45. $f^{-1}(x) = 3^{x/2} + 4$; para todos los números reales x 47. a) 5 000 b) 160 000 c) 47 568 49. a) 35.36 g b) 0.000 001 5 g c) 19.28 g

51.



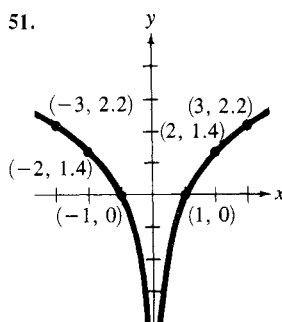
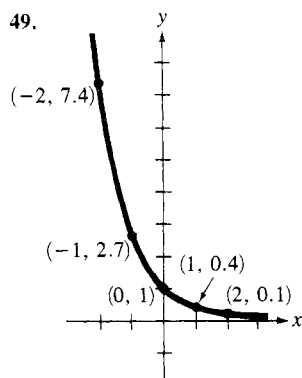
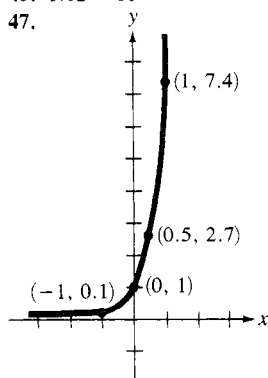
53. 2 54. 3 55. 0.01 56. 4 57. 1 58. 9, -9 59. verdadero 60. falso
 61. verdadero 62. verdadero

1. 4 3. 4, -1 5. 2 7. 2.6990 9. 1.4313 11. -0.3980 13. -0.9542 15. 0.3891 17. 0.0682
 19. 0.6825 21. 3.0143 23. 0.2552 25. $\log_a x + \log_a y + \log_a z$ 27. $\log_a x + 2 \log_a z - \log_a y$
 29. $\log_a y + \frac{1}{2} \log_a x - 3 \log_a z$ 31. $\log_a z + 3 \log_a (x + 1)$ 33. $2 \log_a x + \frac{1}{2} \log_a y - \frac{1}{2} \log_a z$
 35. $\frac{1}{2} \log_a x + \frac{1}{4} \log_a y$ 37. $\log_a x \sqrt{y}$ 39. $\log_a \frac{x}{y^2}$ 41. $\log_a \frac{z^3 \sqrt{x}}{y^3}$ 43. $\log_a \frac{y^x}{z^3}$ 45. $\log_a (x + 1)$
 47. $\log_a \sqrt{\frac{x}{y \sqrt{z}}}$ 49. verdadero 51. falso 53. verdadero 55. verdadero 57. falso 59. $\frac{3}{5}$ 61. $\frac{1}{3}$ 63. $\frac{3}{2}$
 65. $\log_2 (8 + 8) = \log_2 16 = 4$; pero $\log_2 8 + \log_2 8 = 3 + 3 = 6$ 67. $\log_3 (1 \cdot 9) = \log_3 9 = 2$, pero $(\log_3 1)(\log_3 9) = (0)(2) = 0$
 69. $a^x = \frac{x}{y}$
 71. 5.3A71 72. 5.3A72 73. $3x + 2$ 74. $5x^2$ 75. 35

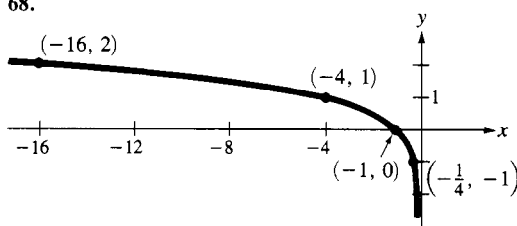
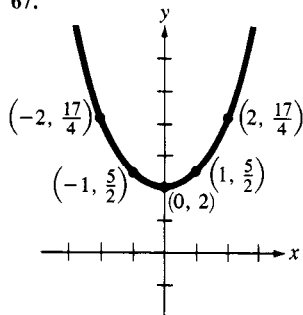


1. 2.7959

3. 0.3011 5. -4.1746 7. 11.7090 9. -8.1302 11. 1.9817 13. 4.9079 15. 16.8875
 17. 22.7 19. 0.000 614 21. 4.50×10^{14} 23. 0.992 25. 5.94×10^{-36} 27. 6.7405 29. -7.5521
 31. -10.1597 33. 35.517 35. 1.1447 37. 11.4 39. 0.0157 41. 2.78×10^9 43. 0.993
 45. 1.02×10^{-18}

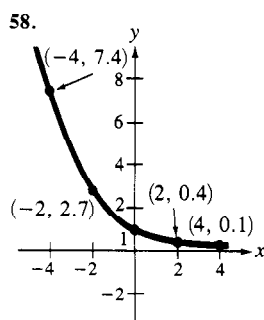
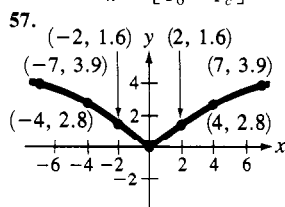


53. a) \$99.67 b) \$70.32 c) 921 d) 1 060 55. a) 14.7 lb/in² b) 4.2 lb/in² c) 3.47 mi d) 6.93 mi
 57. a) 6.10 mg b) 0.01 mg c) 3.66 hr d) 2.31 hr 59. $1 + \frac{1}{2} \ln z - \frac{1}{3} \ln x$ 60. $\frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{4} \ln z - 2 \ln y$
 61. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ln y$ 62. $\ln x^3 y^3 \sqrt{z}$ 63. $\ln \sqrt{x-y}$ 64. $\ln \frac{x^3}{z^5 \sqrt{y}}$ 65. $x^2 y = e^5$ 66. 1, 2
 67. 68. 69. -3 70. 2



[5.8]

1. $\frac{3}{2}$ 3. $\frac{15}{2}$ 5. 0, 4 7. 0.936 9. 2.74 11. 59.8 13. 5 15. 2, 3 17. 0.461 19. 6 21. 27
 23. 5 25. 8 27. 5.82 29. 1 31. 1, 25 33. 1, 5.65, 0.177 35. 7.39, 0.368 37. 10^{10} 39. 0
 41. 1, 10 000 43. $e, -e$ 45. 100, 0.01 47. 0.549 49. 210°F 51. $k = 0.0654$; 125°F
 53. $t = -\frac{1}{k} \ln \left[\frac{T - T_c}{T_0 - T_c} \right]$ 55. 14 ft



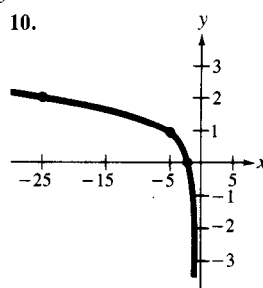
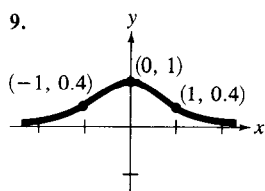
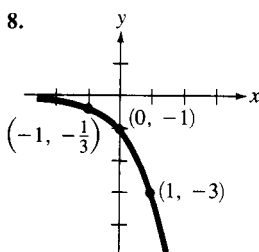
59. 6.5 60. \$248.78

[5.9]

- Muchas respuestas se dan utilizando un valor aproximado. 1. a) \$1 411.58 b) \$1 422.10 c) \$1 427.62 d) \$1 431.41 e) \$1 432.88
 (f) \$1 433.26 (g) \$1 433.33 3. 6.12 años 5. 5.95 años 7. 5.78 años 9. \$400.40; \$6 024.00 11. 33 años
 13. 271 millones 15. 22.4 años 17. 1 644 19. 23.1 años 21. 685 años 23. 4 783 años 25. 4.27 mg
 27. 6.4 29. $10^{7.2}$ 31. 66 decibels 33. 10^{-6} watt/m² 35. No; aumentará cerca de 20 decibels. 37. 1.53
 38. 5 39. 100 000; 1 40. e^5 ; e^{-5} 41. 6.6830 42. no puede encontrarse el logaritmo natural de un número negativo
 43. 3.17×10^{-10} 44. 558 000 45. $\ln x + \frac{1}{2} \ln y - 4 \ln z$

Ejercicios de repaso del capítulo 5

1. (a) 1 (b) 0 2. $x = \log_2 5$ 3. $3^w = a$ 4. 4 5. $\frac{1}{3}$ 6. x 7. x



11. 12.5297 12. 0.3715 13. 1.4641 14. 0.4075 15. 0.6113 16. 1.7713
 17. $\frac{2}{3} \log_a x + \frac{2}{3} \log_a y - \frac{2}{3} \log_a z$ 18. $5 \log_a y + \frac{2}{3} \log_a x - \frac{2}{3} \log_a z$ 19. $\log_a x^3 y^3 \sqrt{z}$ 20. $\log_a (x - y)^2 (x + y)$
 21. falso 22. verdadero 23. -15.17 24. -4.5564 25. 2.39×10^{-9} 26. 1.19×10^{18} 27. 9 28. 5 29. 10
 30. 20.6 31. 78.1 32. $\frac{1}{2}$ 33. 1; 1.62 34. e 35. a) 192 000 b) 10 hr 36. a) 4.43 lb/in² b) 5.5 mi
 37. a) \$997.76 b) 1901 38. a) 6.6 b) 7.94×10^{-6} 39. a) 11.6 b) 6.7 in 40. a) 5.5 mg b) 1.62 hr
 41. a) 45.8 b) 19 meses 42. $k = 0.056$; 82.8°F 43. $k = 0.0347$ 44. a) \$2 621.59 b) \$2 641.97 c) \$2 646.26
 45. 13.9 yr 46. \$360.05; \$34 809.03 47. 34 774 48. 150.7 años 49. 5.4 50. Sí; el nivel en decibels es aproximadamente de 107.4, el cual excede a 90 decibels por 17.4.

Capítulo 6

Las respuestas pueden variar. Los cálculos se hicieron usando el valor de cálculo de π sin redondear hasta el final. 1. no

3. sí 5. sí 7. sí 9. 38.69° 11. -52.59° 13. 85°25'12" 15. -48°10'48" 17. 540° 19. 401.07°
 21. -81.57° 23. 286°28'44" 25. -48°50'41" 27. $\frac{\pi}{3}$ 29. $-\frac{2\pi}{3}$ 31. 0.6720 33. 0.9657 35. -1.9345

Las respuestas pueden variar. Los cálculos se hicieron usando el valor de cálculo de π sin redondear hasta el final.

1. 4.2 cm 3. 11.82 ft 5. 101°59' 7. 4 328 mi 9. 49°25'N 11. 672 rev 13. 44 ft 15. 130 000 mi

17. 3.6 rev 19. El área del círculo es πr^2 . El área del sector es $\frac{\theta}{2\pi}$ veces el área del círculo. Así,

$$A = \frac{\theta}{2\pi} \pi r^2 = \frac{1}{2} r^2 \theta. \quad 21. 19.6 \text{ ft/s} \quad 23. 9.4 \text{ ft/s} \quad 25. 1 047 \text{ mi/h} \quad 27. N_1: 1.0 \text{ yd/min}; N_2: 1.6 \text{ yd/min}$$

29. 257°49'52" 30. -1.4958

$$1. \text{ sen } A = \frac{5}{13} = \cos B; \cos A = \frac{12}{13} = \text{sen } B; \tan A = \frac{5}{12} = \cot B; \csc A = \frac{13}{5} = \sec B; \sec A = \frac{13}{12} = \csc B; \cot A = \frac{12}{5} = \tan B$$

$$3. \text{ sen } A = \frac{7}{15} = \cos B; \cos A = \frac{4\sqrt{11}}{15} = \text{sen } B; \tan A = \frac{7\sqrt{11}}{44} = \cot B; \csc A = \frac{15}{7} = \sec B; \sec A = \frac{15\sqrt{11}}{44} = \csc B;$$

$$\cot A = \frac{4\sqrt{11}}{7} = \tan B \quad 5. \text{ sen } A = 0.6 = \cos B; \cos A = 0.8 = \text{sen } B; \tan A = 0.75 = \cot B; \csc A = 1.6 = \sec B;$$

$$\sec A = 1.25 = \csc B; \cot A = 1.3 = \tan B \quad 7. \left[\text{sen } \theta = \frac{5}{7} \right] = \cos (90^\circ - \theta); \cos \theta = \frac{2\sqrt{6}}{7} = \text{sen } (90^\circ - \theta);$$

$$\tan \theta = \frac{5\sqrt{6}}{12} = \cot (90^\circ - \theta); \csc \theta = \frac{7}{5} = \sec (90^\circ - \theta); \sec \theta = \frac{7\sqrt{6}}{12} = \csc (90^\circ - \theta); \cot \theta = \frac{2\sqrt{6}}{5} = \tan (90^\circ - \theta)$$

$$9. \text{ sen } \theta = \frac{4\sqrt{3}}{7} = \cos (90^\circ - \theta); \cos \theta = \frac{1}{7} = \text{sen } (90^\circ - \theta); \tan \theta = 4\sqrt{3} = \cot (90^\circ - \theta); \csc \theta = \frac{7\sqrt{3}}{12} = \sec (90^\circ - \theta);$$

$$\left[\sec \theta = 7 \right] = \csc (90^\circ - \theta); \cot \theta = \frac{\sqrt{3}}{12} = \tan (90^\circ - \theta) \quad 11. \text{ sen } \theta = \frac{\sqrt{7}}{3} = \cos (90^\circ - \theta); \left[\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{3} \right] = \text{sen } (90^\circ - \theta);$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{14}}{2} = \cot (90^\circ - \theta); \csc \theta = \frac{3\sqrt{7}}{7} = \sec (90^\circ - \theta); \sec \theta = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \csc (90^\circ - \theta); \cot \theta = \frac{\sqrt{14}}{7} = \tan (90^\circ - \theta)$$

13.	Función	$30^\circ \left(\frac{\pi}{6} \right)$	$45^\circ \left(\frac{\pi}{4} \right)$	$60^\circ \left(\frac{\pi}{3} \right)$
	seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
	coseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
	tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
	cosecante	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
	secante	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
	cotangente	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

15. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 17. 1 19. $\frac{1}{2}$ 21. falso 23. verdadero 25. falso 27. verdadero 29. falso 31. verdadero 33. 0.9063
 35. 0.3249 37. 0.7357 39. 1.3254 41. 7.1952 43. 1.7013 45. 56.29° 47. 75.97° 49. 72.20°
 51. 56.56° 53. 0.6087 55. 1.2639 57. 1.3444 59. 0.5707 61. $\sin \theta = 0.7341$; $\cos \theta = 0.6790$; $\tan \theta = 1.0811$;
 $\csc \theta = 1.3622$; $\sec \theta = 1.4727$; $\cot \theta = 0.9250$ 63. $\sin \theta = 0.9915$; $\cos \theta = 0.1300$; $\tan \theta = 7.6260$; $\csc \theta = 1.0086$;
 $\sec \theta = 7.6913$; $\cot \theta = 0.1311$ 65. a) 0.5707 b) 0.4293 c) 1.3292 d) 1.7523 e) 2.3292 f) 0.7523
 67. 802 ft-lb 69. 2.9 ft 70. 7.16° 71. 157.5 ft/sec

[6.4]

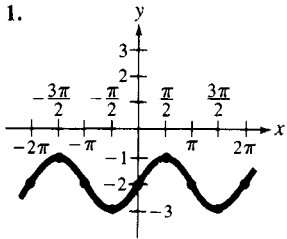
1. $c = 52$; $A = 22^\circ$; $B = 68^\circ$ 3. $b = 4.2$; $A = 65^\circ 40'$; $B = 24^\circ 20'$ 5. $B = 63^\circ 20'$; $a = 5.4$; $b = 10.7$ 7. $A = 79^\circ 10'$;
 $a = 16.7$; $c = 17.0$ 9. Cualquier triángulo similar con los ángulos dados es una solución posible; por lo menos se debe dar un lado
 para resolver el triángulo. 11. $A = 8^\circ 18'$; $a = 3.15$; $b = 21.62$ 13. 45.7 ft 15. 133.7 ft 17. 92 m 19. 1008 ft
 21. 9.4 mi 23. 129 km este; 153 km sur 25. 9° 27. 20.9 mi 29. 31.6 ft 31. 22.68 km/hr 33. 1294 mi/h
 35. $26^\circ 50'$ 37. $86^\circ 20'$ 39. 1383 ft 41. $26^\circ 30'$; 2 hr 5 min 43. a) 0.9501 b) 0.3120 c) 3.0451 d) 1.0525
 e) 3.2051 f) 0.3284 g) 0.9027 h) 10.2729 44. a) 0.8885 b) 0.4588 c) 1.9367 d) 1.1254 e) 2.1796
 f) 0.5164 g) 0.7895 h) 4.7506 45. a) 14.89° b) 0.2598 c) $14^\circ 53' 10''$ 46. a) 13.53° b) 0.2361
 c) $13^\circ 31' 47''$ 47. 21.0 rev 48. Una función es una relación con la propiedad donde a cada número real le corresponde uno y
 solo un elemento en el rango.

[6.5]

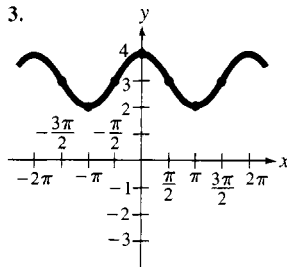
1. $P\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $Q\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $R\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$, $S\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ 3. $A(1, 0)$, $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C(0, 1)$, $D(0, -1)$, $E\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
 5. 2π 7. al revés del reloj 9. a) $(a, -b)$ b) $(-a, b)$ c) $(-a, -b)$ d) $(-a, -b)$ e) $(-b, a)$ f) $(b, -a)$
 11. $(0, 1)$ 13. $(0, -1)$ 15. $(0, 1)$ 17. $(1, 0)$ 19. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 21. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 23. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
 25. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 27. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 29. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 31. a) 0 b) $\frac{\pi}{2}$ c) π d) $\frac{3\pi}{2}$ e) $\frac{\pi}{4}$ f) $\frac{3\pi}{4}$ (g) $\frac{5\pi}{4}$
 h) $\frac{7\pi}{4}$ 33. a) 0 b) $-\frac{3\pi}{2}$ c) $-\pi$ d) $-\frac{\pi}{2}$ e) $-\frac{7\pi}{4}$ f) $-\frac{5\pi}{4}$ g) $-\frac{3\pi}{4}$ h) $-\frac{\pi}{4}$ 35. (a) 2π , 0, o -2π
 b) $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$ c) π , $-\pi$ d) $\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{7\pi}{4}$ f) $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{11\pi}{6}$ g) $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{3}$ h) $\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}$ (i) $\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{7\pi}{6}$
 37. (a) -1 b) 0 c) no definida d) -1 e) no definida f) 0 39. a) 1 (b) 0 c) no definida d) 1 e) no definida
 f) 0 41. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (c) 1 d) $\sqrt{2}$ e) $\sqrt{2}$ f) 1 43. a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 1 d) $-\sqrt{2}$ (e) $-\sqrt{2}$
 f) 1 45. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ (c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e) 2 f) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 47. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ (c) $-\sqrt{3}$ d) $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ (e) -2
 f) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 49. (a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) 2 e) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ f) $\sqrt{3}$ 51. a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) -2
 e) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ f) $-\sqrt{3}$ 53. Todas las funciones trigonométricas son positivas en el cuadrante I. 55. tangente, cotangente 57. a) 0.6570
 b) 0.7539 c) 0.8714 d) 1.5221 e) 1.3264 f) 1.1475 59. a) 0.0663 b) 0.9978 c) 0.0665 d) 15.0780
 e) 1.0022 f) 15.0448 61. a) 0 b) -1 c) 0 d) no definida e) -1 f) no definida 63. a) -0.7071 b) 0.7071
 c) -1 d) -1.4142 e) 1.4142 f) -1 65. $A = 35^\circ 33'$; $b = 13.3$; $c = 16.3$ 66. aproximadamente 530 mi/h
 67. 47.8 mi 68. 17.47 mi/h 69. decreciente: $x \leq 1$; creciente: $x \geq 1$ 70. decreciente: $x \geq -2$; creciente: $x \leq -2$

[6.6]

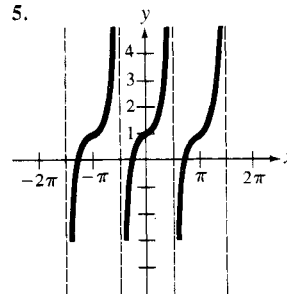
1.



3.



