



..... Тогтмол гүйдлийн хэлхээ

Бүлэг 15: Лаплас хувиргалт

Б. Бат-Отгон © 2011 Улаанбаатар

1

15.1 Удиртгал



Францын математикч, астрономич **Пьер-Симон Лаплас** (1749-1827) дифференциал тэгшитгэлийн шийдийг олох математикийн аргыг 1779 онд нээжээ.

Энэ аргыг **лаплас хувиргалт** гэх бөгөөд интеграл, дифференциал хэлбэртэй тэгшитгэлүүдийг комплекс хувьсагчтай энгийн тэгшитгэл болгон хувиргаж шийдийг нь олдог. Олсон шийдээ **урвуу лаплас хувиргалтаар** хувиргавал өмнөх төвөгтэй интеграл, дифференциал тэгшитгэлүүдийн шийд байх болно.

Лаплас хувиргалт техникт, ялангуяа электроникт маш чухал үүрэг гүйцэтгэдэг.

15.2 Тодорхойлолт



Бүлэг 15

Өгөгдсөн $f(t)$ функцийн лаплас хувиргалт хийгдсэн хэлбэр $F(s)$ буюу $\mathcal{L}[f(t)]$ гэж үзвэл:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$s = \sigma + j\omega$ s нь комплекс хувьсагч юм. Экспоненциал буюу e -ийн зэрэгт функц нь хэмжээсгүй байх ёстой. Тэгвэл аргумент нь хэмжээсгүй байх ёстой. Хэрэв t хувьсагч хугацаа гэж үзвэл s нь хугацааны урвуу буюу давтамжийн нэгжтэй байх ёстой болно.

Лаплас хувиргалт нь $f(t)$ функцийг хугацааны хэмжээст орчноос давтамжийн хэмжээст $F(s)$ функцид хувиргах интеграл хувиргалт юм.

15.2 Тодорхойлолт



Бүлэг 15

Хэрэв $f(t)$ функцийг лаплас хувиргалт хийн $F(s)$ функц болгодог бол урвуугаар:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} F(s)e^{st} dt$$

Лаплас хувиргалтыг хийх болон урвуу хувиргалтыг хийхэд комплекс хувьсагчтай математикийн аргуудыг хэрэглэх бөгөөд тэр бүгдийг энд үзэх цаг байхгүй учир лаплас хувиргалтын хүснэгтийг шууд ашиглах нь амар байдаг.

15.2 Лаплас жишээ



Бүлэг 15

Жишээ: $f(t)=1$, $f(t)=e^{at}$ функцүүдийг лаплас хувирга.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[1] &= \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^A = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-sA} - \left(-\frac{1}{s} e^{-s \cdot 0} \right) \right) = \frac{1}{s} \quad \boxed{\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{at}] &= \int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s} [e^{(a-s)t}]_0^{\infty} = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{a-s} [e^{(a-s)t}]_0^A = \frac{1}{a-s} [0 - 1] = \frac{1}{s-a}; \quad s > a\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}}$$

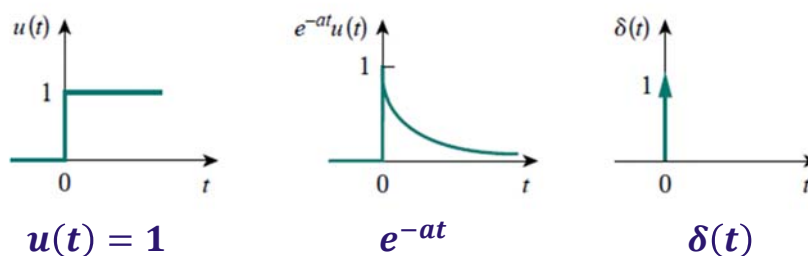
$$\boxed{\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}}$$

15.2 Лаплас жишээ



Бүлэг 15

Жишээ: $u(t)$, $e^{at}u(t)$, $\delta(t)$ функцүүдийн лаплас хувиргалт.



$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-0} = 1$$

15.2 Лаплас хүснэгт



TABLE 15.2 Laplace transform pairs.

