المتجهات

الكمية القياسية :

هى الكمية التى يكتفى لتعيينها معرفة مقدارها فقط مثل الطول و الزمن والكتلة ودرجة الحرارة ..... الخ
وقد تكون موجبة أو سالبة أو صفر

الكمية الموجهة

هى الكمية التى لا تتعين تماما إلا إذا عرف مقدارها واتجاهها مثل سرعة الجسم

❶ القطعة المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{\text{أ ب}}$

تتحدد تما ما بثلاث عناصر هى ① نقطة البداية ② نقطة النهاية
③ الاتجاه من نقطة البداية الى نقطة النهاية

❷ الشعاع $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ يتحدد ① نقطة البداية ② أى نقطة عليه

❸ القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ تتحدد ① نقطة البداية ② نقطة النهاية

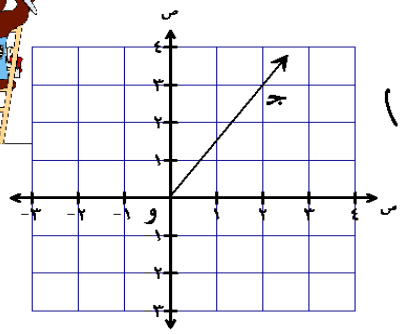
طول القطعة المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ هو البعد بين أ ، ب أى أن طول $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = أ ب

حيث $\overleftarrow{\text{أ ب}} \neq \overleftarrow{\text{ب أ}}$ بينما $\overline{\text{أ ب}} \equiv \overline{\text{ب أ}}$

تكافؤ قطعتين مستقيمتين موجهتين

تتكافأ القطعتان المستقيمتان الموجهتان إذا كان لهما نفس الطول ونفس الاتجاه
بمعنى إذا كانت $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ يكافئ $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ فان أ ب = جـ ء كما أن $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ والعكس غير صحيح

متجه الموضع



إذا كان : جـ (أ ، ب) نقطة فى احداثى متعامد ، و نقطة الأصل (٠ ، ٠)

فان $\overrightarrow{وجـ}$ تسمى متجه الموضع للنقطة جـ

وتكتب بالصورة $\overrightarrow{جـ}$ = (أ ، ب)

متجهات الوحدة الأساسية

$\overrightarrow{س}$ = (١ ، صفر) هو متجه الوحدة فى اتجاه محور السينات

$\overrightarrow{ص}$ = (٠ ، ١) وهو متجه الوحدة فى اتجاه محور الصادات

∴ $\overrightarrow{جـ}$ = (أ ، ب) = أ $\overrightarrow{س}$ + ب $\overrightarrow{ص}$

العمليات على المتجهات

١ جمع وطرح متجهين

مثال [١]

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، ٧) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٠ ، −٤) أوجد ① $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ ② $\overrightarrow{أ}$ − $\overrightarrow{ب}$

❶ $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، ٧) + (٠ ، −٤) = (٣ ، ٣)

$\overrightarrow{أ}$ − $\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، ٧) − (٠ ، −٤) = (٣ ، ٧) + (٠ ، ٤) = (٣ ، ١١)

❷ ضرب عدد حقيقى ك فى متجه $\overrightarrow{أ}$ = (س ، ص)

ك $\overrightarrow{أ}$ = ك (س ، ص) = (ك س ، ك ص)

مثال [٢]

إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ب}$ = (−١ ، ٢) احسب قيمة ٢ $\overleftarrow{أ}$ + ٣ $\overleftarrow{ب}$

∵ $\overleftarrow{أ}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$ = (٣ ، ١)

∴ ٢ $\overleftarrow{أ}$ + ٣ $\overleftarrow{ب}$ = ٢(٣ ، ١) + ٣ (−١ ، ٢)

= (٦ ، ٢) + (−٣ ، ٦) = (٣ ، ٨)

مثال [٣]

إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ = (١ ، ٣) ، $\overleftarrow{ب}$ = $\overleftarrow{ص}$ − ٢ $\overleftarrow{س}$ أوجد