5.



de la función del seno no es 2π , sino un número $a > 0$. Ya que $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, para cada número real x , si a es el periodo de la función del seno, entonces $0 < a < 2\pi$, y $\sin(x + a) = \sin x$ para cada número real x . Entonces en particular, si $x = 0$, $\sin(0 + a) = \sin 0 = 0$. Pero si $\sin a = 0$ y $0 < a < 2\pi$, entonces $a = \pi$, y $\sin(x + \pi) = \sin x$, para cada número real x . Pero de nuevo en particular, para $x = \frac{\pi}{2}$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = \sin\frac{\pi}{2}$, es una contradicción ya que $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$ y $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Así

nuestra consideración de que a era un periodo de la función del seno es incorrecta y el periodo debe ser 2π . 45. a) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y

$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ b) $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 47. a) La función de la tangente se incrementa en todo $[0, 2\pi]$; $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. b) La función de la

tangente nunca decrece en $[0, 2\pi]$; y $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. 49. a) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ b) $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

51. a) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) -1 e) $\sqrt{2}$ f) $-\sqrt{2}$ g) -1 52. a) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$

d) $-\sqrt{3}$ e) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ f) -2 g) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 53. a) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (e) -2 f) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

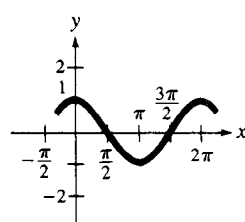
g) $\sqrt{3}$ 54. a) 0.3739 b) 0.9275 c) 0.4031 d) 2.6747 (e) 1.0782 f) 2.4807 55. a) 0.8660 b) 0.5 c) 1.7321

d) 1.1547 e) 2 f) 0.5774 56. $57^\circ 30'$

[6.7]

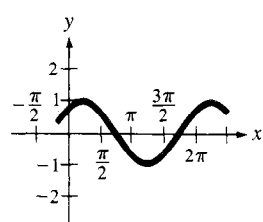
1. a) 1 b) 2π

c) $\frac{\pi}{2}$ (izquierda)



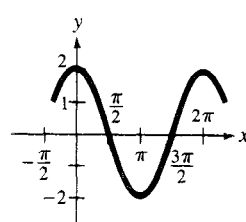
3. a) 1 b) 2π

c) $\frac{\pi}{4}$ (derecha)



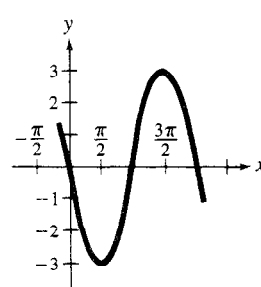
5. a) 2 b) 2π

c) $\frac{\pi}{2}$ (izquierda)



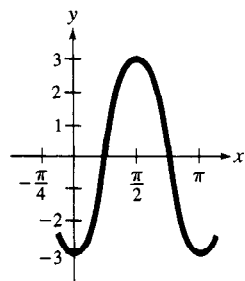
7. a) 3 b) 2π

c) $\frac{\pi}{2}$ (derecha) d)



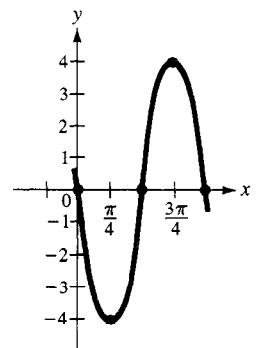
9. a) 3 b) π

c) $\frac{\pi}{2}$ (derecha) (d)



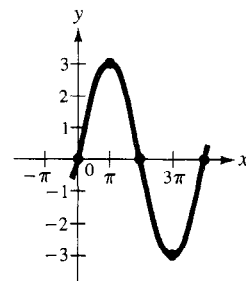
11. a) 4 b) π

c) $\frac{\pi}{2}$ (izquierda)

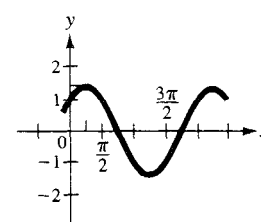


13. a) 3 b) 4π

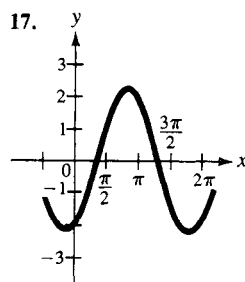
c) π (derecha)



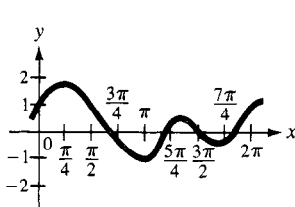
15.



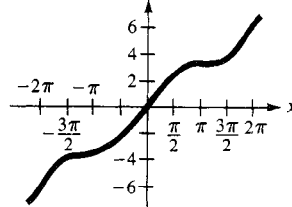
17.



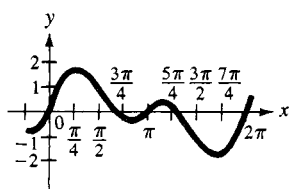
19.



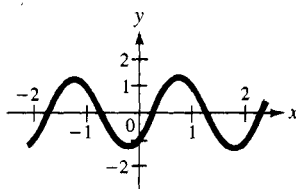
21.



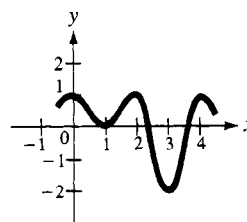
23.



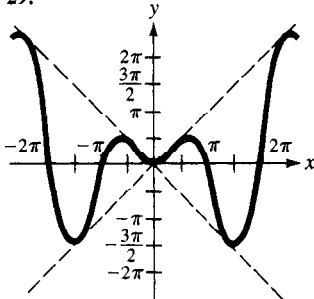
25.



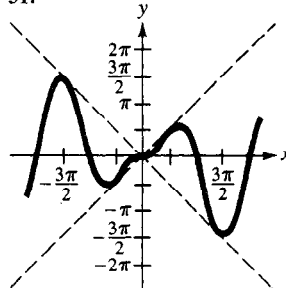
27.



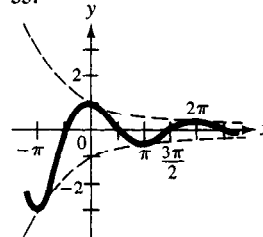
29.



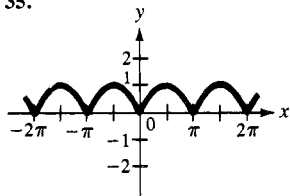
31.



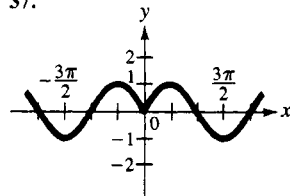
33.



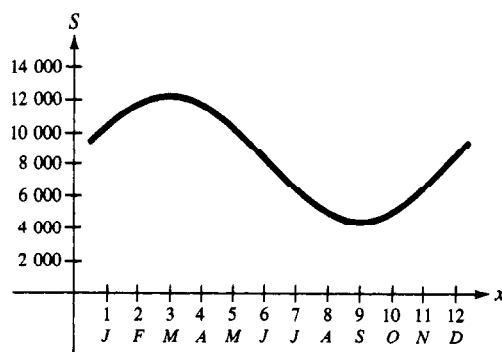
35.



37.



39. El mes de menores ventas es septiembre.

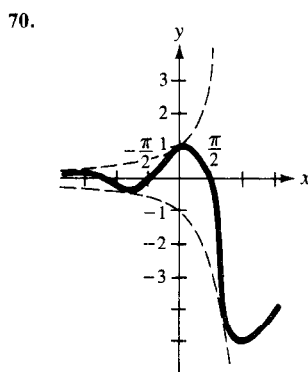
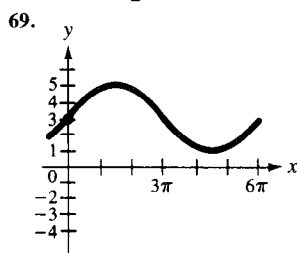
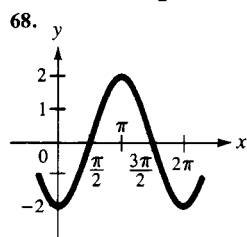


41. aproximadamente 7.5 minutos 42. 39°00'

1. $\sec t = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos t}$ 3. $\tan t = \frac{y}{x}$, $1 + \tan^2 t = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\cos^2 t} = \sec^2 t$ 5. $\tan t = \frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\cos t}$
7. Supóngase que (x, y) es el punto correspondiente a t , entonces $(-y, x)$ es el punto correspondiente a $t + \frac{\pi}{2}$. Entonces $\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = x = \cos t$. Así, $\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t$. 9. Si (x, y) corresponde a t , entonces $(y, -x)$ corresponde a $t - \frac{\pi}{2}$. Entonces $\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = y = \sin t$. Así, $\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin t$. 11. $\cot\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sin t}{-\cos t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\tan t$
13. $\sec\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} = \frac{1}{\sin t} = \csc t$ 15. Si (x, y) es el punto correspondiente a t , entonces $(-x, -y)$ es el punto correspondiente a $t + \pi$. Entonces $\cos(t + \pi) = -x = -\cos t$. Así, $\cos(t + \pi) = -\cos t$. 17. Si (x, y) corresponde a t , entonces $(-x, y)$ corresponde a $\pi - t$. Entonces $\cos(\pi - t) = -x = -\cos t$. Así, $\cos(\pi - t) = -\cos t$. 19. Si (x, y) corresponde a t , entonces $(x, -y)$ corresponde a $-t$. Entonces $\sin(-t) = -y = -\sin t$. Así, $\sin(-t) = -\sin t$. 21. $\cos^2 t$ 23. 1 25. 1
27. 1 29. $\cot^2 y$ 31. $\csc t$ 33. $\cot t$ 35. $\cot u$ 37. $\sec t$ 39. $\sin t$ 41. $\sec^2 x + \cos^2 x + 2$
43. $\csc^2 t + 2 \cot t$ 45. $\tan^2 u$ 47. 1 49. $-\tan^2 y - \sec^2 y$ 51. $(1 - \sin t)(1 + \sin t + \sin^2 t)$ 53. 1
55. $\sin z (1 - \tan z)$ 57. $\sec t = \frac{-1}{\sqrt{1 - \sin^2 t}}$ 59. $\cot t = -\frac{\cos t}{\sqrt{1 - \cos^2 t}}$ 61. a) $-\frac{3}{5}$ b) $-\frac{4}{5}$ c) $-\frac{5}{4}$

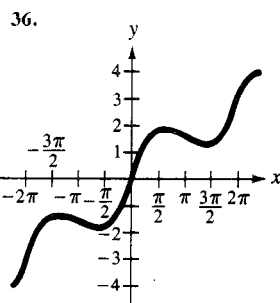
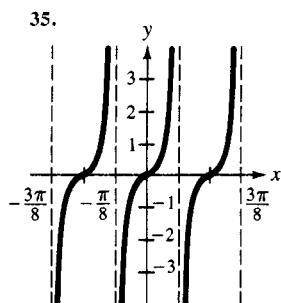
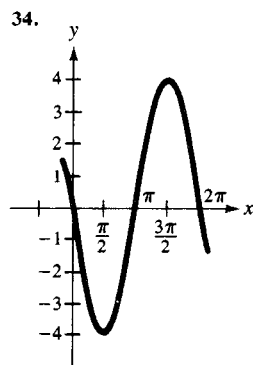
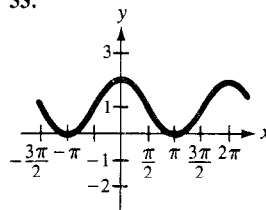
63. Ya que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, tomando el logaritmo común de ambos lados, $\log \tan x = \log \frac{\sin x}{\cos x} = \log \sin x - \log \cos x$. 65. Ya que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, tomando el logaritmo natural de ambos lados, $\ln \sec x = \ln \frac{1}{\cos x} = \ln 1 - \ln \cos x = 0 - \ln \cos x = -\ln \cos x$.

66. a) 3 b) $\frac{\pi}{2}$ c) 3π (derecha) 67. a) $\frac{1}{2}$ b) 4π c) 6π (izquierda)

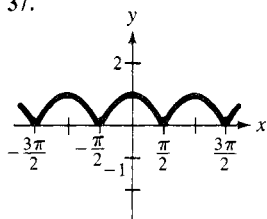


Ejercicios de repaso del capítulo 6

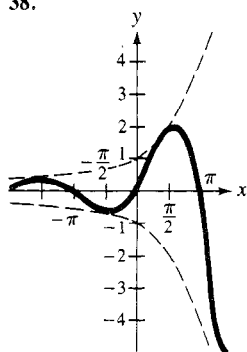
1. no 2. 148.66° 3. 0.5166 4. $408^\circ 51' 25''$ 5. 8.46 m 6. 4933 mi 7. 2 ft 8. 358 rpm
9. $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3} = \cos(90^\circ - \theta)$; $\cos \theta = \frac{2}{3} = \sin(90^\circ - \theta)$; $\tan \theta = \frac{\sqrt{5}}{2} = \cot(90^\circ - \theta)$; $\csc \theta = \frac{3\sqrt{5}}{5} = \sec(90^\circ - \theta)$;
 $\sec \theta = \frac{3}{2} = \csc(90^\circ - \theta)$; $\cot \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \tan(90^\circ - \theta)$ 10. $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\csc 30^\circ = 2$;
 $\sec 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$ 11. $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan 45^\circ = 1$; $\csc 45^\circ = \sqrt{2}$; $\sec 45^\circ = \sqrt{2}$; $\cot 45^\circ = 1$
12. $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$; $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$; $\csc 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\sec 60^\circ = 2$; $\cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 13. 0.5085 14. 4.0151
15. 3.2361 16. a) 52.33° b) 0.9133 17. (a) 17.08° (b) 0.2981 18. a) 62.35° b) 1.0882 19. $c = 15.8$;
 $A = 18^\circ 30'$; $B = 71^\circ 30'$ 20. 58.3 m 21. 8.4 mi desde B; 6.6 mi desde A 22. 17 mi oeste 47 mi sur 23. 543 km/h
24. 31 mph 25. $32^\circ 40'$ 26. a) 0 b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{3\pi}{2}$ d) $\frac{\pi}{4}$ e) $\frac{\pi}{6}$ f) π g) $\frac{7\pi}{4}$ h) $\frac{5\pi}{3}$ i) $\frac{3\pi}{4}$ j) $\frac{7\pi}{6}$
27. a) 0 b) $-\frac{3\pi}{2}$ c) $-\frac{\pi}{2}$ d) $-\frac{7\pi}{4}$ e) $-\frac{11\pi}{6}$ f) $-\pi$ g) $-\frac{\pi}{4}$ h) $-\frac{\pi}{3}$ i) $-\frac{5\pi}{4}$ j) $-\frac{5\pi}{6}$ 28. a) -1
b) 0 c) no definida (d) -1 (e) no definida f) 0 29. a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) -1 d) $-\sqrt{2}$ e) $\sqrt{2}$ f) -1
30. a) $-\frac{1}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) -2 e) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ f) $\sqrt{3}$ 31. III 32. IV 33.



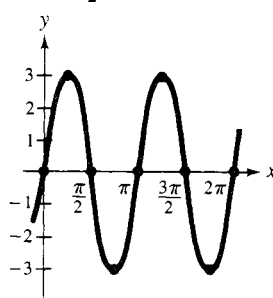
37.



38.

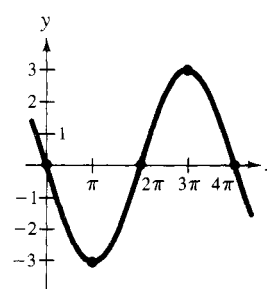


39. a) 3 b) π

c) $\frac{\pi}{2}$ (derecha) d)

40. a) 3 b) 4π

c) π (izquierda) d)



41. falso 42. verdadero 43. verdadero 44. verdadero 45. falso 46. verdadero 47. verdadero 48. verdadero 49. falso
 50. verdadero 51. verdadero 52. falso 53. $\cos^2 x$ 54. $\sin y - \tan y$ 55. $\tan^3 y + \cot^3 y$ 56. $1 + 2 \sin x \cos x$
 57. $\sin x(1 - \tan x)$ 58. $\sec^2 y + 2 \tan^2 y$ o $1 + 3 \tan^2 y$ 59. $\sin y - 1$ 60. $\sin x + 1$

Capítulo 7

1. $\sin A = \frac{4}{5}$; $\cos A = \frac{3}{5}$; $\tan A = \frac{4}{3}$; $\csc A = \frac{5}{4}$; $\sec A = \frac{5}{3}$; $\cot A = \frac{3}{4}$ 3. $\sin A = -\frac{4}{5}$; $\cos A = -\frac{3}{5}$; $\tan A = \frac{4}{3}$;
 $\csc A = -\frac{5}{4}$; $\sec A = -\frac{5}{3}$; $\cot A = \frac{3}{4}$ 5. $\sin A = \frac{5\sqrt{26}}{26}$; $\cos A = \frac{\sqrt{26}}{26}$; $\tan A = 5$; $\csc A = \frac{\sqrt{26}}{5}$; $\sec A = \sqrt{26}$; $\cot A = \frac{1}{5}$
 7. $\sin A = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cos A = -\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\tan A = -2$; $\csc A = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sec A = -\sqrt{5}$; $\cot A = -\frac{1}{2}$ 9. $\sin A = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $\cos A = \frac{2\sqrt{5}}{5}$;
 $\tan A = \frac{1}{2}$; $\csc A = \sqrt{5}$; $\sec A = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\cot A = 2$ 11. $\sin A = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $\cos A = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\tan A = -\frac{1}{2}$; $\csc A = \sqrt{5}$;
 $\sec A = -\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\cot A = -2$ 13. $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan A = 1$; $\csc A = \sqrt{2}$; $\sec A = \sqrt{2}$; $\cot A = 1$
 15. $\sin A = 0$; $\cos A = 1$; $\tan A = 0$; $\csc A$ sin definir $\sec A = 1$; $\cot A$ sin definir; 17. $\sin A = 0$; $\cos A = -1$; $\tan A = 0$;
 $\csc A$ sin definir $\sec A = -1$; $\cot A$ sin definir 19. mismas respuestas que el ejercicio 15 21. mismas respuestas que el ejercicio 17
 23. I 25. II 27. II 29. 43° 31. 40.2° 33. $34^\circ 45'$ 35. $1^\circ 15'$ 37. $\frac{\pi}{4}$ 39. $\frac{\pi}{6}$ 41. $\frac{\pi}{3}$ 43. $\frac{\pi}{3}$
 45. $\sin(-50^\circ) = -\sin 50^\circ = -0.7660$; $\cos(-50^\circ) = \cos 50^\circ = 0.6428$; $\tan(-50^\circ) = -\tan 50^\circ = -1.1918$;
 $\csc(-50^\circ) = -\csc 50^\circ = -1.3054$; $\sec(-50^\circ) = \sec 50^\circ = 1.5557$; $\cot(-50^\circ) = -\cot 50^\circ = -0.8391$
 47. $\sin 920^\circ = -\sin 20^\circ = -0.3420$; $\cos 920^\circ = -\cos 20^\circ = -0.9397$; $\tan 920^\circ = \tan 20^\circ = 0.3640$;
 $\csc 920^\circ = -\csc 20^\circ = -2.9238$; $\sec 920^\circ = -\sec 20^\circ = -1.0642$; $\cot 920^\circ = \cot 20^\circ = 2.7475$ 49. $A = 204^\circ 56'$ y
 $A = 335^\circ 04'$ 51. $A = 65^\circ 44'$ y $A = 245^\circ 44'$ 53. $A = 193^\circ 22'$; y $A = 346^\circ 38'$ 55. $\sin A = -\frac{3}{5}$; $\tan A = -\frac{3}{4}$;
 $\csc A = -\frac{5}{3}$; $\sec A = \frac{5}{4}$; $\cot A = -\frac{4}{3}$ 57. $\cos A = -\frac{\sqrt{5}}{3}$; $\tan A = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\csc A = -\frac{3}{2}$; $\sec A = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$; $\cot A = \frac{\sqrt{5}}{2}$
 59. imposible pues $\sin A$ no puede ser mayor que 1 61. 1 495 ft

1. $C = 87^\circ 10'$; $b = 12.0$; $c = 15.5$ 3. $A = 66.00^\circ$; $b = 10.85$; $c = 11.95$ 5. $B = 90.0^\circ$; $C = 60.0^\circ$; $c = 10.4$
 7. sin solución 9. primera solución: $a = 16.5$; $C = 54^\circ 30'$; $A = 96^\circ 40'$; segunda solución: $a = 7.2$; $C = 125^\circ 30'$; $A = 25^\circ 40'$
 11. $B = 18^\circ 30'$; $A = 110^\circ 20'$; $a = 36.4$ primera solución: $a = 16.43$, $B = 34^\circ 38'$, $A = 124^\circ 40'$; segunda solución: $a = 4.81$,
 $B = 145^\circ 22'$, $A = 13^\circ 56'$ 15. 14.3 km 17. 39.4 mi desde el faro, 35.9 mi desde la isla. 19. 0.75 mi 21. 3106 ft
 23. El Wilson está a 91.2 millas náuticas del piloto y el Lincoln está a 104.4 millas náuticas más allá. El Wilson debe arribar primero
 en aproximadamente 2.4 horas. 25. aproximadamente 593 ft 27. $71^\circ 40'$ 28. $\sin A = \frac{4\sqrt{17}}{17}$; $\cos A = -\frac{\sqrt{17}}{17}$; $\tan A = -4$;
 $\csc A = \frac{\sqrt{17}}{4}$; $\sec A = -\sqrt{17}$; $\cot A = -\frac{1}{4}$ 29. $A = 103^\circ 35'$ y $A = 283^\circ 35'$ 30. $\sin A = -\frac{5\sqrt{41}}{41}$; $\cos A = \frac{4\sqrt{41}}{41}$;
 $\tan A = -\frac{5}{4}$; $\csc A = -\frac{\sqrt{41}}{5}$; $\sec A = \frac{\sqrt{41}}{4}$