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s + a}$	$\sin(\omega t + \theta)$	$\frac{s \sin \theta + \omega \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\cos(\omega t + \theta)$	$\frac{s \cos \theta - \omega \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s + a)^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s + a)^{n+1}}$		

7

15.3 Лаплас чанарууд



Шугаман чанар

$$\mathcal{L}[af(t)] = aF(s) \quad a = \text{const}$$

$$\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

Жишээ:

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})\right] = \frac{1}{2}[\mathcal{L}[e^{j\omega t}] + \mathcal{L}[e^{-j\omega t}]]$$

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2s}{s^2 + j^2\omega^2}\right) = \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right)$$

Функцүүдийн **шугаман нийлбэрийн** лаплас хувиргалт нь **функц тус бүрийн** лаплас хувиргалтуудын **шугаман нийлбэртэй** тэнцүү байна.

15.3 Лаплас чанарууд



Бүлэг 15

Хэмжээслэх чанар (scaling)

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^{\infty} f(at)e^{-st} dt = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Баталгаа:

$$x = at \quad dx = a dt \quad t = \frac{x}{a} \quad dt = \frac{dx}{a}$$

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^{\infty} f(x)e^{-x(s/a)} \frac{dx}{a} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(x)e^{-x(s/a)} dx$$

$$\mathcal{L}[\sin 2\omega t] = \frac{1}{2} \frac{\omega}{(s/2)^2 + \omega^2} = \frac{2\omega}{s^2 + 4\omega^2} \quad \mathcal{L}[e^{at}] \Rightarrow \mathcal{L}[e^t] = ?$$

Функцийн **аргумент** a дахин ихэсвэл лаплас хувиргалт хийгдсэн **функц болон түүний аргумент** a дахин буурна.

15.3 Лаплас чанарууд



Бүлэг 15

Экспоненциал хэмжээслэлт (Exponential scaling)

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s - a) \quad \mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s + a)$$

Frequency shift

Баталгаа:

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = \int_0^{\infty} e^{at}f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s-a)t} dt = F(s - a)$$

Жишээ:

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}\sin \omega t] = \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}\cos \omega t] = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

15.3 Лаплас чанарууд



Бүлэг 15

Хугацааны шилжилт

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = e^{-as}F(s) \quad \mathcal{L}[f(t+a)] = e^{as}F(s)$$

Жишээ:

$$\mathcal{L}[\cos \omega(t+a)] = e^{as} \frac{s}{s^2 + \omega^2} = (\cos a + s \sin a) \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos \omega(t-a)] = e^{-as} \frac{s}{s^2 + \omega^2} = (\cos a - s \sin a) \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\sin \omega(t+a)] = e^{as} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = (\cos a + s \sin a) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\sin \omega(t-a)] = e^{-as} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = (\cos a - s \sin a) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

15.3 Лаплас чанарууд



Бүлэг 15

Хугацааны дифференциалчлал

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \int_{0-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt \quad u = e^{-st} \quad v = f(t)$$

$$\frac{du}{dt} = -se^{-st} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{df}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(uv) = \frac{du}{dt}v + u\frac{dv}{dt} \quad uv = \int \frac{du}{dt}v + \int u\frac{dv}{dt} \quad \int \frac{dv}{dt}u = uv - \int v\frac{du}{dt}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = f(t)e^{-st}\Big|_{0-}^{\infty} - \int_{0-}^{\infty} f(t)[-se^{-st}]dt =$$

$$= 0 - f(0^-) + s \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0^-)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-)$$

15.3 Лаплас чанарууд



Бүлэг 15

Хугацааны дифференциалчлалын жишээнүүд:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin \omega t] &= \mathcal{L}\left[-\frac{1}{\omega} \cos \omega t\right]' = -\frac{1}{\omega} [sF(s) - f(0^-)] = \\ &= -\frac{1}{\omega} \left[s \frac{s}{s^2 + \omega^2} - 1\right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos \omega t] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{\omega} \sin \omega t\right]' = \frac{1}{\omega} [sF(s) - f(0^-)] = \\ &= \frac{1}{\omega} \left[s \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - 0\right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