(١) ٢ أ + ٣ $\overleftarrow{ب}$ (٢) $\overleftarrow{ب}$ − $\overleftarrow{أ}$ (٣) ٣ $\overleftarrow{أ}$ − ٤ $\overleftarrow{ب}$

(١) ∵ ٢ أ + ٣ $\overleftarrow{ب}$ = ٢(١ ، ٣) + ٣ (−٢ ، ١) = (٢ ، ٦) + (−٦ ، ٣) = (−٤ ، ٩)

(٢) ∵ $\overleftarrow{ب}$ − $\overleftarrow{أ}$ = (−٢ ، ١) − (١ ، ٣) = (−٢ ، ١) + (−١ ، −٣) = (−٣ ، −٢)

(٣) ∵ ٣ $\overleftarrow{أ}$ − ٤ $\overleftarrow{ب}$ = = ٣ (١ ، ٣) − ٤(−٢ ، ١) = (٣ ، ٩) + (٨ ، −٤) = (١١ ، ٥)

تساوى متجهين

إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = ($س_١$ ، $ص_١$) ، $\overleftarrow{ب}$ = ($س_٢$ ، $ص_٢$) وكان $\overleftarrow{أ}$ = $\overleftarrow{ب}$ فان $س_١$ = $س_٢$ ، $ص_١$ = $ص_٢$

مثال [٤]

احسب قيمة س ، ص التى تجعل س(٢ ، ١) + ص(−١ ، ٢) = (١ ، ٨)

∴ (٢س ، س) + (−ص ، ٢ص) = (١ ، ٨)

∴ ٢س − ص = ١ .....(١) ، س + ٢ص = ٨ .....(٢)

بحل المعادلتين بطريقة الحذف

٤س − ٢ص = ٢

س + ٢ص = ٨

∴ ٥س = ١٠ ∴ س = ٢ ∴ ص = ٣

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى

مثال (٥)

إذا كانت $\overrightarrow{أ}$ = (− ٤ ، − ٧) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، ٦) ، $\overrightarrow{جـ}$ (− ١ ، − ٢) فعبر عن $\overrightarrow{أ}$ بدلالة $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$

الحل

بفرض أن $\overrightarrow{أ}$ = م $\overrightarrow{ب}$ + ك $\overrightarrow{جـ}$

م (٢ ، ٦) + ك (− ١ ، − ٢) = (− ٤ ، − ٧)

∴ (٢م ، ٦م) + (− ك ، − ٢ك) = (− ٤ ، − ٧)

∴ ٢م − ك = − ٤ .....(١) ، ٦م − ٢ك = − ٧ .....(٢)

بحل المعادلتين بطريقة الحذف

٤م − ٢ك = − ٨

٦م − ٢ك = − ٧

∴ − ٢م = − ١ ∴ م = $\frac{١}{٢}$ ∴ ك = ٥

∴ $\overrightarrow{أ}$ = $\frac{١}{٢}$ $\overrightarrow{ب}$ + ٥ $\overrightarrow{جـ}$

التعبير عن القطعة المستقيمة بدلالة نهايتيها

$\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{وب}$ − $\overrightarrow{وأ}$ = $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{أ}$

متجه الوحدة فى اتجاه متجه معلوم

لإيجاد متجه وحدة $\overrightarrow{أ}^*$ فى اتجاه $\overrightarrow{أ}$ يسمى $\overrightarrow{أ}^*$ = $\frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|}$ حيث $\|\overrightarrow{أ}^*\|$ = ١

مثال [٦]

إذا كانت $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = (٢ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{جـ} = ٤\overrightarrow{س}$

أوجد $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{بجـ}$ ، $\overrightarrow{أجـ}$

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (٢ ، ٥) - (١ ، -٣) = (٢ ، ٥) + (-١ ، ٣) = (١ ، ٨)$

$\overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{ب} = (٤ ، ٠) - (٢ ، ٥) = (٤ ، ٠) + (-٢ ، -٥) = (٢ ، -٥)$