1. $a = 6.4$; $B = 56.0^\circ$; $C = 81.5^\circ$ 3. $A = 15^\circ 20'$; $B = 20^\circ 40'$; $C = 144^\circ 00'$ 5. $A = 64^\circ 20'$; $B = 64^\circ 20'$; $C = 51^\circ 20'$ [¿Tomó
 en cuenta el hecho de que $A = B$ pues el triángulo es isósceles?] 7. sin solución [¿Se aprecia que $a + b < c$ por lo que no es
 posible el triángulo?] 9. $B = 37^\circ 10'$; $a = 3.6$; $c = 12.6$ 11. $b = 17.0$; $A = 35.0^\circ$; $C = 24.6^\circ$ 13. 5.6 y 12.8

15. 7.07 y 12.73 17. 107 mi 19. 82 mi 21. 52 m 23. 857 ft 25. aproximadamente 350 ft
 27. aproximadamente 81.8 mi 29. $102^{\circ}20'$ 31. a) 5.5 mi b) $22^{\circ}30'$ 33. $C = 82^{\circ}00'$; $a = 1.6$; $c = 3.7$
 34. $B = 25^{\circ}10'$; $C = 106^{\circ}00'$; $c = 18.8$ 35. 579 m 36. 12 700 ft

[7.4]

1. 46.3 in^2 3. 48.90 yd^2 5. 48.3 ft^2 7. 178.93 in^2 9. 3.73 yd^2 11. 7.3 m^2 13. 31.7 ft^2 15. Tres ángulos no determinan un triángulo único por lo que no hay una solución sencilla. 17. \$1 715.17 19. 55.2 yd^2 21. 93.5 in^2
 23. 42.6 in^3 25. 14.0 m^2 27. El área del triángulo ABD es $\frac{1}{2}bd \sin A$. Ya que el paralelograma se forma con dos triángulos con esta área, Área = $2\left(\frac{1}{2}bd \sin A\right) = bd \sin A$. 29. Encontrar el área del triángulo ABC usando la fórmula de Heron y dar el resultado igual a la suma de las áreas de los triángulos ABP , BCP y ACP . Resolviendo r se obtiene la fórmula deseada. 31. 55.1 m
 32. 119 Millas náuticas 33. a) 3 b) π c) $\frac{\pi}{2}$ (derecha) 34. a) 5 b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{8}$ (izquierda)

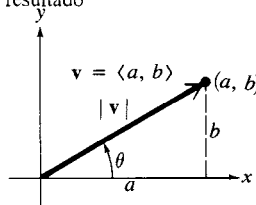
[7.5]

1. a) $h = -30 \cos \frac{\pi}{5}t + 35$ (b) 65 ft 3. a) 15 ft del techo b) $\frac{1}{2}$ segundo c) 5 ft d) 15 ft e) 10 ft (la posición de equilibrio) f) 5 g) 2 h) $\frac{1}{2}$ i) $\frac{1}{2}$ (derecha) 5. Cuando $t = 0$, entonces $y = -5$. Si el peso se baja a 5 ft y después se libera, debe estar a 5 pies arriba de la posición de equilibrio 1 segundo después, imposible pues $k = 4$. Así, si se libera de esta forma el problema no tiene solución. 7. a) 12 ft del techo (el peso se empuja hacia arriba para iniciar el movimiento)
 b) 2 segundos c) 12 ft d) 28 ft aproximadamente 23 ft f) 8 g) 8 h) $\frac{1}{8}$ i) 2 (izquierda). a) 0 b) 0 c) 5π
 d) -12.7 11. $y = -2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ 13. a) 180 b) $\frac{1}{60}$ c) 60 15. $y = 4 + 1.5 \sin(4\pi t)$ 17. 3 ft 19. a) 72
 b) 140 c) Enero 1, 1977 $\left(t = \frac{3}{2}\right)$ d) 60 e) Enero 1, 1979 f) 140 coyotes ($t = 9.5$) g) Las altas y bajas en la población de coyotes sucede 6 meses después que las altas y bajas en la población de conejos. 20. \$5 550 21. 43.7 cm

[7.6]

1. a) 5 b) $53^{\circ}10'$ c) $\langle 1, 7 \rangle$ d) $\langle -2, -1 \rangle$ e) $\langle 9, 12 \rangle$ f) $\langle 11, 18 \rangle$ g) $\langle -1, 7 \rangle$ h) $\langle 1, 3 \rangle$ i) $\langle 3, 4 \rangle$ 3. a) 4
 b) $180^{\circ}00'$ c) $\langle -4, 2 \rangle$ d) $\langle 4, 2 \rangle$ e) $\langle -12, 0 \rangle$ f) $\langle -12, 4 \rangle$ g) $\langle 8, 10 \rangle$ h) $\langle 0, 2 \rangle$ i) $\langle 4, 0 \rangle$ 5. a) $\sqrt{26}$
 b) $101^{\circ}20'$ c) $i + 8j$ d) $3i - 2j$ (e) $-3i + 15j$ f) $i + 21j$ g) $12i + 5j$ h) $2i + 3j$ i) $i - 5j$ 7. a) 5 b) $0^{\circ}00'$
 c) $5i - 2j$ d) $-5i - 2j$ e) $15i$ f) $15i - 4j$ g) $-10i - 10j$ h) $-2j$ i) $-5i$
 9. $u + v = \langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle = \langle a + c, b + d \rangle = \langle c + a, d + b \rangle = \langle c, d \rangle + \langle a, b \rangle = v + u$
 11. $u + 0 = \langle a, b \rangle + \langle 0, 0 \rangle = \langle a + 0, b + 0 \rangle = \langle a, b \rangle = u$ 13. $0u = 0\langle a, b \rangle = \langle 0 \cdot a, 0 \cdot b \rangle = \langle 0, 0 \rangle = 0$
 15. $(kn)u = (kn)\langle a, b \rangle = \langle (kn)a, (kn)b \rangle = \langle k(na), k(nb) \rangle = k\langle na, nb \rangle = k\langle n\langle a, b \rangle \rangle = k(n\langle a, b \rangle) = k(nu)$ 17. $k(u + v) = k(\langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle) = k\langle a + c, b + d \rangle = \langle k(a + c), k(b + d) \rangle = \langle ka + kc, kb + kd \rangle = \langle ka, kb \rangle + \langle kc, kd \rangle = k\langle a, b \rangle + k\langle c, d \rangle = ku + kv$
 19. $|kv| = |k\langle c, d \rangle| = |k\langle c, d \rangle| = \sqrt{(kc)^2 + (kd)^2} = \sqrt{k^2c^2 + k^2d^2} = \sqrt{k^2(c^2 + d^2)} = \sqrt{k^2}\sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{k^2}\sqrt{c^2 + d^2} = |k||v|$
 21. Considere el esquema v dado en la figura con θ como se indica (se muestra v en el cuadrante I pero el resultado es cierto para cualquier posición de v). Entonces $\cos \theta = \frac{a}{|v|}$ and $\sin \theta = \frac{b}{|v|}$ para que

$$a = |v| \cos \theta \quad y \quad b = |v| \sin \theta.$$



27. $v = \langle 12.9, 27.1 \rangle$ 29. $v = \langle -3.3, -11.7 \rangle$ 31. 48.9 lb; $S80^{\circ}50'E$ 33. 18.9 kg; $N26^{\circ}10'E$ 35. magnitud del componente horizontal: 15.3 ft/s; magnitud del componente vertical: 12.9 ft/s 37. 74.3 lb; $19^{\circ}40'$ 39. Sí, ya que la fuerza del barril hacia abajo de la rampa es aproximadamente de 100 lb, el hombre puede superar esto y rodar hacia arriba el barril por la rampa.
 41. $96^{\circ}10'$; 276.6 mi/h 43. 147° ; 247 mi/h 45. 8 mi/h; $29^{\circ}40'$ 47. 386 mi 49. 22.7 lb
 50. a) 7.5 ft del techo b) $\frac{1}{2}$ segundo c) 2.5 ft d) 7.5 ft e) 5 ft f) 2.5 g) 2 h) $\frac{1}{2}$ i) $\frac{1}{2}$ (derecha)

Ejercicios de repaso del capítulo 7

1. $\sin A = \frac{3\sqrt{10}}{10}$; $\cos A = -\frac{\sqrt{10}}{10}$; $\tan A = -3$; $\csc A = \frac{\sqrt{10}}{3}$; $\sec A = -\sqrt{10}$; $\cot A = -\frac{1}{3}$ 2. $\sin A = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$;
 $\cos A = -\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\tan A = 2$; $\csc A = -\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sec A = -\sqrt{5}$; $\cot A = \frac{1}{2}$ 3. III 4. 25° 5. $55^{\circ}40'$ 6. $\frac{\pi}{3}$ 7. $\frac{\pi}{4}$
 8. $A = 72^{\circ}26'$ y $A = 252^{\circ}26'$ 9. $A = 76^{\circ}29'$ y $A = 283^{\circ}31'$ 10. $\sin A = -\frac{4}{5}$; $\cos A = -\frac{3}{5}$; $\csc A = -\frac{5}{4}$;

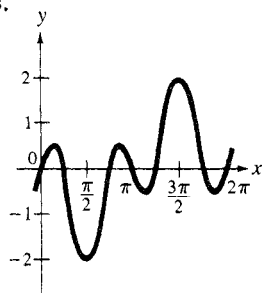
- $\sec A = -\frac{5}{3}$; $\cot A = \frac{3}{4}$ 11. $C = 80^\circ 20'$; $b = 19.0$; $c = 21.3$ 12. sin solución 13. $a = 5.53$, $B = 46^\circ 08'$, $C = 62^\circ 07'$
 14. $A = 40^\circ 40'$; $B = 28^\circ 50'$; $C = 110^\circ 30'$ 15. 60 yd 16. 18.8 km 17. 74 mi 18. 93 mi 19. 5.6 yd²
 20. 49.75 in² 21. aproximadamente 0.9 acres 22. aproximadamente 1.5 bolsas se necesitarán 23. a) 120 b) $\frac{1}{50}$ c) 50
 24. $y = 10 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ 25. a) 13 b) $112^\circ 40'$ c) $\langle -4, 10 \rangle$ d) $\langle -6, 14 \rangle$ e) $\langle 10, -24 \rangle$ f) $\langle -23, 54 \rangle$ g) $\langle 1, -2 \rangle$
 h) $\langle 5, -12 \rangle$ 26. a) 7 b) $0^\circ 00'$ c) $6i + j$ d) $8i - j$ e) $-14i$ f) $31i - 3j$ g) $-i + j$ h) $-7i$ 27. magnitud del componente horizontal: 50.3 pies/s; magnitud del componente vertical: 32.7 pies/s 28. $182^\circ 30'$; 418 mi/h 29. 35 ft/s 31°
 30. 70 lb para sostener; 187 lb en contra de la rampa

Capítulo 8

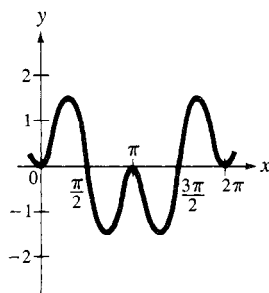
55. $0 \leq x \leq \pi$ 57. $0 < x < \pi$ 59. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 61. $a^5 \sin^5 \theta$ 63. $\frac{1}{a} \sec \theta \tan \theta$ 65. $\frac{1}{a} \cos \theta$
 67. $\frac{1}{\cos \theta \sqrt{1 - \cos^2 \theta}}$ 69. $\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta}$ 71. Sea $A = 0$ y $B = 0$, entonces $\cos(A - B) = \cos 0 = 1$, pero $\cos A - \cos B = 1 - 1 = 0$. 73. Sea $A = \frac{\pi}{2}$ y $B = \frac{\pi}{2}$, entonces $\sin(A + B) = \sin \pi = 0$, pero $\sin A + \sin B = 1 + 1 = 2$.
 75. $8i - 23j$ 76. $7i - 16j$
 1. a) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4}$ b) $\frac{\sqrt{2}(1 - \sqrt{3})}{4}$ c) $-2 - \sqrt{3}$ 3. a) $\frac{-\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4}$ b) $\frac{\sqrt{2}(1 - \sqrt{3})}{4}$ c) $2 + \sqrt{3}$
 5. a) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}$ b) $\frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{4}$ c) $2 - \sqrt{3}$ 7. $\cos(S - T)$ 9. $\sin(T + S)$ 11. $\tan(S - T)$ 13. $\cos 170^\circ$
 15. $\sin 210^\circ$ 17. $\cos 3x$ 19. $\sin 4$ 21. $\tan 3$ 23. a) $\frac{7}{25}$ b) -1 c) $-\frac{24}{25}$ d) 0 e) $-\frac{24}{7}$ f) 0
 55. $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} =$
 $\sin x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\sin h}{h} \right)$ 57. Se sabe que l_1 es perpendicular a l_2 si y sólo si $\theta_2 - \theta_1 = 90^\circ$ si y sólo si $\tan(\theta_2 - \theta_1)$ está sin definir si y sólo si $1 + m_1 m_2 = 0$ si y sólo si $m_1 = -\frac{1}{m_2}$.
 1. a) $\frac{24}{25}$ b) $\frac{7}{25}$ c) $\frac{24}{7}$ d) I 3. a) $-\frac{120}{169}$ b) $\frac{119}{169}$ c) $-\frac{120}{119}$ d) IV 5. a) $\frac{24}{25}$ b) $\frac{7}{25}$ c) $\frac{24}{7}$ d) I
 7. a) $-\frac{120}{169}$ b) $-\frac{119}{169}$ c) $\frac{120}{119}$ d) III 9. a) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$ c) $2 - \sqrt{3}$ 11. a) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$
 b) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$ c) $\sqrt{2} - 1$ 13. a) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$ c) $-2 - \sqrt{3}$ 15. 2 17. $\cos 2x$ 19. $\tan x$
 21. $\cos^4 A - 6 \sin^2 A \cos^2 A + \sin^4 A$ 23. $\cos^3 A - 3 \sin^2 A \cos A$ 25. $\frac{1}{8} \cos 4A - \frac{1}{2} \cos 2A + \frac{3}{8}$
 27. $\frac{1}{16} + \frac{1}{16} \cos 2A - \frac{1}{16} \cos 4A - \frac{1}{16} \cos 2A \cos 4A$ 49. 459 ft 51. a) $-\frac{33}{65}$ b) $-\frac{63}{65}$ c) $\frac{56}{65}$ d) $\frac{16}{65}$ e) $-\frac{56}{33}$
 f) $-\frac{16}{63}$ 54. $y = A \cos Bx \cos BC + A \sin Bx \sin BC$ 55. $y = A \sin Bx \cos BC - A \cos Bx \sin BC$

1. $\frac{1}{2} [\sin 3x + \sin x]$ 3. $\cos 5u + \cos 3u$ 5. $2[\sin 7x + \sin x]$ 7. $\frac{2 + \sqrt{3}}{4}$ 9. $\frac{1}{4}$ 11. $\frac{1}{2}$

13.



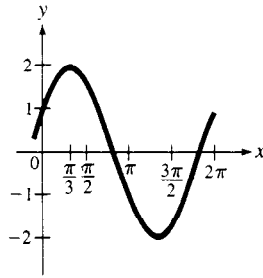
15.



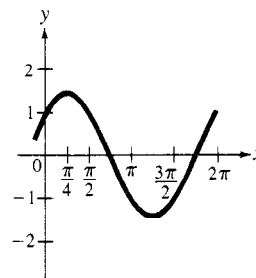
17. $2 \cos 3x \sin 2x$ 19. $2 \cos\left(\frac{3u}{2}\right) \cos\left(\frac{u}{2}\right)$ 21. $-2 \sin\left(\frac{7x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ 23. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 25. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 27. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

29. $y = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; amplitud $= \sqrt{2}$; periodo $= 2\pi$; cambio de fase $= -\frac{\pi}{4}$ a la izquierda. $y = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; amplitud $= 2$; periodo $= \pi$; cambio de fase $= \frac{\pi}{6}$ a la izquierda 33. $y = 5 \cos 2\pi(x - 0.352)$; amplitud $= 5$ periodo $= 1$; cambio de fase $= 0.352$ a la derecha

35. $y = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
amplitud $= 2$
periodo $= 2\pi$
cambio de fase $= \frac{\pi}{3}$ (derecha)



37. $y = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
amplitud $= \sqrt{2}$
periodo $= 2\pi$
cambio de fase $= \frac{\pi}{4}$ (derecha)



51. Ambos lados son aproximadamente iguales a -0.4598 . 53. Ambos lados son aproximadamente iguales a 1.5020 . 55. (a) $\frac{24}{25}$
b) $-\frac{7}{25}$ c) $-\frac{24}{7}$ d) II 56. a) $\pm \frac{3\sqrt{13}}{13}$ b) $\pm \frac{2\sqrt{13}}{13}$ c) $\frac{3}{2}$ d) I o III

[8.5]

1. $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ 3. $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ 5. $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{11\pi}{6}$ 7. $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$ 9. 0, π 11. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$
13. $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$ 15. 1.3181, π , 4.9651 17. 0, π 19. 0, π 21. 30° , 150° 23. 0° , 90° , 180° , 270° 25. 90°
27. 15° , 75° , 195° , 255° 29. 45° , 105° , 165° , 225° , 285° , 345° 31. 0° , 120° , 240° 33. $34^\circ 20'$, $145^\circ 40'$ 35. 15° , 75° , 195° , 255° 37. 0° , 45° , 90° , 135° , 180° , 225° , 270° , 315° 39. 0° , 90° , 180° , 270° 41. 0° , 60° , 90° , 120° , 180° , 240° , 270° , 300° 43. 0° , 120° , 180° , 240° 45. sin solución 47. $109^\circ 28'$, $138^\circ 35'$, $221^\circ 25'$, $250^\circ 32'$ 49. $78^\circ 41'$, $153^\circ 26'$, $258^\circ 41'$, $333^\circ 26'$ 51. 60° 53. $\frac{1}{720}$ segundo 55. $\sin 8x - \sin 4x$ 56. $2 \sin 4x \cos 3x$

57. $y = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, amplitud 2, periodo π , cambio de fase $\frac{\pi}{3}$ a la derecha 59. $f^{-1}(x) = \frac{x}{5} + \frac{3}{5}$ 60. $y = x^2 - 3$, $x \geq 0$

[8.6]

1. $\frac{\pi}{6}$ 3. $\frac{3\pi}{4}$ 5. $-\frac{\pi}{3}$ 7. sin definir 9. $\frac{\pi}{3}$ 11. 0.5511 13. 0.7592 15. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 17. $\sqrt{3}$ 19. $\frac{5\pi}{6}$
21. 0.9051 23. 0.7137 25. no existe el valor 27. 1.9539 29. 0.1140 31. $\frac{3}{5}$ 33. $\frac{3}{4}$ 35. $\frac{4}{5}$ 37. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
39. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 41. $\frac{7}{25}$ 43. $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ 45. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 47. 0 49. $\frac{24}{25}$ 51. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 53. $\sqrt{1-x^2}$ 55. $\frac{\pm\sqrt{1-x^2}}{x}$
61. Sea $x = \frac{1}{2}$, por ejemplo, entonces el lado izquierdo es $\frac{\pi}{6}$, pero el lado derecho es aproximadamente 2.0858. Sea $x = \frac{1}{2}$,

por ejemplo, entonces el lado izquierdo es 0.5 pero el lado derecho es aproximadamente 0.4636. 65. Si $y = \operatorname{arccsc} x$ para x en $(-\infty, -1]$

o $[1, \infty)$, entonces $x = \sec y$ y y es uno de los intervalos $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ o $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. 67. 1.1416; ya que 2 no está en el rango de la función inversa del seno, $\operatorname{arcsen}(\sin 2)$ no igualará a 2. 69. El valor debe ser -1 pues -1 está en el rango de la función inversa del seno. 71. 30° , 150° , 210° , 330° 72. 0° , 180° 73. $68^\circ 30'$, $248^\circ 30'$ 74. $14^\circ 29'$, $165^\circ 31'$, $191^\circ 32'$, $348^\circ 28'$ 75. $2^\circ 9'$

Ejercicios de repaso del capítulo 8

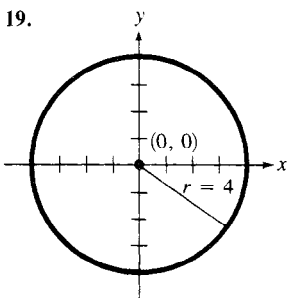
15. $\frac{\sqrt{1-\sin^2 \theta}}{\sin \theta(1-\sin^2 \theta)}$ 16. $\frac{63}{65}$ 17. $\frac{16}{65}$ 18. $\frac{63}{16}$ 19. $\frac{33}{65}$ 20. $-\frac{56}{65}$ 21. $-\frac{33}{56}$ 22. $-\frac{120}{169}$ 23. $-\frac{119}{169}$
24. $\frac{120}{119}$ 25. $\pm \frac{3\sqrt{13}}{13}$ 26. $\pm \frac{2\sqrt{13}}{13}$ 27. $\frac{3}{2}$ 28. $2[\sin 8x + \sin 2x]$ 29. $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$ 30. $-2 \sin 4x \sin x$
31. 1 32. $y = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; amplitud $= 2$; periodo $= 2\pi$; cambio de fase $= \frac{\pi}{6}$ a la izquierda 33. $\frac{\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ 34. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$ 35. $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$ 36. 15° , 75° , 105° , 165° , 195° , 255° , 285° , 345° 37. $65^\circ 30'$, $245^\circ 30'$ 38. 60° , 180° , 300°

39. $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ$ 40. 90° 41. $\frac{\pi}{4}$ 42. $-\frac{\pi}{4}$ 43. $\frac{2\pi}{3}$ 44. $\frac{\pi}{3}$ 45. $-\frac{\pi}{3}$
 46. $\frac{3\pi}{4}$ 47. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 48. 0 49. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ 50. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ 51. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 52. $-\frac{7}{25}$ 53. $\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}$ 54. $\sqrt{1-4x^2}$
 55. $29^\circ 40'$

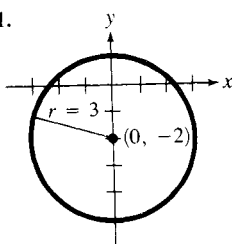
Capítulo 9

1. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 1^2$; $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 12 = 0$ 3. $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + (y+1)^2 = 3^2$; $16x^2 + 16y^2 - 8x + 32y - 127 = 0$
 5. $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 1^2$ or $x^2 + y^2 = 1$; $x^2 + y^2 - 1 = 0$ 7. $x^2 + y^2 = 25$ 9. $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 100$
 11. $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 3$ 13. $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 64$ 15. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 13$
 17. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{15}{2}\right)^2 = \frac{61}{2}$

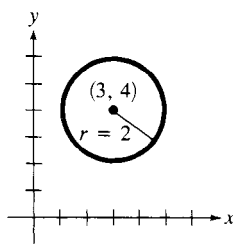
19.