15.3 Лаплас чанарууд



Бүлэг 15

Хугацааны интегралчлал

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \int_{0-}^{\infty} \left[\int_0^t f(x) dx\right] e^{-st} dt$$
$$u = \int_0^t f(x) dx \quad \frac{du}{dt} = f(t)$$
$$\frac{dv}{dt} = e^{-st} \quad v = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

$$\int \frac{dv}{dt} u = uv - \int v \frac{du}{dt}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] &= \left[\int_0^t f(x) dx\right] \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right) \Big|_{0-}^{\infty} - \int_{0-}^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} f(t) dt = \\ &= 0 + \frac{1}{s} \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s} F(s)\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s} F(s)$$

15.3 Лаплас чанарууд



TABLE 15.1 Properties of the Laplace transform.

Property	$f(t)$	$F(s)$	
Linearity	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$	
Scaling	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$	
Time shift	$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as} F(s)$	Time differentiation
Frequency shift	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$	
Time integration	$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{1}{s} F(s)$	$\frac{df}{dt}$ $sF(s) - f(0^-)$
Frequency differentiation	$tf(t)$	$-\frac{d}{ds} F(s)$	$\frac{d^2 f}{dt^2}$ $s^2 F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$
Frequency integration	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s) ds$	$\frac{d^3 f}{dt^3}$ $s^3 F(s) - s^2 f(0^-) - sf'(0^-) - f''(0^-)$
Time periodicity	$f(t) = f(t+nT)$	$\frac{F_1(s)}{1 - e^{-sT}}$	$\frac{d^n f}{dt^n}$ $s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-)$
Initial value	$f(0^+)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$	
Final value	$f(\infty)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$	
Convolution	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s)F_2(s)$	

15

15.4 Урвуу хувиргалт



Лаплас урвуу хувиргалтын үндсэн хэлбэр:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} F(s) e^{st} dt$$

Лаплас урвуу хувиргалтыг олохдоо 7-р слайдад харуулсан хүснэгт болон өмнө слайдад харуулсан чанаруудыг өргөн хэрэглэнэ.

Ингэхдээ аль болох энгийн хэлбэр лүү хөрвүүлэх шаардлагатай.

Жишээ:

$$F(s) = \frac{3}{s} - \frac{5}{s+1} + \frac{6}{s^2+4}$$

Шугаман чанарыг ашиглавал:

$$f(t) = 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - 5\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)$$

16

15.4 Урвуу хувиргалт



Бүлэг 15

TABLE 15.2 Laplace transform pairs.

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s + a}$	$\sin(\omega t + \theta)$	$\frac{s \sin \theta + \omega \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\cos(\omega t + \theta)$	$\frac{s \cos \theta - \omega \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s + a)^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s + a)^{n+1}}$		

17

15.4 Урвуу хувиргалт



Бүлэг 15

$$u(t) \quad \frac{1}{s}$$

$$e^{-at} \quad \frac{1}{s + a}$$

$$\sin \omega t \quad \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$f(t) = 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - 5\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) =$$

$$= 3u(t) - 5e^{-t} + 3\sin 2t \quad t \geq 0$$

18

15.4 Урвуу хувиргалт



Бүлэг 15

Жишээ бодлого: Дараах функцийн урвуу хувиргалтыг ол.

$$F(s) = \frac{s^2 + 12}{s(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

Аливаа функцийг ийм маягаар олон гишүүнтэд задалж болдог .
Үүнийг **Хийвсайд (Heaviside)-ийн теорем** гэнэ. Тэгвэл:

$$A = s F(s) \Big|_{s=0} = \frac{s^2 + 12}{(s+2)(s+3)} \Big|_{s=0} = \frac{12}{(2)(3)} = 2$$

$$B = (s+2) F(s) \Big|_{s=-2} = \frac{s^2 + 12}{s(s+3)} \Big|_{s=-2} = \frac{4+12}{(-2)(1)} = -8$$

$$C = (s+3) F(s) \Big|_{s=-3} = \frac{s^2 + 12}{s(s+2)} \Big|_{s=-3} = \frac{9+12}{(-3)(-1)} = 7$$