$\overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{أ} = (٤ ، ٠) - (١ ، -٣) = (٤ ، ٠) + (-١ ، ٣) = (٣ ، ٣)$

معيار المتجه $\overrightarrow{أ}$

معيار المتجه $\overrightarrow{أ} = (س ، ص)$ هو $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$

مثال [٧]

إذا كانت $\overrightarrow{أ} = (-٣ ، ٤)$ ، $\overrightarrow{ب} = ٥\overrightarrow{س} + ١٢\overrightarrow{ص}$ أوجد ❶ $\|\overrightarrow{أ}\|$ ❷ $\|\overrightarrow{ب}\|$

$\because \|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{(-٣)^٢ + (٤)^٢} = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$

$\because \|\overrightarrow{ب}\| = \sqrt{(٥)^٢ + (١٢)^٢} = \sqrt{٢٥ + ١٤٤} = \sqrt{١٦٩} = ١٣$

مثال [٨]

إذا كانت $\overrightarrow{أ} = ٢\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٣ ، ١)$

احسب قيمة ❶ $\|٢\overrightarrow{أ} - ٣\overrightarrow{ب}\|$ ❷ $\|\overrightarrow{أب}\|$

$\because ٢\overrightarrow{أ} - ٣\overrightarrow{ب} = ٢(٢ ، ٣) - ٣(-٣ ، ١)$

$= (٤ ، ٦) + (٩ ، -٣) = (١٣ ، ٣)$

$\therefore \|٢\overrightarrow{أ} - ٣\overrightarrow{ب}\| = \sqrt{(١٣)^٢ + (٣)^٢} = \sqrt{١٦٩ + ٩} = \sqrt{١٧٨}$

$\overrightarrow{أب} = ب - أ = (-٣ ، ١) - (٢ ، ٣) = (-٥ ، -٢)$

$\therefore \|\overrightarrow{أب}\| = \sqrt{(-٥)^٢ + (-٢)^٢} = \sqrt{٢٥ + ٤} = \sqrt{٢٩}$

مثال [٩]

إذا كان : $\overrightarrow{أ} = ٢\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = (٠ ، -٣)$

أوجد ❶ $\overrightarrow{أ}$ ❷ $\|\overrightarrow{أ}\|$ ❸ $\overrightarrow{ب}$ ❹ $\|\overrightarrow{ب}\|$

$$\overrightarrow{أ}^* = \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|} = \frac{(٢ ، -٣)}{\sqrt{(٢)^٢ + (-٣)^٢}} = \frac{(٢ ، -٣)}{\sqrt{٤ + ٩}} = \left(\frac{٢}{\sqrt{١٣}} ، \frac{-٣}{\sqrt{١٣}}\right)$$

$$\|\overrightarrow{أ}^*\| = \sqrt{\left(\frac{٢}{\sqrt{١٣}}\right)^٢ + \left(\frac{-٣}{\sqrt{١٣}}\right)^٢} = \sqrt{\frac{٤}{١٣} + \frac{٩}{١٣}} = \sqrt{\frac{١٣}{١٣}} = \sqrt{١} = ١$$

$$\overrightarrow{ب}^* = \frac{\overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{ب}\|} = \frac{(٠ ، -٣)}{\sqrt{٠ + (-٣)^٢}} = \frac{(٠ ، -٣)}{\sqrt{٩}} = \frac{(٠ ، -٣)}{٣} = (٠ ، -١) = -\overrightarrow{ص}$$

❹ $\|\overrightarrow{ب}^*\| = \sqrt{٠ + ١} = ١$

مثال [١٠]

احسب قيمة ك إذا كان ❶ $ك\|-٣\overrightarrow{أ}\| = \|١٢\overrightarrow{أ}\|$ ❷ $\|-٤ك\overrightarrow{أ}\| = \|-١٢\overrightarrow{أ}\|$

الحل

$\because ك\|-٣\overrightarrow{أ}\| = \|١٢\overrightarrow{أ}\|$ $\therefore ٣ك\|\overrightarrow{أ}\| = ١٢\|\overrightarrow{أ}\|$