21.



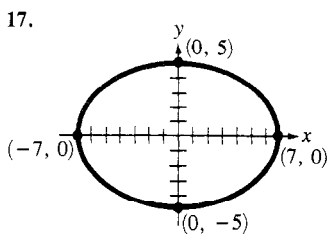
23.



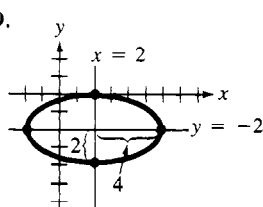
25. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1^2$ 27. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+3)^2 = 5^2$ 29. $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = 4^2$
 31. $y = -\sqrt{100 - x^2}$, 8 ft

1. $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1$ 3. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 5. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ 7. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$ 9. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{4} = 1$
 11. $\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{12} = 1$ 13. $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$ 15. $\frac{(x-7)^2}{55} + \frac{(y+4)^2}{64} = 1$

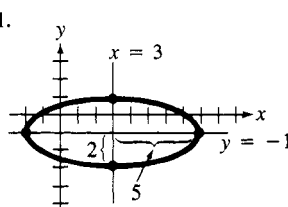
17.



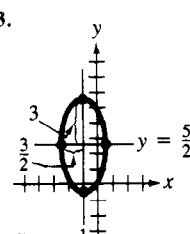
19.



21.



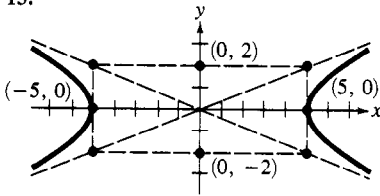
23.



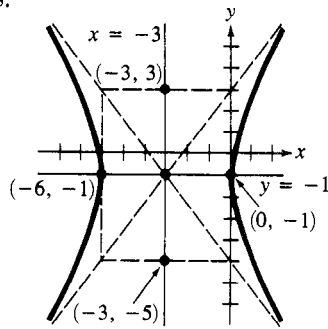
25. $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{8} = 1$ 27. $\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$ 29. no es posible, no hay gráfica 31. $\frac{x^2}{9} + \frac{4y^2}{9} = 1$
 33. $\frac{x^2}{1309} + \frac{y^2}{900} = 1$ 35. $\frac{1}{2}(m - \sqrt{m^2 - n^2})$ 37. $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 20$ 38. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{41}{2}$
 39. $(x+2)^2 + (y-8)^2 = 3^2$ 40. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = 2^2$

1. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 3. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{9} = 1$ 5. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$ 7. $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$ 9. $\frac{(y-2)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{20} = 1$
 11. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{12} = 1$

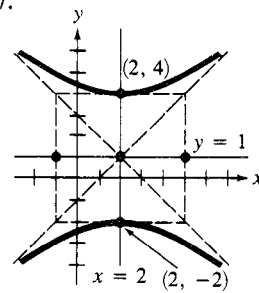
13.



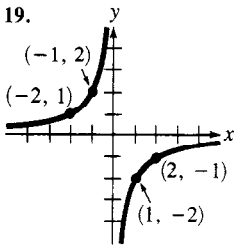
15.



17.



19.



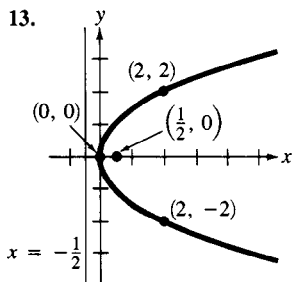
21. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{25} = 1$ 23. $\frac{(y-6)^2}{9} - \frac{(x+3)^2}{16} = 1$ 25. hipérbola degenerada $(x+4)^2 - \frac{(y-1)^2}{4} = 0$, la gráfica corresponde a dos rectas que se intersecan $y = 2x + 9$ y $y = -2x - 7$ 27. 7.8 m 29. $A = b^2$, $B = 0$, $C = -a^2$, $D = -2b^2h$, $E = 2a^2k$, $F = b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2$ 31. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{15} = 1$ 32. $\frac{x^2}{45} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ 33. $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{8} = 1$
34. $\frac{(x-2)^2}{7} + \frac{(y+4)^2}{15} = 1$

[9.4]

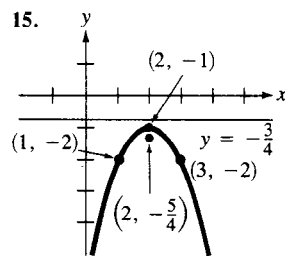
1. $x^2 = 6y$ 3. $y^2 = 14x$ 5. $y^2 = 12x$ 7. $(x-4)^2 = 12(y-2)$ 9. $(x-4)^2 = -8(y+6)$

11. $(y+7)^2 = -\frac{1}{2}(x-8)$

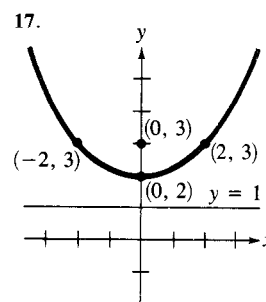
13.



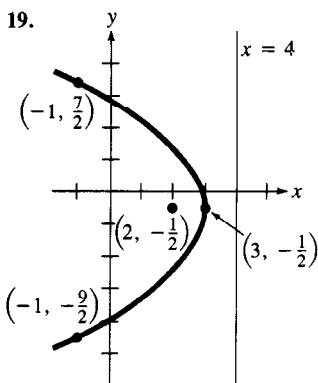
15.



17.



19.



21. $y^2 = 12(x-2)$; (2, 0); (5, 0); $x = -1$

23. $(x+4)^2 = -9(y+1)$; (-4, -1); $(-4, -\frac{13}{4})$; $y = \frac{5}{4}$

25. $(x-\frac{3}{2})^2 = \frac{1}{2}(y+6)$; $(\frac{3}{2}, -6)$; $(\frac{3}{2}, -\frac{47}{8})$; $y = -\frac{49}{8}$

27. hipérbola

29. círculo

31. sección cónica degenerada (la gráfica son dos rectas que se intersecan)

33. elipse

35. $x^2 = 4.5y$

37. 6.4 m

39. $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-4)^2}{16} = 1$ 40. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{12} = 1$ 41. $\frac{(x-2)^2}{5} - \frac{(y+3)^2}{6} = 1$ 42. $\frac{(y+5)^2}{8} - \frac{(x+9)^2}{10} = 1$

1. $\left(\frac{4\sqrt{3}-3}{2}, \frac{4+3\sqrt{3}}{2}\right)$

3. $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

5. $(3\sqrt{2}, \sqrt{2})$

7. $\left(\frac{\sqrt{3}-3}{2}, \frac{3\sqrt{3}+1}{2}\right)$

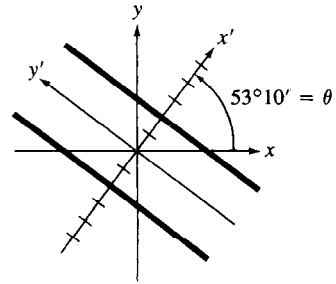
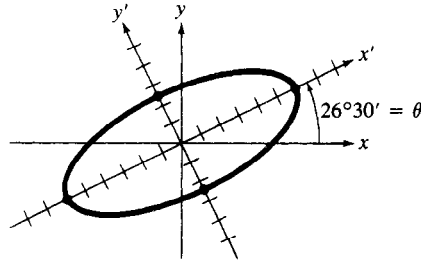
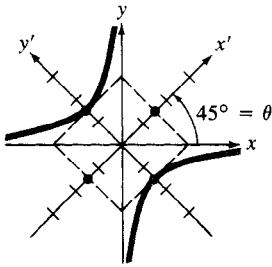
9. $y'^2 - x'^2 = 1$

11. $3x'^2 - y'^2 = 16$

13. $\frac{y'^2}{2} - \frac{x'^2}{2} = 1$

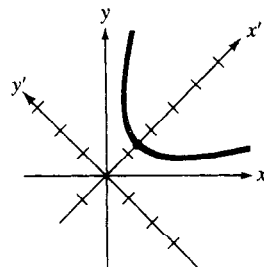
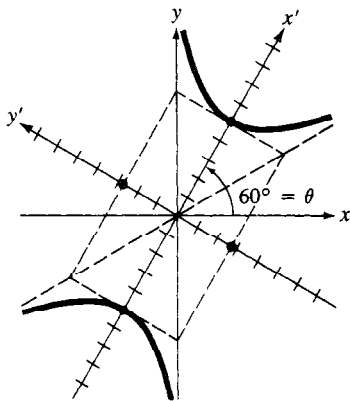
15. $\frac{x'^2}{36} + \frac{y'^2}{6} = 1$

17. $x' = \pm 2$ (dos líneas paralelas)



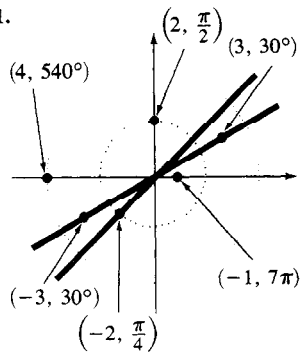
19. $\frac{x'^2}{24} - \frac{y'^2}{8} = 1$

21. $y'^2 = 4(x' - \sqrt{2})$

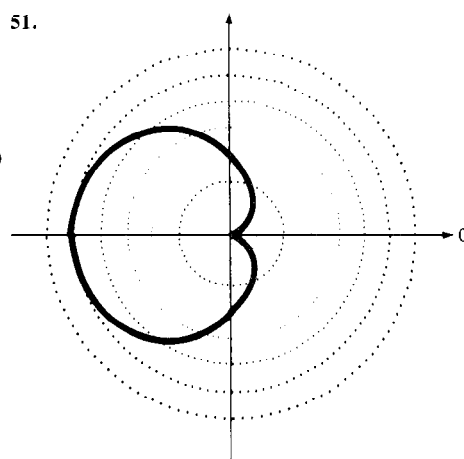
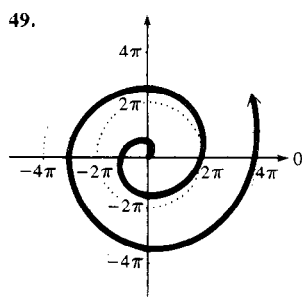
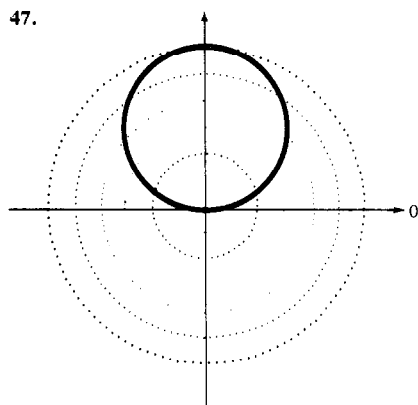
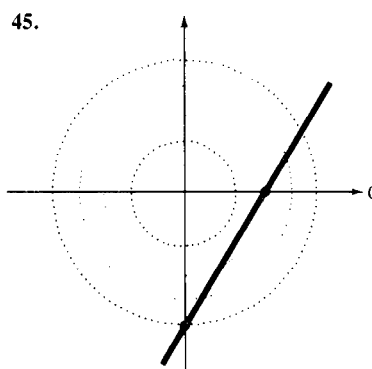
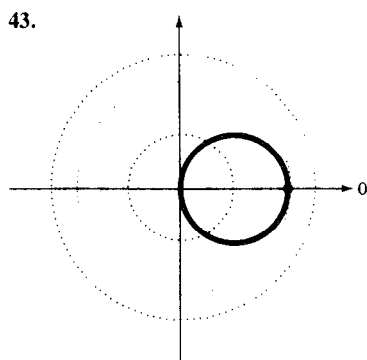
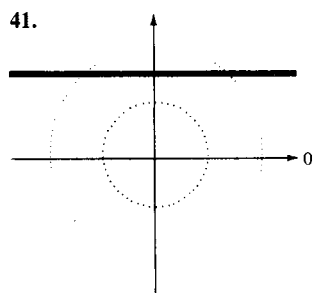


25. elipse 27. hipérbola 29. $(x-3)^2 = -20(y+1)$ 30. $(y+2)^2 = 8(x-4)$ 31. $(x-5)^2 = 20(y-2)$
 32. $(y+8)^2 = -2(x+3)$ 33. hipérbola 34. círculo 35. elipse 36. parábola

1-11.



13. $(3\sqrt{3}, 3)$ 15. $(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ 17. $(-1, -\sqrt{3})$ 19. $(0, 5)$ 21. $(5, 126.9^\circ)$ 23. $\left(6, -\frac{\pi}{2}\right)$ 25. $\left(7\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$
 27. $(13, -22.6^\circ)$ 29. $r = 5$ 31. $r \sin^2 \theta = 3 \cos \theta$ 33. $r = -8 \sin \theta$ 35. $y = 3$ 37. $(x-2)^2 + y^2 = 4$
 39. $y = \sqrt{3}x$



53. $4y'^2 - 2x'^2 = 5$ 54. $x'^2 = -y'$

[9.7]

Las respuestas de los ejercicios 1-11 son el punto indicado en el plano complejo 1. (5, 2) 3. (-4, 6) 5. (-2, 1) 7. (-4, 0)

9. (0, 1) 11. (3, 4) 13. $z = (1)(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$ 15. $z = (1)\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right)$ 17. $z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$

19. $z = 4\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}\right)$ 21. $z = 4\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right)$ 23. $z = \frac{1}{2}\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\right)$ 25. $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

27. $z = -2\sqrt{3} - 2i$ 29. $z = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$ 31. $6i, \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}i$ 33. $-3, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 35. $6 + 6i, -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$

37. $5, \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ 39. -1 41. $-8i$ 43. $-128 + 128\sqrt{3}i$ 45. -1024 47. $1, i, -1, -i$

49. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -i$ 51. $2\left(\cos \frac{\pi}{16} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{16}\right), 2\left(\cos \frac{9\pi}{16} + i \operatorname{sen} \frac{9\pi}{16}\right), 2\left(\cos \frac{17\pi}{16} + i \operatorname{sen} \frac{17\pi}{16}\right),$

$2\left(\cos \frac{25\pi}{16} + i \operatorname{sen} \frac{25\pi}{16}\right)$ 53. $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{6}}{2}$ 55. $i, -i$ 57. $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

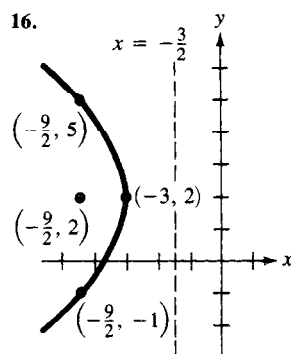
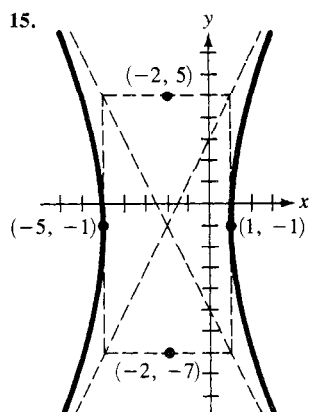
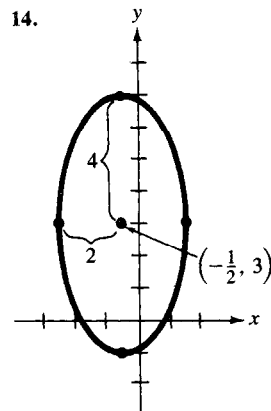
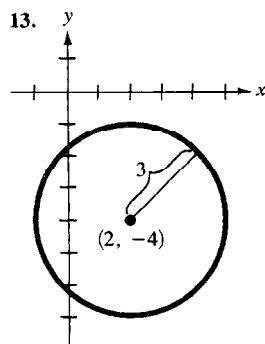
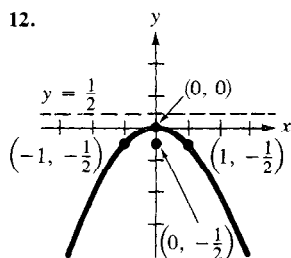
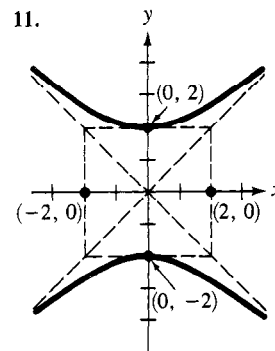
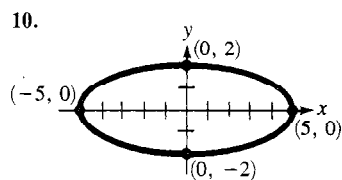
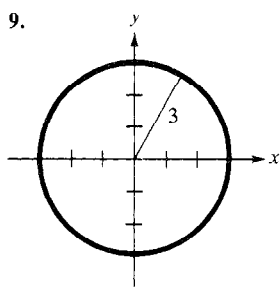
59. $4r^2 = 1$ 60. $\cos \theta = 2 \operatorname{sen} \theta$ 61. $r = 2(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta)$ 62. $x + 5y = 2$ 63. $x^2 + (y - 3)^2 = 9$

64. $3x^2 - 3y^2 = 1$

Ejercicios de repaso del capítulo 9

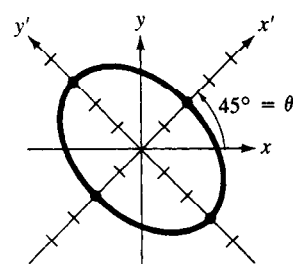
1. $(x + 3)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = 16$ 2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$ 3. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 4. $(y - 2)^2 = 16(x - 1)$

5. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 41$ 6. $(x - 2)^2 + \frac{(y + 3)^2}{5} = 1$ 7. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{3} = 1$ 8. $(x - 1)^2 = 4(y + 2)$



17. círculo 18. hipérbola 19. cónico degenerado (un punto) 20. cónico degenerado (rectas paralelas) 21. parábola

22. elipse 23. $\left(\frac{-\sqrt{3}-5}{2}, \frac{5\sqrt{3}-1}{2}\right)$ 24. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)$ 25. $\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1$



26. $\frac{x'^2}{5} + \frac{y'^2}{1} = 0$; la gráfica es el punto (0,0) 27. $(2\sqrt{3}, 2)$ 28. $(1, -\sqrt{3})$ 29. $(5, 143.1^\circ)$ 30. $\left(5\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$
 31. $r(2 \cos \theta - 5 \sin \theta) = -1$ 32. $2xy = 7$ 33. la gráfica es la recta con la ecuación $x = 2$ en coordenadas rectangulares.