15.4 Урвуу хувиргалт



Бүлэг 15

Жишээ бодлого: Үргэлжлэл

$$F(s) = \frac{s^2 + 12}{s(s+2)(s+3)} = \frac{2}{s} - \frac{8}{s+2} + \frac{7}{s+3}$$

$$f(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - 8\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) + 7\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right) =$$

$$= 2u(t) - 8e^{-2t} + 7e^{-3t}$$

Ийнхүү давтамжийн домэйн дах аливаа функцийг Лаплас хүснэгтэд тусгагдсан энгийн функцүүдийн олон гишүүнтэд задалж урвуу лаплас хувиргалтаар хувиргана.

15.5 ЛХ ба хэлхээ



Бүлэг 15

Индукцлэлийн ороомог.

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

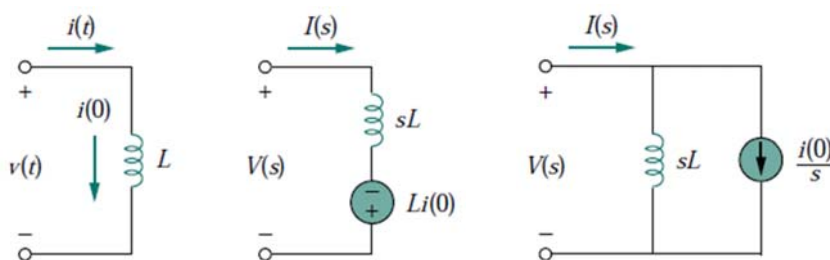
Хугацааны
дифференциалчлалын
чанарыг санавал:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-)$$

$$V(s) = L[sI(s) - i(0^-)] = sLI(s) - \boxed{Li(0^-)} = 0$$

$$I(s) = \frac{1}{sL} V(s) + \frac{i(0^-)}{s}$$

$$\frac{V(s)}{I(s)} = sL = Z(s)$$



21

15.5 ЛХ ба хэлхээ



Бүлэг 15

Конденсатор.

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

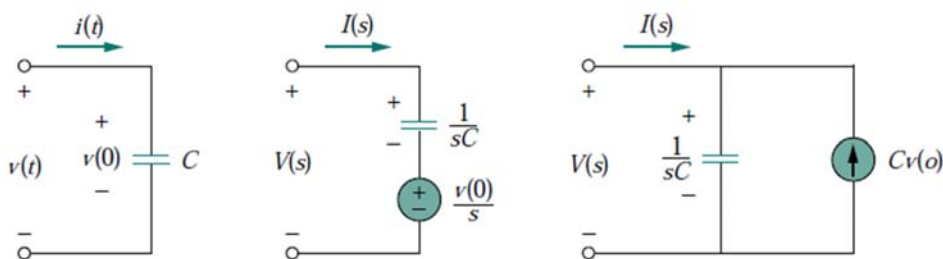
Хугацааны
дифференциалчлалын
чанарыг санавал:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-)$$

$$I(s) = C[sV(s) - v(0^-)] = sCV(s) - Cv(0^-)$$

$$V(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{v(0^-)}{s} = 0$$

$$\frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC} = Z(s)$$



22

15.5 ЛХ ба хэлхээ



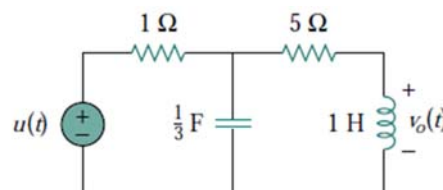
Бүлэг 15

Анхны утгыг тэг гэж үзээд хэлхээний $v_o(t)$ -г тооцоол.