34. La gráfica es el círculo con radio 4 centrado en $(0, 4)$ en las coordenadas rectangulares. 35. $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$
 36. $z = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$ 37. $-3\sqrt{3} - 3i$ 38. $10i, \frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{1}{5}i$ 39. 16 40. $2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$
 41. 11.4 m 42. $x^2 = -\frac{32}{3}(y - 20)$

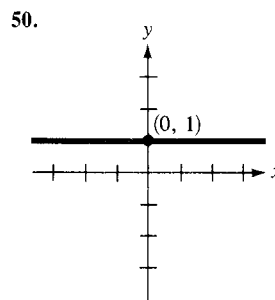
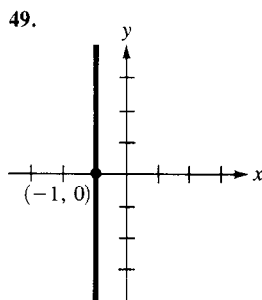
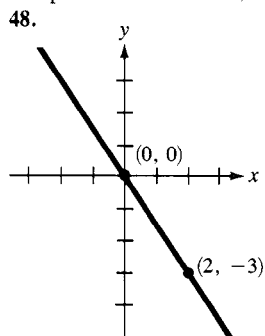
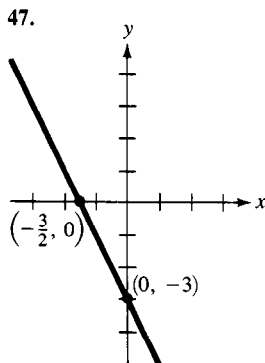
Capítulo 10

[10.1]

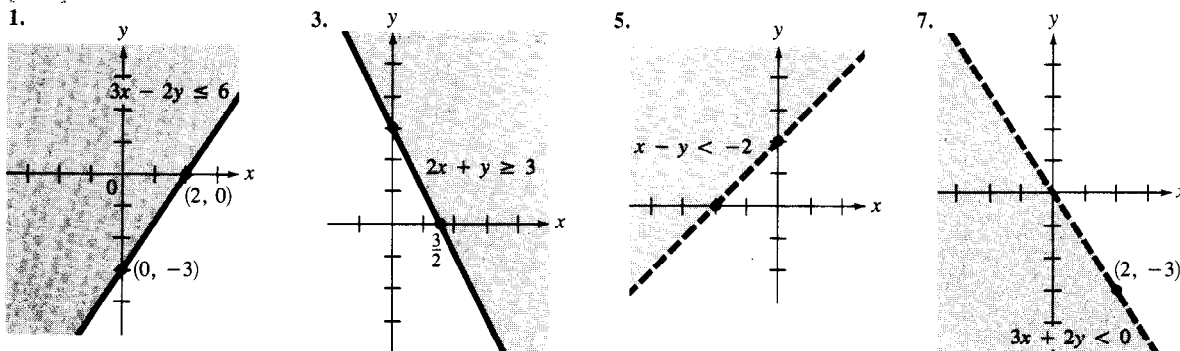
1. a) sí b) sí 3. a) exactamente una b) se intersectan c) consistente e independiente 5. a) infinidad de soluciones b) coinciden c) dependiente 7. $(-1, 4)$ 9. $\left(x, \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right)$ para toda x real 11. $(3, 0)$ 13. $(-2, -1)$ 15. $(1, 1)$
 17. Sin solución 19. $\left(\frac{4}{5}, \frac{9}{4}\right)$ 21. $(-1, 3)$ 23. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ 25. $\left(-\frac{1}{a}, \frac{2}{b}\right)$ 27. $a = 1; b = -4$ 29. 12, 32
 31. 3 h a 40 km/h; 5 h a 50 km/h 33. $22^\circ, 158^\circ$ 35. las camisas cuestan 15 dólares; los calcetines 3 dólares 37. 40 lb de caramelo de 90¢; 20 lb de caramelo de 1.50 dólares 39. 22 monedas de 10¢; 8 monedas de 25¢ 41. 10 l de solución al 25%; 15 l de solución al 50%
 43. 53.6 g de control K; 35.7 g de dieta especial 45. Marchar a trote corto 10 veces; jugar tenis cinco veces 47. Ya que la pendiente de la recta que corresponde a la primera ecuación es -2 , y la pendiente de la recta que corresponde a la segunda ecuación es $\frac{1}{4}$, las rectas se intersectan. Así, el sistema tiene exactamente una solución no importa cuál sea el valor de m .
 49. $a = 4; b = -3$ 51. elipse 52. parábola 53. hipérbola 54. círculo

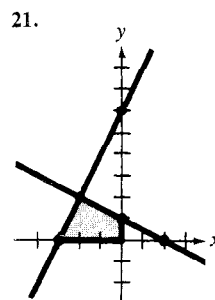
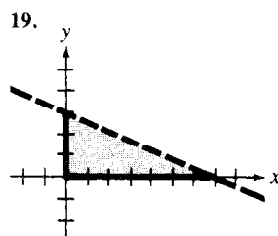
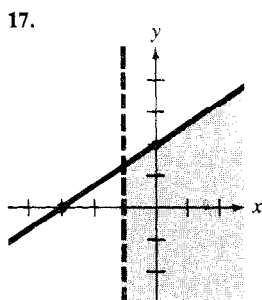
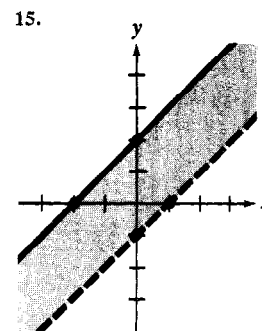
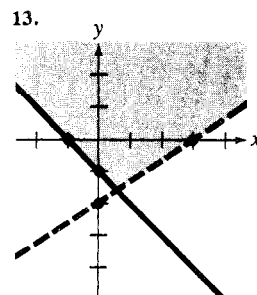
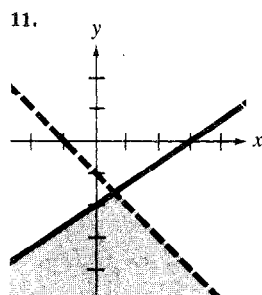
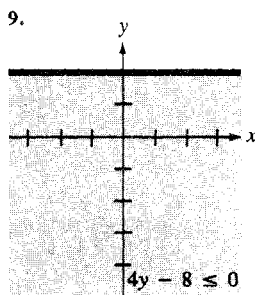
[10.2]

1. $(-1, 1, 3)$ 3. $(1, 2, 3)$ 5. sin solución 7. $(x, 2x, -5x)$ para toda x real 9. $(0, 0, 0)$
 11. $\left(x, -\frac{1}{3}x + 1, 1 - x\right)$ para toda x real 13. sin solución 15. $(8, 6, 4)$ 17. $(1, 0, -1, 2)$
 19. $\left(x, -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}, -x - 5, -\frac{1}{2}x - \frac{19}{2}\right)$ para toda x real 21. sin solución 23. 2, $-3, 5$ 25. Maru tiene 18; León tiene 20; Lulú tiene 15 27. 3 000 29. 12 monedas de 5¢; 20 de 10¢; 8 de 25¢ 31. 1 500 dólares en bonos; 1 500 dólares en certificados; 2 000 dólares en fondo mutualista 33. Sierra: 15 San Juan: 20; Colina azul: 10 35. $a = 1; b = -1; c = 5$ 37. $y = -x^2 + 3x - 2$
 39. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$ 41. $\left(\frac{2}{a}, 0\right)$ 42. $m = 9$ Si m es cualquier número real excepto $-\frac{5}{4}$, el sistema será inconsistente. 44. 32 45. 17 ft por 8 ft 46. $a = 2; b = -1$



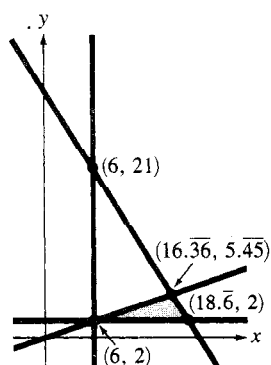
[10.3]





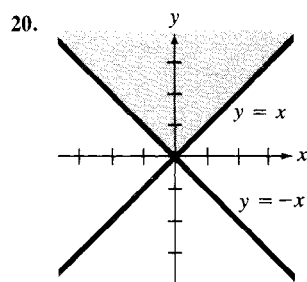
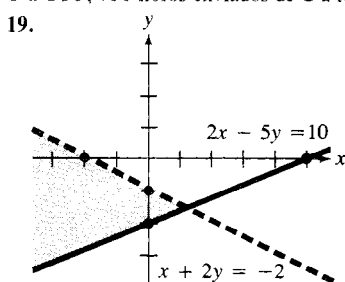
23. Sea x = el número de casas Princesa,
 y = el número de casas Caballero.

$$\begin{aligned} x &\geq 6 \\ y &\geq 2 \\ x - 3y &\geq 0 \\ 30\,000x + 20\,000y &\leq 600\,000 \end{aligned}$$

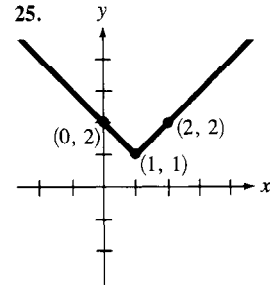
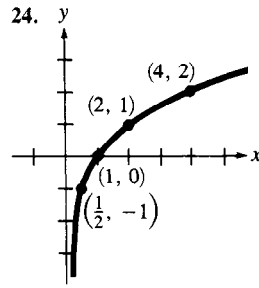
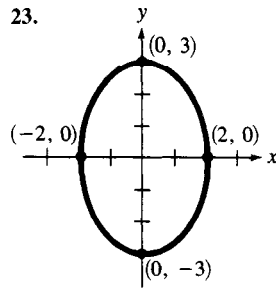
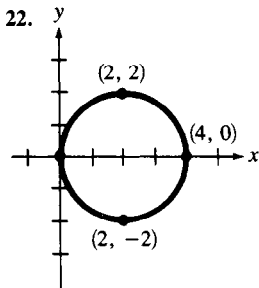
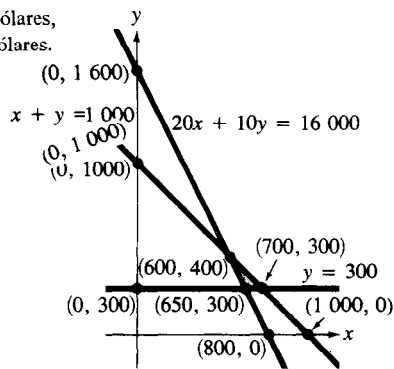


25. el caramelo cuesta 80¢ lb; las nueces cuestan \$1.10 lb 26. 16 l de solución al 5%; 24 l de solución al 10% 27. 42° , 68° , 70°
 28. \$4 000 at 11%; \$12 000 at 10%; \$4 000 at 8% 29. $(x, -7x, -4x)$ para toda x real 30. $(x, 8x - 1, 21x - 4)$ para toda x real
 28. 4 000 dólares al 11%; 12 000 dólares al 10%; 4 000 dólares al 8%

1. valor máximo: 46; valor mínimo: 6 3. valor máximo: ninguno; valor mínimo: 350 5. valor máximo: 150; valor mínimo: 0 7. valor máximo: ninguno; valor mínimo: 75 9. 100 modelos Buen Tiro y 50 modelos Buen Rebote 11. 3 500 barriles tipo G y 1 500 barriles tipo H 13. 32 acres de maíz y 68 acres de trigo 15. siete unidades de A y cuatro unidades de B 17. 1 000 libros enviados de P a CTU; 750 libros enviados de C a MC

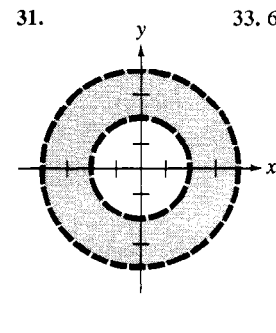
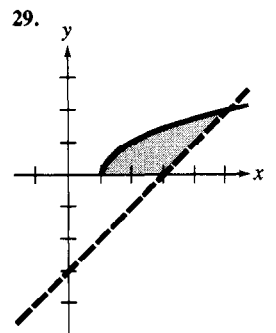
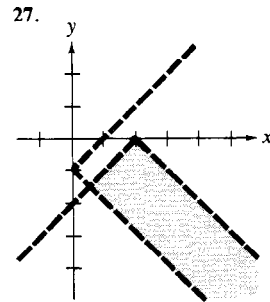
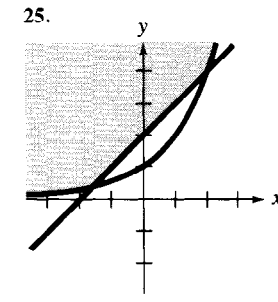
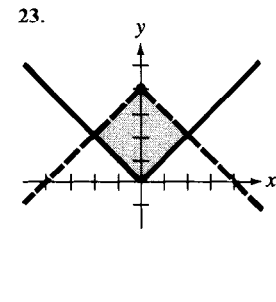
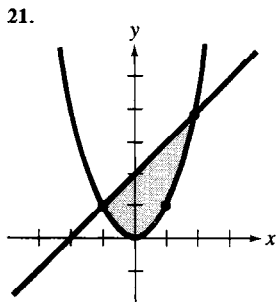


21. Sea x = el número de localidades a 20 dólares,
 y = el número de localidades a 10 dólares.
 $x + y \leq 1\,000$
 $20x + 10y \geq 16\,000$
 $x \geq 0$
 $y \geq 300$



[10.5]

1. (3, 1), (-1, -3) 3. (2, 1) 5. (0, 1), (1, 3) 7. (5, 2), (5, -2), (-5, 2), (-5, -2) 9. (2, 1), (-2, -1), (1, 2), (-1, -2) 11. (3, 0), (3, -6), (-3, 0), (-3, 6) 13. (4, -1), (-4, 1), ($\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$), ($-\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$) 15. (1, 1)
 17. (1, 5) 19. (3, 4), (3, -4)



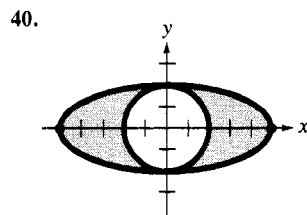
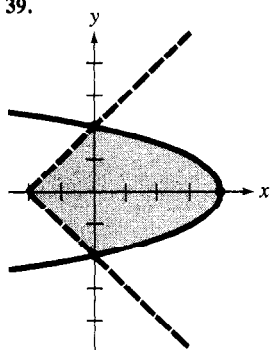
33. 6 yardas por 4 yardas 35. 12 personas; aproximadamente 8.33 dólares
 37. valor máximo: 6; valor mínimo: -1/
 38. valor máximo: 60; valor mínimo: -20 39. 50
 raquetas modelo Pro y 30 raquetas modelo As 40. 5
 41. $2 - 3i$ 42. $x^2 + x + 1$ 43. $f(x) = \frac{3x - 2}{x^2 - 4}$
 44. (1, 2) 45. (1, 2, 3)

[10.6]

1. $\frac{3x+2}{(x-1)(x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5}$ 3. $\frac{6x^2-7}{(x+3)^2(x+5)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{x+5}$
 5. $\frac{x^3-5}{(x^2+2x+10)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+10} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+10)^2}$ 7. $\frac{x+1}{x^3-2x^2-3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3}$

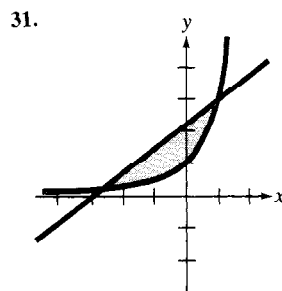
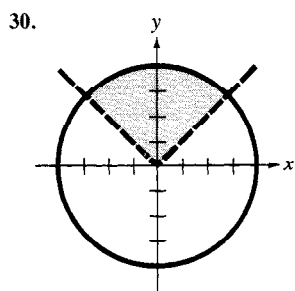
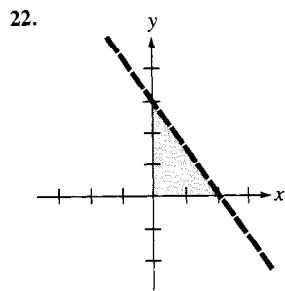
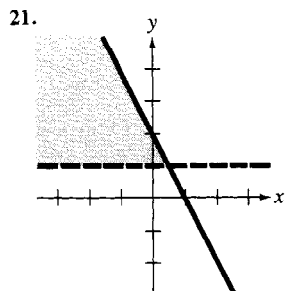


9. $\frac{x-3}{x^2(x+2)-2x(x+2)-3(x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1}$ 11. $\frac{x^2+5x+5}{x^4+5x^2+5} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$ 13. $A=2; B=3$
 15. $A=-1; B=2$ 17. $A=1; B=2; C=5$ 19. $A=1; B=1; C=1; D=-1$ 21. $A=0; B=7; C=-2$
 23. $A=-1; B=-1; C=-2; D=2; E=1$ 25. $f(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+3}$ 27. $f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{-3}{(x+2)^2} + \frac{5}{x+1}$
 29. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} + \frac{-2}{x-5}$ 31. $f(x) = \frac{3}{x+2} + \frac{-3}{(x+2)^2} + \frac{4}{x-2}$ 33. $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}$
 35. $f(x) = x + \frac{1}{x-1} + \frac{5x-1}{(x-1)^2}$ 37. $(2, 1), (-2, -1), (1, 2), (-1, -2)$ 38. $(\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}), (-\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}), (2, 1), (-2, -1)$



Ejercicios de repaso del capítulo 10

1. sí 2. $(-2, 5)$ 3. $(1, -2)$ 4. sin solución 5. $(1, -1)$ 6. $(x, 3-x)$ para toda x real 7. $(0, -4)$
 8. $m = -\frac{5}{2}$ 9. $(2, 0, -1)$ 10. $(x, \frac{9}{2}x, 2x)$ para toda x real 11. $(2-2z, 3z+3, z)$ para toda z real
 12. $a=2, b=-3, c=5$ 13. 3 h a 40 mi/h; 5 h a 50 mi/h 14. $12^\circ, 78^\circ$ 15. 32 lb de caramelo de \$1.60/lb; 48 lb de caramelo de \$1.20/lb 16. 40 gal de solución al 15%; 60 gal de solución al 20% 17. 25 monedas de 5¢; 30 de 10¢; 15 de 25¢
 18. 2 000 dólares en bonos; \$5 000 en certificados; 2 000 dólares en acciones 5 000 19. $25^\circ, 75^\circ, 80^\circ$ 20. $a=-5, b=8$



32. $A=-2; B=3$
 33. $A=1; B=1; C=2; D=0$
 34. $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+3} + \frac{5}{x-1}$
 35. $f(x) = 2x + \frac{1}{x-2} + \frac{3}{x-6}$

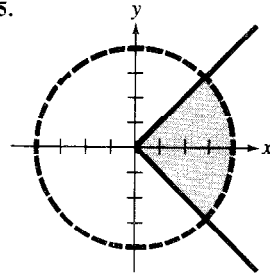
Capítulo 11

[11.1]

1. 2×2 3. 1×4 5. A, B , y C 7. G 9. sí 11. -1 13. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 15. 3 17. $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$
19. $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$ 21. indefinida 23. $\begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ -3 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ 25. indefinida 27. $\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$ 29. $\begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 18 & -8 \end{bmatrix}$
31. $\begin{bmatrix} -13 & 10 \\ -21 & 20 \end{bmatrix}$ 33. $a = 7; b = -5; c = 5; d = -1$ 37. (a) $F + S = \begin{bmatrix} 40 & 9 & 68 \\ 44 & 17 & 62 \\ 18 & 17 & 54 \\ 16 & 8 & 62 \\ 32 & 24 & 60 \end{bmatrix}$ (b) $\frac{1}{2}(F + S) = \begin{bmatrix} 20 & 4.5 & 34 \\ 22 & 8.5 & 31 \\ 9 & 8.5 & 27 \\ 8 & 4 & 31 \\ 16 & 12 & 30 \end{bmatrix}$
35. $a = -3; b = 2$

La matriz $\frac{1}{2}(F + S)$ representa el promedio de puntos, rebotes y minutos jugados por cada jugador en el torneo.

39. $(-2, 3)$ 40. sin solución 41. $(0, 3, -1)$ 42. $(1, -6, -4)$
43. $(5, 12), (12, 5)$ 44. $(5, 0), (-5, 0)$



[11.2]

1. -7 3. 8 5. $m = 4; n = 3$ 7. $m = 2; n = 3$ 9. $\begin{bmatrix} 5 & 16 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$ 11. $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ 13. $\begin{bmatrix} 3 & 9 & -6 \\ 2 & -6 & 9 \\ 20 & 0 & 25 \end{bmatrix}$
15. $\begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix}$ 17. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ 19. $\begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 4 & 14 \end{bmatrix}$ 21. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ 23. $\begin{bmatrix} 20 & 8 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$ 25. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ 27. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$
29. $AB = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 5 & -10 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} = BA$ 31. $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $AI = A$ 33. Ya que en este caso 0 representa a la matriz nula de 2×2 , $A + 0 = A$.
35. $(B + C)A = \begin{bmatrix} 6 & 28 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} = BA + CA$ 37. a) $[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]F = [72 \ 36 \ 157]$ representa el total de puntos, rebotes y minutos jugados por los que inician en el primer juego. b) $[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1](F + S) = [150 \ 75 \ 306]$ representa el total de puntos, rebotes y minutos jugados por los que inician en el torneo. c) $\frac{1}{2}[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1](F + S) = [75 \ 37.5 \ 153]$ representa el número promedio de puntos, rebotes y minutos jugados por los que inician en el torneo.
39. (a) $JC = \begin{bmatrix} 8 & 450 \\ 13 & 900 \end{bmatrix}$ representa la renta total por concepto de alquiler en cada almacén en el mes de enero. b) $FC = \begin{bmatrix} 13 & 440 \\ 17 & 550 \end{bmatrix}$ representa la renta total por concepto de alquiler en cada almacén en el mes de febrero. c) $(J + F)C = \begin{bmatrix} 21 & 890 \\ 31 & 450 \end{bmatrix}$ representa la renta total por concepto de alquiler en cada almacén durante los dos meses. d) $[1 \ 1] \cdot ((J + F)C) = \$53 \ 340$ dólares representan la renta total por concepto de alquiler en ambos almacenes durante los dos meses.
41. $u = -5; v = 0; w = 2; z = 7$ 42. $a_{12} = 0$ 43. A
44. $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ 45. $\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ 46. $\begin{bmatrix} -15 & -21 \\ 20 & 14 \end{bmatrix}$ 47. $(2, -3)$ 48. $(-1, 0, 3)$ 49. sin solución
50. $(z - 3, 4 - 4z, z)$ para toda z real

[11.3]

1. a) (B) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ b) (B) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 7 & -14 \end{bmatrix}$ c) (B) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ d) (E) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$
- (D) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 3 & -10 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & 6 \\ 0 & -6 & 7 & -14 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -6 & 7 & -14 \end{bmatrix}$
3. a) (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 15 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -17 & 34 \end{bmatrix}$ b) (E) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 15 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ c) (G) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ 5. $(4, -1)$
- (H) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 15 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -17 & 34 \end{bmatrix}$ (H) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 15 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ (J) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$
7. $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 9. $(-1, -1)$ 11. $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ 13. $(1 - 2y, y)$ para toda y real 15. $(1, -1, 2)$ 17. $(-2, 1, 3)$
19. $(2, 1, -1)$ 21. $(x, 5x - 4, x - 1)$ para toda x real 23. $(1, 0, -1, 2)$ 25. $(4, 1, -1)$ or $(4, -1, -1)$
27. 2×3 28. 2

29. $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$ 30. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ 31. $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$ 32. no definida 33. $\begin{bmatrix} 10 & -20 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}$ 34. 1 35. $\begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$

36. $\begin{bmatrix} 10 & -15 \end{bmatrix}$ 37. A 38. C 39. $\begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ 40. $C \cdot N = 4\,600$. Así, las ventas brutas de los cuatro modelos el sábado ascendieron a 4 600 dólares.

1. Ya que $AB = BA = I$, $B = A^{-1}$. 3. Ya que $AB = BA = I$, $B = A^{-1}$. 5. $\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ 7. $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ 9. la inversa

no existe 11. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ 13. $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ 15. $-\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & -1 & -3 \\ 2 & -6 & -8 \end{bmatrix}$

17. $x = -8$; $y = 14$ 19. $x = 12$; $y = 7$; $z = 4$ 21. (2, 1) 23. (4, -3) 25. (2, 0, -3) 27. (4, 0, 6)

29. (3, 3, -1) 31. a) (2, -3) b) (0, 6) c) (-3, 5) 33. a) (2, 0, -3) b) (1, 4, 1) c) (-2, -2, 1)

35. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ 37. Si A es no singular, entonces A^{-1} existe. Así, $A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC)$, $(A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C$, $IB = IC$,

$B = C$. 39. $\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 41. La inversa no existe ya que $ad - bc = 0$. 43. a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$ g) . Parecería que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ y $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$.

45. Mezcla 1: 35 onzas de Supercrecimiento y 15 onzas de mezcla saludable; Mezcla 2: 40 onzas de Supercrecimiento y 10 onzas de Mezcla Saludable; Mezcla 3: 50 onzas de Supercrecimiento y 5 onzas de Mezcla Saludable 46. (-2, 6) 47. sin solución 48. (1, 0, -5)

1. 2 3. -4 5. 13 7. $-2a + 3b$ 9. -1 11. -1 13. -19 15. -19 17. 3 19. 6 21. 0

23. (3, -2) 25. $(\frac{1}{3}, -2)$ 27. (-1, -1) 29. (-3, 2, 1) 31. (-1, 1, 2) 33. 9 35. ± 2 37. 1, 3

39. 0 41. a) 0 b) 0 c) 0 d) 0 43. a) ab b) abc c) $abcd$ d) El determinante es el producto de los elementos a lo largo de la diagonal principal, $a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$. 45. a) 0 b) 0 c) 0 d) 0 47. $|A| = ad - bc = |A^T|$ 49. Demostrar que la ecuación con determinantes es equivalente $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, la ecuación de la recta que pasa a través de (x_1, y_1) y (x_2, y_2) .

51. Hacer un dibujo utilizando tres puntos en el cuadrante I y mostrar que el área del triángulo puede encontrarse al considerar las áreas de tres trapezios. 53. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$, y $|A^{-1}| = \frac{1}{ad-bc} = \frac{1}{|A|}$. 55. Por el ejercicio 54, $|AB| = |A||B|$ de modo que si $|AB| = 0$, entonces $|A||B| = 0$ lo cual significa que $|A| = 0$ o $|B| = 0$ por la regla del producto nulo para los números reales.

57. $\begin{bmatrix} a & b \\ na & nb \end{bmatrix} = anb - bna = 0$ 59. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$ y $-\begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix} = -[bc - ad] = ad - bc$. 61. $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

62. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ 63. (0, 5) 64. (-2, 0, 2) 65. semana 1: 20 modelos estándar y 35 modelos de lujo;

semana 2: 40 modelos estándar y 15 modelos de lujo; semana 3: 30 modelos estándar y 40 modelos de lujo.

1. Teorema 1 3. Teorema 3 5. Teorema 2 7. Teorema 4 9. Teorema 5 11. Teorema 7 13. Teorema 6

15. Teorema 2 17. Teorema 3 19. $x = 17$ 21. $x = 1$ 23. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -11 & 4 & 18 \\ -5 & 3 & 14 \end{vmatrix}$ 25. $\begin{vmatrix} 14 & 0 & -5 \\ 7 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ 27. 9

29. -59 31. -104 33. -98 35. Cuando se sustituye a x por -1 y y por 3, la primera y segunda filas son iguales, lo cual hace 0 al determinante. De manera análoga, cuando se sustituye (2, 7), la primera y tercera filas son iguales, lo cual hace 0 al determinante. 37. Ya que el área del triángulo sería entonces 0, no tiene sentido que los tres puntos del triángulo estén sobre la misma recta. 39. (-1, 3, 4) 40. (-1, 0, 1)

Ejercicios de repaso del capítulo 11

1. 2×3 2. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 3. 3 4. $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$ 5. $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ 6. $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$ 7. $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
8. $\begin{bmatrix} 6 & -12 & -15 \\ 0 & 3 & -6 \end{bmatrix}$ 9. $\begin{bmatrix} -2 & 13 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$ 10. 5 11. $\begin{bmatrix} 2 & -6 & -1 \\ -6 & 8 & 23 \end{bmatrix}$ 12. indefinida 13. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 39 \\ -8 & -3 & 7 \end{bmatrix}$
14. indefinida 15. a) $J + A = \begin{bmatrix} 350 & 300 & 50 \\ 520 & 220 & 50 \end{bmatrix}$ b) $\frac{1}{2}(J + A) = \begin{bmatrix} 175 & 150 & 25 \\ 260 & 110 & 25 \end{bmatrix}$ representa el número promedio de alquileres por agencia en cada categoría durante el periodo de dos meses. c) $[1 \ 1] J = [500 \ 300 \ 60]$ representa el número total de alquileres en cada categoría en ambas agencias durante julio. a) $[1 \ 1] (J + A) = [870 \ 520 \ 100]$ representa el número total de alquileres en cada categoría en ambas agencias durante el periodo de dos meses. e) $([1 \ 1] (J + A)) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1490$ representa el número total de alquileres en cada categoría en ambas agencias durante el periodo de dos meses. f) $JC = \begin{bmatrix} 40 & 600 \\ 44 & 400 \end{bmatrix}$ representa la renta total producida por cada agencia durante julio. g) $(J + A)C = \begin{bmatrix} 71 & 500 \\ 75 & 500 \end{bmatrix}$ representa la renta total producida por cada agencia durante el periodo de dos meses. h) $[1 \ 1] \cdot ((J + A)C) = \$147\ 000$ dólares representa la renta total producida por ambas agencias durante el periodo de dos meses.

16. $(1, -1)$ 17. $(-2, 0, 3)$ 18. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$ 19. $-\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 5 & -10 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ 20. $(-3, 4)$ 21. $(2, -2, 3)$

22. Enero: 20 membresías individuales y 10 membresías familiares; febrero: 30 membresías individuales y 20 membresías familiares; marzo: 30 membresías individuales y 35 membresías familiares 23. -26 24. 42 25. 5 26. $(-2, 5)$ 27. $(-3, 3, 0)$ 28. ± 2
 30. Since : 30. Ya que todos los elementos de una fila son ceros, el determinante es 0. 31. Ya que dos columnas son iguales, el determinante es 0. 32. Ya que se intercambiaron dos columnas, el determinante se anula. 33. Cuando una fila se multiplica por 3, el determinante se multiplica por 3.

$$34. x = -13 \quad 35. -11 \quad 36. |A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} - a_3 \begin{vmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = a_1 a_4 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} - a_3 a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} = (a_1 a_4 - a_3 a_2) \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

Capítulo 12

[12.1]

1. 4, 8, 12, 16, 20; 32; 48 3. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \frac{1}{256}, \frac{1}{4096}$ 5. -6, 9, -14, 21, -30; 69; 149 7. 0, 0, 0, 0, 0; 0 9. 12, 48, 192, 768 11. -24, 72, -216, 648 13. 11, 104, 941, 8474 15. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$
17. $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$ 19. $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$ 21. $\sum_{k=1}^n k$ 23. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ 25. $\sum_{k=1}^4 2k$ 27. 36
29. 18 31. 40 33. 150 35. 12 37. $\frac{5}{6}$ 39. cada una tiene valor 104 41. 1 43. 21 45. $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
47. $\frac{n(n+1)(4n+11)}{6}$ 51. $\frac{n+1}{2}$ 53. $m = -\frac{27}{28}; b = \frac{17}{28}$ 55. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 57. -294 58. -5875

[12.2]

1. sí; 4 3. sí, -10 5. no 7. 2, 9, 16, 23, 30, 37 9. -2, 5, 12, 19, 26, 33 11. $\sqrt{3}, 5\sqrt{3}, 9\sqrt{3}, 13\sqrt{3}, 17\sqrt{3}, 21\sqrt{3}$ 13. $x = 8; 8, 12, 16$ 15. 235 17. 222 19. 33 21. $a_{17} = 50; S_{17} = 442$ 23. $n = 7; d = 6$
25. $a_{12} = \frac{7}{2}; S_{12} = 31$ 27. $n = 15; d = \frac{2}{7}; a_1 = 0$ 29. $n = 7; d = 5; S_7 = 42$ 31. $a_5 = 9 \log 7; S_5 = 25 \log 7$
33. 14, 17, 20, 23, 26, 29 35. 22 37. 10 100 41. \$7 946 43. 3 140 45. \$465 47. 240 ft
49. $x_4 = -\frac{1}{81}; x_5 = \frac{1}{243}$ 50. $x_4 = -5; x_5 = 6$ 51. $\sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2 + 1}$ 52. $\frac{69}{140}$

[12.3]

1. 4, 8, 16, 32, 64, 128 3. -16, 8, -4, 2, -1, $\frac{1}{2}$ 5. 25, 20, 16, $\frac{64}{5}, \frac{256}{25}, \frac{1024}{125}$ 7. $x = 13; 20, 10, 5$ 9. $\frac{511}{1536}$

11. $\frac{11}{24}$ or $\frac{31}{24}$ 13. 3 15. $a_6 = 64$; $S_6 = 126$ 17. $n = 9$; $a_1 = 256$; $S_9 = 511$ 19. $n = 7$; $a_1 = 3125$; $S_7 = \frac{19531}{5}$
 21. -10, 20, -40, 80 23. 1 25. sin suma, $|r| = 2 > 1$ 27. $-\frac{98}{11}$ 29. $\frac{50}{3}$ 31. $\frac{1}{3}$ 33. $\frac{7}{33}$ 35. $\frac{41}{333}$
 37. $\frac{97}{45}$ 41. 1678 dólares 43. 3036.14 dólares 45. sí, le hubieran pagado aproximadamente 10,700,000 dólares por mes trabajado
 47. $\frac{1476}{25}$ cm 49. 74.4 ft 51. 60 m 53. (a) $\frac{5}{4}$ ft (b) 117.5 ft (c) 120 ft (d) Utilizar $S = 120$ ft para una aproximación
 55. 4479 57. 7, 3, -1, -5, -9 58. -12, -5, 2, 9, 16 59. $\frac{27}{2}$ 60. 90 61. 7, 2, -3, -8 62. -504
 63. 3200 64. 6150

1. $n = 5$ 3. $n = 8$ 5. $n = 10$ 7. $S(1): 1 = 1^2$; $S(k): 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$; $S(k + 1): 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$ 9. $S(1): 1 < 2^1$; $S(k): k < 2^k$; $S(k + 1): k + 1 < 2^{k+1}$ 11. $S(1): (ab)^1 = a^1b^1$; $S(k): (ab)^k = a^kb^k$; $S(k + 1): (ab)^{k+1} = a^{k+1}b^{k+1}$ 35. -21, 3, $-\frac{3}{7}$, $\frac{3}{49}$ 36. 32, 16, 8, 4 37. $-\frac{3277}{512}$
 38. 49,149 39. $\frac{3589}{990}$ 40. 81 in

1. 210 3. 90 5. 1 7. 120 9. 15 11. 6,760,000; 3,407,040 13. 336 15. 120 17. 40,320
 19. (a) 362,880 (b) 40,320 (c) 5040 (d) 720 21. (a) 60 (b) 180 (c) 3780 (d) 3360 23. 2,522,520 25. 5040
 27. 2002 29. 240,240 31. (a) 700 (b) 756 (c) 3360 (d) 5292 33. 21 35. 600 37. (a) 1287 (b) 4
 (c) 4512 (d) 22,308 (e) 1320 39. 60

1. 6 3. 1 5. 45 7. $x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$ 9. $243a^5 - 405a^4 + 270a^3 - 90a^2 + 15a - 1$
 11. $81x^4 - 108x^3y + 54x^2y^2 - 12xy^3 + y^4$ 13. $u^{12} + 6u^{10}v^2 + 15u^8v^4 + 20u^6v^6 + 15u^4v^8 + 6u^2v^{10} + v^{12}$
 15. $a^7 + 7a^5 + 21a^3 + 35a + 35a^{-1} + 21a^{-3} + 7a^{-5} + a^{-7}$ 17. $x^2 - 4x^{3/2}y^{1/2} + 6xy - 4x^{1/2}y^{3/2} + y^2$ 19. $40x^3$
 21. $80x^2y^3$ 23. $10x^2y^6$ 25. $-189a^2b^5$ 27. $-10,240a^3$ 29. $-56a^{-2}$ 31. 128 33. $-4 - 4i$ 35. $-7290x^5y$
 37. 0.53 41. 24 42. 210 43. 10,626 44. 255,024 45. 120

1. sí 3. no 5. sí 7. $\frac{1}{6}$ 9. 1 11. $\frac{1}{2}$ 13. $\frac{1}{6}$ 15. $\frac{2}{9}$ 17. $\frac{11}{12}$ 19. $\frac{2}{9}$ 21. $\frac{2}{3}$ 23. $\frac{1}{38}$
 25. $\frac{9}{19}$ 27. 0 29. $\frac{9}{19}$ 31. $\frac{1}{13}$ 33. $\frac{1}{2}$ 35. $\frac{1}{52}$ 37. $\frac{2}{13}$ 39. $\frac{4}{13}$ 41. $\frac{11}{26}$ 43. $\frac{1}{52}$ 45. $\frac{33}{66,640}$
 47. $\frac{1}{54,145}$ 49. $\frac{1}{108,290}$ 51. $\frac{3}{7}$ 53. 10^{-7} 55. 2^{-48} 57. $16x^4 - 160x^3y + 600x^2y^2 - 1000xy^3 + 625y^4$
 58. $-38 - 41i$ 59. $560x^6y^4$ 60. 20

Ejercicios de repaso del capítulo 12

1. 0, $\frac{3}{2}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{15}{4}$, $\frac{24}{5}$, $\frac{63}{8}$ 2. $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$, $-\frac{1}{10}$, $\frac{1}{13}$, $-\frac{1}{16}$, $\frac{1}{25}$ 3. $1 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{10}$ 4. $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k+1}$ 5. 7, -13
 6. -2, -23 7. 22 8. $\frac{223}{12}$ 9. -9, -5, -1, 3, 7, 11; $S_{12} = 156$ 10. $n = 8$, $d = 2$ 11. 14, 11, 8
 12. $x = 4$; 5, 11, 17 13. 1900 14. 4900 15. \$1800 16. \$21 17. $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{8}{3}$; $\frac{16}{3}$; $S_6 = \frac{21}{2}$ 18. $\frac{3280}{27}$
 19. 6, -3, $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{4}$ 20. $x = 7$; 20, 10, 5 21. $\frac{32}{5}$ 22. 30, 5, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{5}{216}$ 23. $\frac{11}{9}$ 24. $\frac{170}{33}$ 25. \$2307.94
 26. 9.8 ft; 191.4 ft 27. 72 m 28. 135 ft 31. 6 32. 3 33. 120 34. 1 35. 1 36. 1
 37. (a) 26,000 (b) 18,000 (c) 2700 38. 17,160 39. 362,880 40. 40,320 41. 30,240 42. 15 43. 3080
 44. 715 45. 24; $\frac{1}{108,290}$ 46. 3003 47. $243a^5 - 405a^4z + 270a^3z^2 - 90a^2z^3 + 15az^4 - z^5$
 48. $y^{-4} + 4y^{-2} + 6 + 4y^2 + y^4$ 49. $-160x^3y^6$ 50. $2835a^3b^5$ 51. $\frac{8}{15}$ 52. $\frac{7}{15}$ 53. 0 54. 1 55. $\frac{1}{4}$
 56. $\frac{3}{13}$ 57. $\frac{1}{2}$ 58. $\frac{10}{13}$ 59. $\frac{1}{52}$ 60. $\frac{1}{26}$ 61. 0 62. $\frac{1}{2}$ 63. $\frac{2}{13}$ 64. 0 65. $\frac{7}{13}$ 66. $\frac{11}{26}$
 67. $\frac{9999}{10,000}$ 68. 0.99; 0.01

Apéndice A

1. 0.6702 3. $0.6702 - 2 = -1.3298$ 5. 2.4456 7. 5.45 9. 3850 11. 0.00417 13. 0.5156 15. 2.6411
17. $0.5990 - 3 = -2.4010$ 19. 49.82 21. 0.03475 23. 0.0007665

Apéndice B

1. 0.9827 3. 0.4986 5. 1.275 7. $26^{\circ}40'$ 9. $50^{\circ}10'$ 11. $45^{\circ}40'$ 13. 0.6598 15. 6.639 17. 1.322
19. $67^{\circ}09'$ 21. $64^{\circ}52'$ 23. $44^{\circ}35'$

Índice de aplicaciones

- Administración**, 15, 28, 51-52, 63, 91, 108, 116, 120, 151, 163, 165, 170, 173, 181, 189, 197, 214, 216, 220, 227, 239, 244, 246, 252, 255-256, 483, 490, 509, 511-512, 515, 523, 530-531, 537, 540, 547-548, 556, 566, 577, 585-586, 600, 624, 639
- Aeroespacio**, 345-346
- Aeronáutica**, 69, 92, 118, 174, 277, 284-285, 296, 312, 320, 337-338, 343-344, 371-372, 374
- Agricultura**, 37, 68-69, 90, 125-126, 141, 162, 164, 197, 353, 374, 456, 515
- Agrimensura**, 284-285, 330, 338, 345-346, 373, 391
- Ajuste de curvas**, 502-503
- Arqueología**, 250, 253, 353
- Arquitectura**, 428, 448, 453, 455, 482
- Astronomía**, 29, 239, 256, 267, 276, 339, 449, 456
- Audiología**, 251, 253, 256
- Banca**, 588, 601, 605, 609
- Biología**, 227, 253, 255, 566, 588, 635
- Cálculo**, 51, 380, 382, 390, 415
- Carpintería**, 441
- Ciencia**, 108, 170, 213, 215
- Ciencia forestal**, 267
- Ciencia veterinaria**, 548
- Comunicaciones**, 69, 91
- Construcción**, 67-69, 91, 197, 599
- Consumo**, 68, 86, 100, 134, 169, 170, 173, 247, 252, 285, 320, 351, 353, 361, 373, 493, 501, 508, 600, 609, 625, 638
- Criminología**, 244
- Demografía**, 68, 248-249, 253, 256, 601, 610, 638
- Deportes**, 67-68, 345, 371, 374-375, 397, 399, 427, 494, 501, 516, 532, 539, 547, 563, 624-625, 631, 637
- Ecología**, 52, 67, 119, 126, 135, 141, 157, 173, 220, 253, 360-361
- Economía**, 28, 37, 49, 68, 79, 91, 118, 134-135, 253, 523, 609
- Educación**, 67, 69, 79, 108, 501, 624-625, 631, 640
- Electrónica**, 360, 374, 415
- Espacio exterior**, 428, 438, 441
- Estadística**, 493, 502, 595
- Física**, 29, 51, 92, 164, 167, 170, 174, 227, 239, 244, 255-256, 266-267, 276, 285, 305, 320, 359, 368-369, 371, 374, 415, 601, 607, 609, 616, 639
- Genética**, 638
- Geografía**, 266-267, 284, 320
- Geología**, 251, 253, 256-257, 264, 284, 354
- Geometría**, 63, 68-70, 85, 90, 92, 100, 116, 118, 215, 267, 345, 353, 361, 493, 499, 501, 503, 508, 523, 530, 610, 625, 639
- Geometría analítica**, 391, 502-503
- Gerencia**, 312
- Hidrología**, 375, 412
- Ingeniería**, 15, 37, 43, 51, 92, 108, 120, 132, 139, 141, 157, 164, 169-171, 174-175, 196, 220, 266-267, 285, 320, 338-339, 344-345, 353, 360, 371, 399, 432, 434, 441, 456, 482, 523
- Inversión**, 70, 86, 256, 502, 508, 530
- Manufactura**, 68-69, 90-91, 119, 152, 165, 170, 173, 175, 198, 212-213, 320, 502, 508, 515, 624, 631
- Medicina**, 216, 239, 253, 256, 360, 636
- Menudeo**, 68, 91, 117, 138, 140-141, 165, 173, 493, 501, 508