$$u(t) \Rightarrow \frac{1}{s}$$

$$1H \Rightarrow sL = s$$

$$\frac{1}{3}F \Rightarrow \frac{1}{sC} = \frac{3}{s}$$



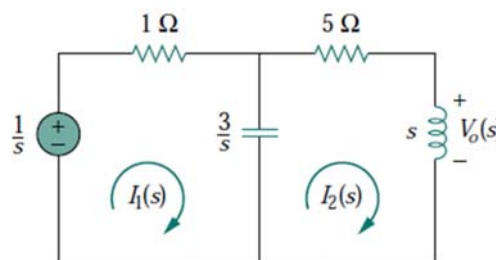
Time domain хэлхээ

Хүрээний арга хэрэглэвэл 1-р хүрээнд:

$$\frac{1}{s} = \left(1 + \frac{3}{s}\right) I_1 - \frac{3}{s} I_2$$

2-р хүрээнд:

$$0 = -\frac{3}{s} I_1 + \left(s + 5 + \frac{3}{s}\right) I_2$$



Frequency domain хэлхээ

15.5 ЛХ ба хэлхээ



Бүлэг 15

Үргэлжлэл.

$$\frac{1}{s} = \left(1 + \frac{3}{s}\right) I_1 - \frac{3}{s} I_2$$

$$0 = -\frac{3}{s} I_1 + \left(s + 5 + \frac{3}{s}\right) I_2$$

$$I_1 = \frac{1}{3}(s^2 + 5s + 3)I_2$$

$$3 = (s^3 + 8s^2 + 18s)I_2 \quad \rightarrow \quad I_2 = \frac{3}{(s^3 + 8s^2 + 18s)}$$

$$V_o(s) = sI_2 = \frac{3}{s^2 + 8s + 18} = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{(s + 4)^2 + (\sqrt{2})^2}$$

Экспоненциал хэмжээслэлт
чанарыг санавал:

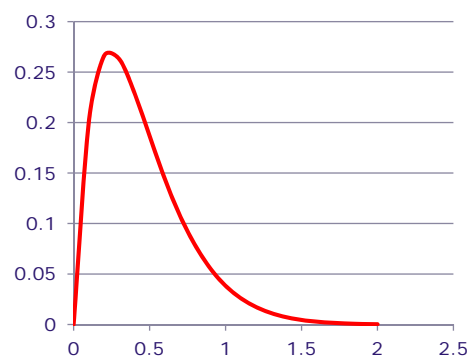
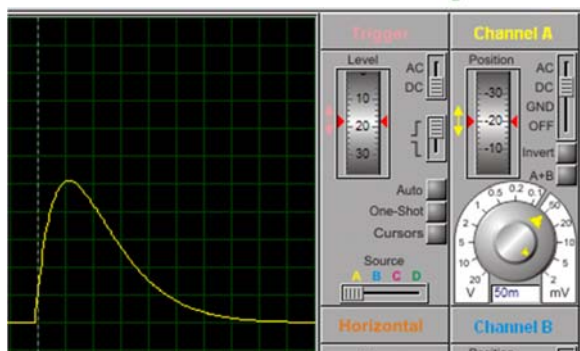
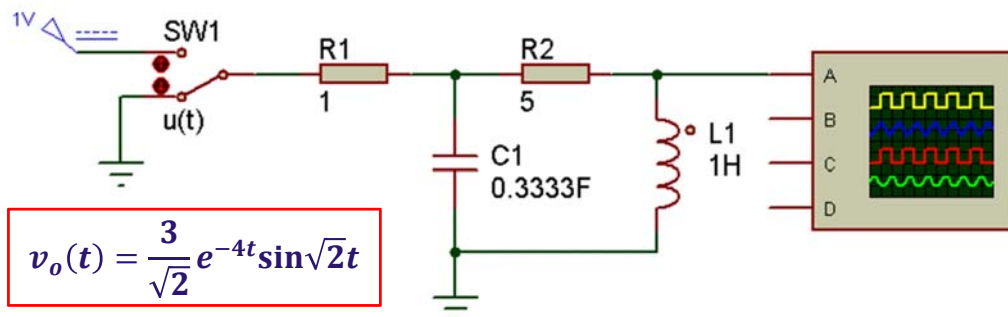
$$\mathcal{L}[e^{-at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

$$v_o(t) = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-4t} \sin \sqrt{2} t$$

15.5 ЛХ ба хэлхээ

Бүлэг 15

Үргэлжлэл.



25

Thank You !

Эзэн хичээвэл заяа хичээнэ.