Meteorología, 157, 253, 286, 312, 372, 374

Milicia, 426, 624-625

Minería, 141, 165, 173

Movimiento, 64-65, 69, 79, 88-89, 92, 100,
115-116, 118-119, 181

Música, 70, 624

Navegación, 70, 92, 170, 267, 281-282, 284-286,
296, 320, 322, 338-339, 344-345,
353-354, 369, 372-373

Negocios, 415

Nutrición, 493

Oceanografía, 244, 256, 285, 359

Planimetría, 70

Política, 532, 545

Psicología, 239-240, 256

Química, 69, 135, 227, 239, 244, 249, 253,
255-256, 483, 491, 493, 508, 530

Recreación, 68, 70, 79, 91, 118, 267, 284-286, 320,
353, 356, 359, 371-372, 489, 493, 502,
600, 610, 624-625, 636-637, 639-640

Silvicultura, 257, 280, 284, 320, 336, 338, 373, 601

Tribunal, 624

- Abscisa
al origen, 126-127, 159-160
del punto, 121
- Acotamiento de soluciones, 192-193
- Álgebra combinatoria, 616
- Algoritmo de la división, 182
- Amortiguación, factor de, 311
- Amortización
de un préstamo, 247-248
fórmulas de, 247
- Amplitud
de la función
coseno, 302-304
seno, 302-304
- Ángulo (s), 258
agudo (s), 258
funciones trigonométricas de, 269-274, 323-324
arbitrarios, 323
funciones trigonométricas de, 323-327
complementarios, 258
coterminales, 258, 328-329
cuadrantes, 258, 325
funciones trigonométricas de los, 325
de depresión, 279
de elevación, 279
de referencia, 325-329
teorema del, 326
en posición normal, 258-259
involucrados en la rotación, 457f
lado
inicial del, 258
terminal del, 258
llano, 258
negativo, 258
obtusos, 258
positivos, 258
rectos, 258
suplementarios, 258
vértice del, 258
- Antilogaritmo, 235-236, 642-644
- Aplicaciones
de ecuaciones
cuadráticas, 84-89
lineales, 62-67
de proporciones, 66
- Aproximación
de exponenciales, 223-224
de soluciones, 77-78
- Arco (s)
comparación de, 263f
longitud de un, 263-265
fórmula de la, 263-265
- Área
del rectángulo, 346
del triángulo, 346-352
ALA, 348-349
LAL, 347-348
LLL, 350
- Argumento, 473
del cociente, 475
del producto, 475
- Asíntotas, 206, 444-446
horizontales, 206-212
de una función racional, 208
oblicuas, 206-212
de una función racional, 209-210
verticales, 206-212, 299
de una función racional, 207-208
- Axioma (s)
de igualdad, 18-19
de los números reales, 18
definición, 18
- Base, 23, 217
fórmula para la conversión de, 231
- Bel, 251
- Binomio, 29
- Calculadora, uso de, 13-14
- Cantidades
escalares, 361
vectoriales, 361
- Característica, 641-644
- Cardioide, 471
- Cateto
adyacente. Véase Seis funciones trigonométricas
opuesto. Véase Seis funciones trigonométricas
- Cero (s)
de multiplicidad
dos, 202
impar, 202
par, 202
uno, 202
de un polinomio, 177, 184, 193, 200
de una función racional, 209
imaginario, 204
irracional, 202-203
racionales, 201-202
real, 201-204
- Cifras significativas, 27-28
- Círculo, 429-433
definición, 430
ecuación de un, 430-433
forma
general de la, 430-431
ordinaria de la, 430-431
movimiento alrededor de un, 355
unitario, 260-261, 286-293, 313-317
distancias en el, 288-289
puntos sobre el, 289-290
- Cociente
argumento del, 475
de números complejos, 475-476
forma polar del, 474-475
logaritmo de un, 228
propiedad del, 45
- Coefficiente (s), 176
matriz de, 549, 561
numérico, 29
principal, 176, 196-197
racionales, 187
reales, 187
- Cofactor (es)
de un elemento, 570-571
desarrollo por, 571
- Combinación (es), 622
de n objetos tomados de r en r , 623
lineal de los vectores, 367-368
- Comparación de arcos, 263f
- Componente
horizontal, 367
vertical, 367
- Composición de gráficas, 152
- Conjunción de los eventos, 634
- Conjunto (s)
de números
enteros
negativos, 16-17
positivos, 16-17
irracionales, 16-17
naturales, 16-17
racionales, 16-17
reales, 16-17
definición, 16
- Cono circular recto, 429

- Constante (s), 29
de variación, 166-167
matriz de las, 561
- Construcción
de una elipse, 434f
del sistema de coordenadas polares, 465-466
- Conteo
principio fundamental de, 616
técnicas de, 616
- Contradicción, 53-55, 102
- Conversión
de ecuaciones, 468
entre
grados y radianes, 261-262
sistemas, 467
regla de, 261
- Coordenadas
al origen, 126-127, 159-160
polares, 465
construcción del sistema de, 465-466
- Cosecante. *Véase* Seis funciones trigonométricas
- Coseno (s). *Véase* Seis funciones trigonométricas
de la diferencia, 383
de dos ángulos, 383-384
de la suma, 385
de dos ángulos, 384-385
ley de los, 331, 339-344
demostración de la, 340
- Cota
inferior, 192-193
superior, 192-193
- Cotangente. *Véase* Seis funciones trigonométricas
- Cramer, Gabriel, 566
- Crecimiento poblacional, 248-249
- Criterio (s)
de la recta
horizontal, 154
vertical, 141
de simetría, 148-149
- Cuadrado perfecto. *Véase* Fórmulas de factorización
- Cuadrantes. *Véase* Sistema de coordenadas cartesianas
- Cuarto grado, ecuaciones de, 176
- Danzig, George B., 510
- Decaimiento radiactivo, 249
- Decibel, 251
- Decimal
finito, 16
periódico, 16
- Defasamiento de cada función, 307
- Definición recursiva. *Véase* Sucesión
- Demografía, 248-249
- DeMoivre, Abraham, 476
- Demostración
de la ley
de los cosenos, 340
de los senos, 331
del teorema del binomio, 628-630
- Denominador (es)
grado del, 207-209
racionalización de, 47
- Derivación de las ecuaciones, 355-356
- Desarrollo por cofactores, 571
- Descartes, René, 121, 190, 283
- Descomposición en fracciones parciales
de una función racional, 524-528
- Desigualdad (es), 101-102
compuestas, 104-106
con valor absoluto, 106-107
cuadráticas, 109-110
equivalentes, 101
graficación de, 103
lineales, 101-103
con dos variables, 503-504
graficación de, 504-506
no lineales, graficación de, 521-522
propiedades de las, 101
racionales, 113
solución de la, 101
- Desplazamientos
en gráficas, 143-144
horizontales en una función, 144-145
verticales en una función, 144-145
- Determinación de antigüedad por carbono, 250
- Determinante (s), 566-569
de matrices de órdenes superiores, 569
propiedades de los, 578-583
- Diagrama de árbol, 616-617
- Diferencia
común. *Véase* Sucesión aritmética
coseno de la, 383
de dos ángulos, 383-384
de cuadrados. *Véase* Fórmulas de factorización
de cubos. *Véase* Fórmula de factorización
identidades de, 382
seno de la, 387
tangente de la, 389
- Dimensión de una matriz, 533
- Dirección
del segmento, 362
del vector, 361-365
- Directriz de una parábola, 449
- Discriminante, 97
- Distancias en el círculo unitario, 288-289
- Disyunción de los eventos, 634
- División
algoritmo de la, 182
con números
complejos, 96
reales, 19
de expresiones racionales, 39
de polinomios, 32
sintética, 177-180
- Dominio, 136-138
- Ecuación (es), 53
con fracciones, 57-58, 81-82
con radicales, 55-56, 82-83
con valores absolutos, 58-59
condicionales, 53
conversión de, 468
cuadráticas, 70-71, 159
aplicaciones de, 84-89
forma general de la, 71
en forma, 79-80
- de cantidad, 490
- de cuarto grado, 176
- de productos cruzados, 66
- de tercer grado, 176
- de un círculo, 430-433
forma
general de la, 430-431
ordinaria de la, 430-431
- de una elipse, 434
forma
general de la, 439-440
ordinaria de la, 436-439
- de una hipérbola, 442
forma
general de la, 446-447
ordinaria de la, 443
- de una parábola, 449-450
forma ordinaria de la, 451
- de valor, 490
- derivación de las, 355-356
- equivalentes, 53
- exponenciales, 216-218, 240-241
resolución de, 240-241
- lineales
aplicaciones de, 62-67
con tres variables, 494
definición, 126
- literales, 59-60
- logarítmicas, 216-218, 242-243
resolución de, 242-243
- matriciales, 561
- para conversión de coordenadas, 467
- polinómica, 177
raíz de una, 177
- simplificación de, 459-460
- sistema de, 484-500
- solución o raíz de la, 53
- trigonométricas, 407-414
solución de, 407-408
- Eje
conjugado de la hipérbola, 443
de las X. *Véase* Sistema de coordenadas cartesianas
de las Y. *Véase* Sistema de coordenadas cartesianas
de simetría, 160-162
de una parábola, 449
imaginario, 472
polar. *Véase* Construcción del sistema de coordenadas polares
real, 472
transverso
horizontal de la hipérbola, 443
vertical de la hipérbola, 445
- Elemento (s), 16
cofactor de un, 570-571
de la matriz, 533
menor de un, 569-570
- Eliminación, método de, 487-488, 519
- Elipse, 428-429, 434
construcción de una, 434f
definición, 434
ecuación de una, 434
forma
general de la, 439-440
ordinaria de la, 436-439
- eje
mayor de la, 434

menor de la, 434
 vértice de la, 434
 Equilibrio
 estado de, 357-359
 punto de, 358-359
 Escala de Richter, 250-251
 Escalar, 361
 multiplicación por un, 362-365, 537
 propiedades de la, 367
 Espacio muestral del experimento, 631
 Estado de equilibrio, 357-359
 Euler, Leonard, 237
 Evaluación de funciones trigonométricas, 293
 Eventos, 631
 complementarios, 635-636
 conjunción de los, 634
 disyunción de los, 634
 Existencia
 de negativos. *Véase* Propiedades de la suma de vectores
 del vector cero. *Véase* Propiedades de la suma de vectores
 Éxito. *Véase* Probabilidad
 Experimento, 631
 espacio muestral del, 631
 Exponenciales
 aproximación de los, 223-224
 propiedades de los, 218-219
 Exponente (s), 23, 217, 228
 enteros, 23-28
 negativos, 25
 positivos, 25-26
 irracionales, 221
 propiedades de los, 23
 racionales, 46, 221
 reglas de los, 24-27
 Expresión (es)
 algebraica, 29
 equivalentes, 37-38
 exponencial, 23
 racionales, 37-42
 división de, 39
 multiplicación de, 38
 restas de, 39-41
 suma de, 39-41
 Extracción de raíces, método por, 73, 77
 Extremos de la proporción, 66
 Factor de amortiguación, 311
 Factorización
 de polinomios, 32
 de un trinomio, 33-34
 fórmulas de, 34
 método de, 71-77
 por agrupamiento, 33
 solución por, 71
 Forma (s)
 de la ecuación de una recta, 130-131
 escalonada reducida, 549-550
 estándar, 158-159
 exponencial, 217-220
 general de la ecuación
 cuadrática, 71
 de un círculo, 430-431
 de una hipérbola, 446-447
 logarítmica, 217-220
 ordinaria de la ecuación

de un círculo, 430-431
 de una hipérbola, 443
 de una parábola con vértice en el origen, 451
 pendiente-ordenada al origen. *Véase* Formas de la ecuación de una recta
 polar, 472-473
 de los números complejos, 473
 del cociente, 474-475
 del producto, 474-475
 potencia en, 476
 raíces en, 478-479
 punto-pendiente. *Véase* Formas de la ecuación de una recta
 Formato para demostrar identidades, 377-380
 Fórmula (s)
 de amortización, 247
 de diferencia de cubos, 97
 de factorización, 34
 de Herón, 351
 de interés compuesto, 246-247
 de la distancia, 123
 de la longitud de un arco, 263-265
 de la velocidad, 265
 de reducción, 403-405
 del punto medio, 124-125
 del vértice, 159
 para
 la conversión de base, 231
 sucesiones aritméticas, 598
 Fracaso. *Véase* Probabilidad
 Fracción (es)
 algebraica, 37
 complejas, 41
 parciales, 524-528
 de una función racional, descomposición en, 524-528
 Frecuencia del movimiento, 356
 Función (es), 135-138
 amortiguadas, 310
 gráficas de, 310-311
 composición de, 152
 compuesta, 152-153
 constante, 137, 142
 cosecante, 299-301
 coseno, 296-304
 amplitud de la, 302-304
 inversa de la, 419-421
 periodo de la, 303-304
 cotangente, 299-300
 creciente, 142-143, 154
 cuadráticas, 137, 143, 158-160
 de la forma, 198
 decreciente, 142-143, 154
 defasamiento de cada, 307
 definición, 136
 desplazamientos
 horizontales en una, 144-145
 verticales en una, 144-145
 exponenciales, 216-225
 propiedades de las, 223
 gráfica de una, 141-142
 identidad, 137, 153
 impar, 146-147
 inversas, 153-155
 propiedades de las, 225

lineales, 137, 154
 de la forma, 198
 logarítmicas, 216-225
 propiedades de las, 225
 mayor entero, 149
 objetivo, 510
 par, 146-147
 periódicas, 296-299
 polinómica, 198, 206
 racionales, 205-206
 asíntotas
 horizontales de una, 208
 oblicuas de una, 209-210
 verticales de una, 207-208
 cero de una, 209
 descomposición en fracciones parciales de una, 524-528
 graficación de una, 205-213
 secante, 298-300
 seno, 296-301
 amplitud de la, 302-304
 gráfica de la, 297
 inversa de la, 416-419
 periodo de la, 303-304
 sinusoidales, 305-309
 tangente, inversa de la, 421-423
 trigonométricas
 de ángulos
 agudos, 269-274, 323-324
 arbitrarios, 323-327
 cuadrantes, 325
 de números reales, 286-294
 evaluación de las, 293
 signos de las, 293
 reglas de los, 293
 uno a uno, 153-155
 valor absoluto, 142-143

Gauss, Karl Friedrich, 549
 Geometría analítica, 428
 Grado (s)
 de un término, 29
 del denominador, 207-209
 del numerador, 207-209
 del polinomio, 29
 medición de, 258-260
 Gráfica (s)
 acotadas, 506
 de desigualdades
 lineales, 504-506
 no lineales, 521-522
 de un sistema lineal, 484f
 de una ecuación, 122
 de una función, 141-142
 amortiguada, 310-311
 lineal, 142
 seno, 297
 trigonométrica, 296-304
 desplazamientos en, 143-144
 polinómicas, 198-199
 que no son curvas continuas, 149
 Graficación
 de desigualdades, 103
 lineales con dos variables, 504-506
 de una función racional, 205-213
 mediante la suma de ordenadas, 309-310
Graham Bell, Alexander, 251

- Herón*, 351
- Hipérbola, 283, 428-429, 442-447
 definición 442
 ecuación de una, 442
 forma
 general de la, 446-447
 ordinaria de la, 443
 eje
 conjugado de la, 443
 transverso
 horizontal de la, 443
 vertical de la, 445
 rama de la, 442
- Hipotenusa. *Véase* Seis funciones trigonométricas
- Hipótesis de inducción, 611-615
- Identidad (es), 53-55, 102-103
 aditiva, 18-19
 con
 cofunciones, 314, 376
 razones, 314-315, 376
 recíprocos, 313-315, 376
 de diferencia, 382
 de suma, 382, 402
 formato para demostrar, 377-380
 fundamentales, 312-313
 miscelánea de, 316, 376
 multiplicativa, 18-19
 para
 ángulos dobles, 391-393
 el semiángulo, 394-397
 productos, 399
 verificación de las, 400
- Igualdad
 axiomas de, 18-19
 de matrices, 533
 propiedad
 de sustitución de la, 19
 simétrica de la, 19
 transitiva de la, 19
 teoremas de, 20
- Imagen, 136
- Índice, 44
 de la suma 592
 de refracción, 283
 en el agua, 283
 en el aire, 283
 propiedad del, 45
- Inducción
 hipótesis de, 611-615
 matemática, 610-615
 principio de, 611-615
- Inflexión, puntos de, 200
- Intensidad del sismo, 251
- Intensidad del sonido, 251
- Interés compuesto, 245-247
 fórmula de, 246-247
- Interpolación lineal, 643-647
- Interpretación gráfica de los sistemas no lineales, 516
- Intersección (es), 160f
 de un círculo y una recta, 516f
 de una hipérbola
 y una elipse, 518f
 y una recta, 518f
- Intervalo (s)
 abierto, 104-105
 cerrado, 104
 infinito, 105
 notación de, 104-106
 semiabierto, 104-105
- Inversa (s)
 de la función, 155-156
 coseno, 419-421
 seno, 416-417
 tangente, 421-423
 de una matriz, 557-560
 método de la, 562
 procedimiento para encontrar, 155
- Inversos
 aditivos, 18-19, 366
 multiplicativos, 18
- Ley
 asociativa. *Véase* Propiedades de la suma de vectores
 conmutativa. *Véase* Propiedades de la suma de vectores
 de los cosenos, 331, 339-344
 demostración de la, 340
 de los senos, 331-337
 demostración de la, 331
 del paralelogramo, 363-368
- Logaritmo (s), 216-217, 228
 comunes, 216, 233-234
 negativos, 234
 con bases diferentes de diez, 234-235
 de un cociente, 228
 de un número a una potencia, 228
 de un producto, 228
 definición, 217
 naturales, 216, 236-237
 propiedades del, 216-219, 227-231
 regla
 de las potencias para, 229-231
 del cociente para, 229-231
 del producto para, 229-231
- Lógica algebraica, 13
- Longitud
 de periodo, 304
 del segmento, 361
- Magnitud
 del sismo, 250-251
 del vector, 361-365
- Malthus, Thomas*, 248
- Mantisa, 641-644
- Matriz (es)
 aumentada, 549-550
 de un sistema
 de dos ecuaciones lineales con
 dos variables, 549-550
 de tres ecuaciones lineales, 51
 cuadrada, 533
 inversa de una, 556-564
 de coeficientes, 549, 561
 de las constantes, 561
 de las variables, 561
 dimensión de una, 533
 elementos de la, 533
 equivalente de la forma, 549
 identidad, 544
 igualdad de, 533
 inversa de una, 557-560
 multiplicación de, 541-546
- ley
 asociativa de la, 543
 distributiva de la, 543
 propiedades de la, 543
 negativa de una, 536
 nula, 535
 resolución de ecuaciones de, 556
 resta de, 536
 suma de, 534
 idéntico aditivo para la, 536
 ley
 asociativa de la, 535
 conmutativa de la, 535
 traspuesta de una, 545
- Media aritmética, 599
- Medición de grados, 258-260
- Medida
 en radianes, 260
 indirecta. *Véase* Aplicaciones de los triángulos rectángulos
- Medio proporcional, 66
- Menecmo*, 428
- Menor de un elemento, 569-570
- Método
 de eliminación, 487-488, 519
 de factorización, 71-77
 de la inversa, 562
 de raíz cuadrada, 73
 de reducción, 495-496
 de suma de ordenadas. *Véase* Graficación mediante la suma de ordenadas
 de sustitución, 486-488, 517-518
 gaussiano, 548-554
 PEIU, 30-33, 95
 por extracción de raíces, 73, 77
- Miscelánea de identidades, 316, 376
- Modelo Maltusiano, 248-249
- Monomio, 29
- Movimiento
 alrededor de un círculo, 355
 amortiguado, 359
 armónico simple, 354-355
 frecuencia del, 356
 horizontal, 355
 vertical, 355
- Multiplicación
 con números
 complejos, 95
 reales, 18
 de expresiones reacionales, 38
 de matrices, 541-546
 ley
 asociativa de la, 543
 distributiva de la, 543
 propiedades de la, 543
 de polinomios, 30-31
 por un escalar, 362-365, 537
 propiedades de la, 367
- Múltiplo escalar, 362, 537
- Navegación
 aérea, 280-282
 naval, 280-282
- Negativa de una matriz, 536
- Nivel de carbono catorce, 250
- Noción
 científica, 26-27

- de orientación, 279-280
 - de pendiente, 130
 - del valor absoluto, 21
 - exponencial, 23
 - Notación
 - de intervalos, 104-106
 - de pares ordenados, 365
 - de sumatoria, 592
 - factorial, 618
 - polaca inversa, 13
 - vectorial, 364-366
 - Numerador, grado del, 207-209
 - Número (s)
 - complejo (s)
 - cociente de, 475-476
 - definición, 94
 - división de, 96
 - forma polar de, 473
 - igualdad de, 94
 - multiplicación de, 95
 - producto de, 475-476
 - raíces de, 478-479
 - resta de, 95
 - suma de, 95
 - valor absoluto de un, 472
 - de puntos de cambio, 200
 - enteros
 - negativos, 16-17
 - positivos, 16-17
 - imaginarios, 93
 - irracionales, 16-17
 - naturales, 16-17
 - racionales, 16-17
 - reales, 16-17, 94
 - axiomas de los, 18
 - división con, 19
 - multiplicación con, 18
 - operaciones con, 18-19
 - resta con, 19
 - sistema de, 16-21
 - suma con, 18
 - Onda (s)
 - de luz, 283
 - de proa, 281-282
 - de seno amortiguada, 311
 - sonoras, 283
 - Operaciones
 - con números reales, 18-19
 - con pares ordenados, 365
 - de matrices, 534-538
 - elementales de fila, 549
 - Órbita del laboratorio espacial, 437-438
 - Ordenada
 - al origen, 126-127
 - del punto. *Véase* Sistema de coordenadas cartesianas
 - Origen, 17, 121
 - abscisa al, 126-127, 159-160
 - coordenadas al, 126-127, 159-160
 - forma pendiente-ordenada al, 485
 - ordenada al, 126-127
 - Parábola (s), 158-160, 428-429, 449-454
 - con vértice en el origen, 451
 - definición, 449
 - directriz de una, 449
 - ecuación de una, 449-450
 - forma ordinaria de la, 451
 - eje de simetría de una, 449
 - vértice de una, 449-452
 - Paralelogramo, ley del, 363-368
 - Pendiente
 - de una recta, 128-129
 - negativa, 129f
 - noción de, 130
 - nula, 129f
 - positiva, 129f
 - Periodo, 297
 - de la función
 - coseno, 303-304
 - seno, 303-304
 - longitud de, 304
 - Permutación (es), 616-623
 - circulares, 621-622
 - distinguibiles, 620
 - Pitágoras, 85
 - Plano
 - complejo, 472
 - coordenado. *Véase* Sistema de coordenadas cartesianas
 - Platón, 428
 - Polinomio (s), 29-35
 - ceros de un, 177, 184, 193, 200
 - con coeficientes reales, 176, 190
 - división de, 32
 - factorización de, 32
 - grado del, 29
 - multiplicación de, 30-31
 - nulo, 176, 182
 - resta de, 30
 - suma de, 30
 - Polo. *Véase* Construcción del sistema de coordenadas polares
 - Potencia (s)
 - en forma polar, 476
 - k*-ésima perfecta, 45-47
 - Préstamo, amortización de un, 247-248
 - Primer grado, ecuaciones de, 53, 126
 - Primo, 33
 - Principal. *Véase* Interés compuesto
 - Principio
 - de inducción matemática, 611-615
 - fundamental de conteo, 616
 - Probabilidad, 631-636
 - Procedimiento para encontrar inversas, 155
 - Producto (s)
 - argumento del, 475
 - de números complejos, 475-476
 - escalar (es), 541
 - de dos vectores, 541
 - forma polar del, 474-475
 - fórmulas de, 31
 - logaritmo de un, 228
 - nulo, regla del, 70-71, 97-98
 - propiedad del, 45
 - Programación lineal, 510-514
 - teorema fundamental de la, 511
 - Progresión
 - aritmética. *Véase* Sucesión aritmética
 - geométrica. *Véase* Sucesión geométrica
 - Propiedad (es)
 - asociativa, 18
 - conmutativa, 18
 - de la multiplicación, 19
 - de cerradura, 18
 - de la multiplicación
 - de matrices, 543
 - por un escalar, 367
 - de la suma de vectores, 366
 - de la sumatoria, 593
 - de las desigualdades, 101
 - de las funciones
 - exponenciales, 223
 - inversas, 225
 - logarítmicas, 225
 - de los determinantes, 578-583
 - de los exponentes, 23-25
 - de sustitución, 18
 - de la igualdad, 19
 - de tricotomía, 17-18
 - del cociente, 45
 - del índice, 45
 - del logaritmo, 216-219, 227-231
 - del producto, 45
 - distributiva, 18
 - reflexiva, 18
 - simétrica, 18
 - de la igualdad, 19
 - transitiva, 17-18
 - de la igualdad, 19
- Proporción (es), 66
 - aplicaciones de, 66
 - extremos de la, 66
- Proporcionalidad, constante de. *Véase* Constante de variación
- Proyección
 - horizontal, 355
 - vertical, 355
- Prueba (s)
 - de la recta horizontal, 154f
 - de simetría, 147-148, 210
- Punto (s)
 - críticos, 111-113
 - de cambio, 200-201
 - número de, 200
 - de equilibrio, 358-359
 - de inflexión, 200
 - de prueba, 111-113, 504
 - sobre el círculo unitario, 289-290
- Racionalización de denominadores, 47
- Radianes
 - medida en, 260
- Radical (es), 44
 - ecuaciones con, 55
 - simplificación de, 45-46
- Radicando, 44
- Raíz (es)
 - cuadrada, 44
 - de un número negativo, 94
 - cúbica, 44
 - de la ecuación polinómica, 177
 - de multiplicidad
 - dos, 72, 186
 - tres, 186
 - uno, 186
 - de números complejos, 478-479
 - de una ecuación polinómica, 177
 - en forma polar, 478-479
 - extrañas, 55
- Rama de la hipérbola, 442
- Razón común. *Véase* Sucesión geométrica

- Recta (s)
 a través del origen, 127
 formas de la ecuación de una, 130
 frontera, 504
 horizontal, 127
 criterio de la, 154
 prueba de la, 154f
 numérica, 17
 paralelas, 131-132
 pendiente de una, 128-129
 perpendiculares, 131-132
 vertical, 127
 criterio de la, 141
- Rectángulo, área del, 346
- Reducción
 fórmula de, 403-405
 método de, 495-496
- Refracción, índice de, 283
 en el agua, 283
 en el aire, 283
- Región factible, 510-514
 no acotada, 514
- Regla (s)
 de conversión, 261
 de Cramer, 566-569
 para sistemas
 de dos ecuaciones, 567-568
 de tres ecuaciones, 573-574
 de las potencias, 24
 para logaritmos, 229-231
 de los exponentes, 24-27
 enteros, 46
 de los signos
 de Descartes, 190-191
 de las funciones trigonométricas, 293
 del cociente, 24
 para logaritmos, 229-231
 del producto, 23
 nulo, 70-71, 97-98
 para
 exponentes, 30
 logaritmos, 229-231
- Relación, 136
- Resolución
 de ecuaciones
 de matrices, 556
 exponenciales, 240-241
 logarítmicas, 242-243
 de triángulos oblicuos, 331
 por el método de la inversa, 562-563
- Resonancia, 359
- Resta
 con números
 complejos, 95
 reales, 19
 de expresiones racionales, 39-41
 de matrices, 536
 de polinomios, 30
 de vectores, 367
- Restricciones, 510
- Resultante. *Véase* Suma de vectores
- Ritcher, Charles, 250
- Rotación
 ángulos involucrados en la, 457f
 de ejes, 456
- Secante. *Véase* Seis funciones trigonométricas
- Secciones cónicas, 428-429
 degeneradas, 429
- Segmento
 dirección del, 362
 longitud del, 361
- Segundo grado, ecuación de, 71
- Seis funciones trigonométricas, 269-275
 variaciones de las, 301-302
- Semiángulo, identidades para el, 394-397
- Semiperímetro de un triángulo, 350-351
- Semiplano
 abierto, 504
 cerrado, 504
- Seno (s). *Véase* Seis funciones trigonométricas
 de la diferencia, 387
 de dos ángulos, 387
 de la suma, 386
 de dos ángulos, 386
 ley de los, 331-337
 demostración de la, 331
- Serie, 591-593
- Signos
 de Descartes, regla de los, 190-191
 de las funciones trigonométricas, 293
 reglas de los, 293
- Símbolo de sumatoria, 591
- Simetría
 criterios de, 148-149
 eje de, 160-162
 pruebas de, 147-148, 210
- Simplificación
 de ecuaciones, 459-460
 de radicales, 45-46
- Sismo
 intensidad del, 251
 magnitud del, 250-251
- Sistema (s)
 con número infinito de soluciones, 497
 consistente e independiente, 484-486
 conversión entre, 467
 cuadrado, 498
 de coordenadas
 cartesianas, 121-123
 polares, construcción del, 465-466
 de ecuaciones, 484-500
 solución de un, 484
 de masa y resorte, 357-358
 de números reales, 16-21
 dependiente, 484-486
 equivalente, 487
 homogéneos, 499
 inconsistente, 484-486
 lineal (es)
 de desigualdades, 503-508
 gráfica de un, 484f
 no cuadrados, 498-499
 no lineales, 516-522
 interpretación gráfica de los, 516
 sin solución, 496-497
- Snell, Willebrod, 283
- Solución (es)
 acotamiento de, 192-193
 aproximación de, 77-78
 de ecuaciones
 cuadráticas, 97, 112
 trigonométricas, 407-408
 de la desigualdad, 101
- factible, 510
 o raíz de la ecuación, 53
 óptima, 510
 a un problema de programación lineal, 511
 por compleción de cuadrados, 73-74
 por extracción de raíces, 72-73
 por factorización, 71
 por la fórmula cuadrática, 75-76
 trivial, 499
- Sucesión (es), 589-591
 aritmética (s), 596-598
 fórmulas para, 598
 finita, 589
 geométricas, 601-608
 fórmulas para, 604
 infinita, 589
 término de la, 589
- Suma
 con números
 complejos, 95
 reales, 18
 coseno de la, 385
 de dos ángulos, 384-385
 de expresiones racionales, 39-41
 de matrices, 534
 idéntico aditivo para la, 536
 ley
 asociativa de la, 535
 conmutativa de la, 535
 de ordenadas, método de. *Véase* Graficación mediante la suma de ordenadas
 de polinomios, 30
 de vectores, 365
 propiedad de la, 366
 identidades de, 382, 402
 índice de la, 592
 límite
 inferior de la, 592
 superior de la, 592
 seno de la, 386
 tangente de la, 389
- Sumatoria
 de constantes, 593
 notación de, 592
 propiedades de la, 593
 símbolo de, 591
- Sustitución
 método de, 486-488, 517-518
 para la igualdad, axiomas de. *Véase* Método de sustitución trigonométrica, 380
- Tabla (s)
 de funciones trigonométricas, 645-647
 logarítmicas, 641-644
- Tangente
 de la diferencia, 389
 de la suma, 389
- Técnicas de conteo, 616
- Tercer grado, ecuaciones de, 176
- Teorema (s), 19
 de DeMoivre, 476-478
 de Descartes. *Véase* Regla de los signos de Descartes
 de igualdad, 20
 de la raíz racional, 193-194, 202

- de las matrices, 578-583
- de Pitágoras, 85, 88, 123-124, 270-272, 277, 287, 314, 327, 334, 340-341, 368, 423-424, 435, 462
- del ángulo de referencia, 326
- del binomio, 626-630
 - demonstración del, 628-630
- del factor, 184-186, 195
- del residuo, 183-184
- del valor intermedio, 202-204
- fundamental
 - de la programación lineal, 511
 - del álgebra, 185
- que involucran
 - al cero, 19
 - negativos de números, 20
 - sobre potencias, 55, 82
- Término (s), 29, 176
 - general. *Véase* Sucesión
 - grado de un, 29
 - semejantes, 30
- Terminología de matrices, 533
- Terna ordenada de números, 494
- Tipos
 - de descomposición, 525-528
 - de funciones, 137
 - de sistemas, 484-486
 - de soluciones de una ecuación cuadrática, 97
- Transformación. *Véase* Desplazamientos
- verticales en una función
 - ecuaciones de, 457-458
- Traslación de ejes. *Véase* Elipse
- Traspuesta de una matriz, 545
- Triángulo (s)
 - agudo, 331
 - área del, 346-352
 - de Pascal, 626-627
 - oblicuos, 331
 - resolución de, 331
 - obtuso, 331
 - rectángulos
 - aplicación de los, 279-283
 - semejantes, 269
 - semiperímetro de un, 350-351
- Trigonometría, 257
- Trinomio, 29
- Umbral de la audición humana. *Véase* Intensidad del sonido
- Uso de calculadora, 13-14
- Valor (es)
 - absoluto (s) 20-21
 - de un número complejo, 472
 - desigualdades con, 106-107
 - ecuaciones con, 58-59
 - noción del, 21
 - intermedio, teorema del, 202-204
 - polinómicos, 203
- Variable (s), 29
 - dependiente, 137
 - independiente, 137
 - matriz de las, 561
- Variación, 165
 - conjunta, 168
 - constante de, 166-167
 - de las identidades para productos, 400
 - de signo, 190
 - directa, 165-168
 - inversa, 167-168
- Vector (es), 361
 - cero, 366
 - combinación lineal de los, 367-368
 - componentes del, 364
 - dirección del, 361-365
 - magnitud del, 361-365
 - notación geométrica de un, 368
 - productos escalares de dos, 541
 - resta de, 367
 - suma de, 365
 - unitarios básicos, 367
- Velocidad
 - angular, 265
 - de la luz
 - en el agua, 283
 - en el aire, 283
 - en el vacío, 283
 - de la onda sonora, 283
 - fórmula de la, 265
 - lineal, 265
- Vértice, 158-160
 - de la elipse, 434
 - de una parábola, 449-452
 - del ángulo, 258
 - fórmula del, 159
- Vida media de una sustancia. *Véase* Decaimiento radiactivo

100

Exponentes enteros

1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $(ab)^n = a^n b^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
6. $a^0 = 1$
7. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
8. $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$

Exponentes racionales y radicales

1. $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$
3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

si $a > 0$, entonces

1. $|x| = a$ significa $x = a$ o $x = -a$
2. $|x| < a$ significa $-a < x < a$
3. $|x| > a$ significa $x < -a$ o $x > a$

Factorización

1. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ Diferencia de cuadrados
2. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ Cuadrado perfecto
3. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ Cuadrado perfecto
4. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ Suma de cubos
5. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ Diferencia de cubos

Fórmula de la distancia

La distancia entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Fórmula del punto medio

El punto medio del segmento de recta que une (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Fórmula cuadrática

si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Pendiente de una recta

La pendiente de una recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Formas de la ecuación de una recta

General $ax + by + c = 0$

Punto-pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$

Ordenada al origen $y = mx + b$

Dos puntos $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

Funciones

Lineal	$f(x) = mx + b$
Constante	$f(x) = b$
Idéntica	$f(x) = x$
Cuadrática	$f(x) = ax^2 + bx + c$
Polinómica	$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
Racional	$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas

Logaritmos

$x = \log_a y$ significa $a^x = y$

1. Regla del producto $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
2. Regla del cociente $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
3. Regla de la potencia $\log_a x^c = c \log_a x$
4. Cambio de base $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

Sucesiones aritméticas

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n - 1)d] = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

Sucesiones geométricas

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r} = \frac{a_1 - r a_n}{1 - r}$$

$$S = \frac{a_1}{1 - r}, \text{ si } |r| < 1$$

Permutaciones

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n - r)!} \quad {}_n P_n = n!$$

Combinaciones

$${}_n C_r = \frac{n!}{r!(n - r)!} \quad {}_n C_n = 1 \quad {}_n C_0 = 1$$

Teorema del binomio

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \cdots + \binom{n}{n} b^n \text{ donde } \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n - r)!}$$

Medida angular

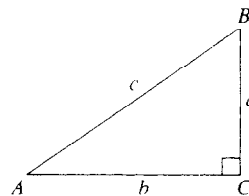
$$\pi \text{ radianes} = 180 \text{ grados}$$

$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes}$$

$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados}$$

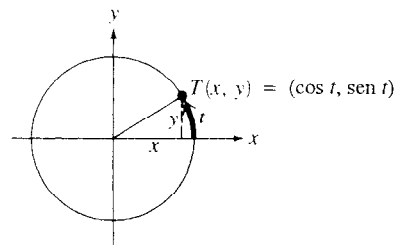
Funciones trigonométricas de un ángulo agudo

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} A &= \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} & \operatorname{csc} A &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado opuesto}} = \frac{c}{a} \\ \cos A &= \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} & \sec A &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado adyacente}} = \frac{c}{b} \\ \tan A &= \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}} = \frac{a}{b} & \cot A &= \frac{\text{lado adyacente}}{\text{lado opuesto}} = \frac{b}{a}\end{aligned}$$



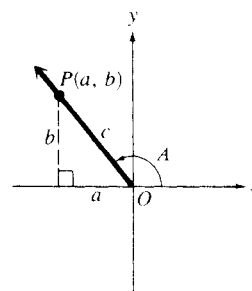
Funciones trigonométricas de números reales

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} t &= y & \operatorname{csc} t &= \frac{1}{y} \\ \cos t &= x & \sec t &= \frac{1}{x} \\ \tan t &= \frac{y}{x} & \cot t &= \frac{x}{y}\end{aligned}$$



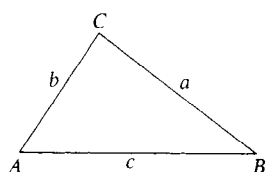
Funciones trigonométricas de un ángulo arbitrario

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} A &= \frac{b}{c} & \operatorname{csc} A &= \frac{c}{b} \\ \cos A &= \frac{a}{c} & \sec A &= \frac{c}{a} \\ \tan A &= \frac{b}{a} & \cot A &= \frac{a}{b}\end{aligned}$$



Ley de los senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$



Ley de los cosenos

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C\end{aligned}$$

Área de un triángulo

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C \\ &= \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A \\ &= \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \frac{1}{2} a^2 \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \\ &= \frac{1}{2} b^2 \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} \\ &= \frac{1}{2} c^2 \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}\end{aligned}$$

$$\text{Área} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

Identidades fundamentales

$$\csc t \equiv \frac{1}{\sin t}$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t \equiv 1$$

$$\tan t \equiv \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$\sin(-t) \equiv -\sin t$$

$$\sec t \equiv \frac{1}{\cos t}$$

$$1 + \tan^2 t \equiv \sec^2 t$$

$$\cot t \equiv \frac{\cos t}{\sin t}$$

$$\cos(-t) \equiv \cos t$$

$$\cot t \equiv \frac{1}{\tan t}$$

$$1 + \cot^2 t \equiv \csc^2 t$$

Identidades de suma y diferencia

$$\sin(A + B) \equiv \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin(A - B) \equiv \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) \equiv \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A - B) \equiv \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A + B) \equiv \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan(A - B) \equiv \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

Identidades de ángulos dobles

$$\sin 2A \equiv 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A \equiv \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$\equiv 1 - 2 \sin^2 A$$

$$\equiv 2 \cos^2 A - 1$$

$$\tan 2A \equiv \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

Identidades de reducción de potencias

$$\sin^2 A \equiv \frac{1 - \cos 2A}{2}$$

$$\cos^2 A \equiv \frac{1 + \cos 2A}{2}$$

$$\tan^2 A \equiv \frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A}$$

Identidades de semiángulos

$$\sin \frac{A}{2} \equiv \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\cos \frac{A}{2} \equiv \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

$$\tan \frac{A}{2} \equiv \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$$

Identidades de productos

$$\sin A \cos B \equiv \frac{1}{2} [\sin(A + B) + \sin(A - B)]$$

$$\cos A \sin B \equiv \frac{1}{2} [\sin(A + B) - \sin(A - B)]$$

$$\cos A \cos B \equiv \frac{1}{2} [\cos(A + B) + \cos(A - B)]$$

$$\sin A \sin B \equiv -\frac{1}{2} [\cos(A + B) - \cos(A - B)]$$

Identidades de sumas

$$\sin C + \sin D \equiv 2 \sin \left(\frac{C + D}{2} \right) \cos \left(\frac{C - D}{2} \right)$$

$$\sin C - \sin D \equiv 2 \cos \left(\frac{C + D}{2} \right) \sin \left(\frac{C - D}{2} \right)$$

$$\cos C + \cos D \equiv 2 \cos \left(\frac{C + D}{2} \right) \cos \left(\frac{C - D}{2} \right)$$

$$\cos C - \cos D \equiv -2 \sin \left(\frac{C + D}{2} \right) \sin \left(\frac{C - D}{2} \right)$$

*La publicación de esta obra la realizó
Editorial Trillas, S. A. de C. V.*

*División Administrativa, Av. Río Churubusco 385,
Col. Pedro María Anaya, C.P. 03340, México, D. F.
Tel. 6884233, FAX 6041364*

*División Comercial, Calz. de la Viga 1132, C.P. 09439
México, D. F., Tel. 6330995, FAX 6330870*

*Se terminó de imprimir y encuadernar el 28 de febrero de 1994,
en los talleres de Rotodiseño y Color, S. A. de C. V.
Se tiraron 2 000 ejemplares, más sobrantes de reposición.*

TIP CAL, E 74