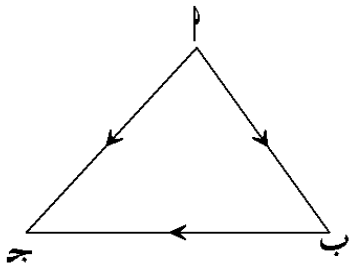
$\therefore ٣ك = ١٢$ $\therefore ك = \frac{١٢}{٣} = ٤$

❷ $\|-٤ك\overrightarrow{أ}\| = \|-١٢\overrightarrow{أ}\|$ $\therefore ٤|ك| \times \|\overrightarrow{أ}\| = ١٢ \times \|\overrightarrow{أ}\|$

$\therefore ٤|ك| = ١٢$ $\therefore |ك| = \frac{١٢}{٤} = ٣$ $\therefore ك = \pm ٣$

❶ التمثيل لهندسى لجمع متجهين

$\overleftarrow{\text{م ب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}} = \overleftarrow{\text{م جـ}}$

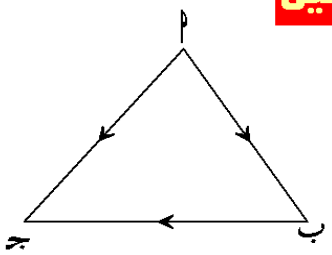


هذه القاعدة تسمى قاعدة إغلاق المثلث لجمع متجهين

ولا تعتمد على اختيار النقطة الابتدائية م

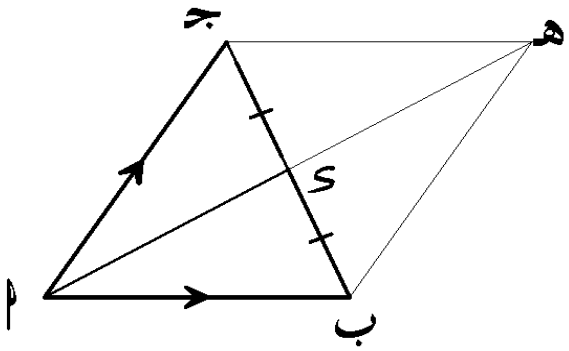
وأيضا $\overleftarrow{\text{م ب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}} + \overleftarrow{\text{جـ م}} = \overleftarrow{\text{و}}$

❷ التمثيل الهندسى للفرق بين متجهين



$\overleftarrow{\text{م ب}} - \overleftarrow{\text{م جـ}} = \overleftarrow{\text{جـ ب}}$

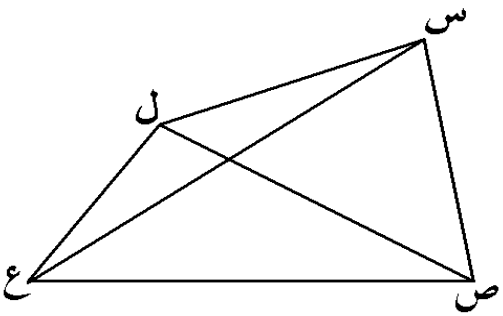
❸ قاعدة متوازى الأضلاع



$\overleftarrow{\text{م ب}} + \overleftarrow{\text{م جـ}} = ٢ \overleftarrow{\text{م ء}}$

مثال [١]

فى أى شكل رباعى س ص ع ل اثبت أن : $\overleftarrow{\text{ل ص}} - \overleftarrow{\text{س ع}} = \overleftarrow{\text{ل س}} - \overleftarrow{\text{ص ع}}$



∵ فى Δ ل س ع :

∵ $\overleftarrow{\text{ل س}} + \overleftarrow{\text{س ع}} = \overleftarrow{\text{ل ع}}$ ..... ❶

فى Δ ل ص ع :

$\overleftarrow{\text{ل ص}} + \overleftarrow{\text{ص ع}} = \overleftarrow{\text{ل ع}}$ ..... ❷

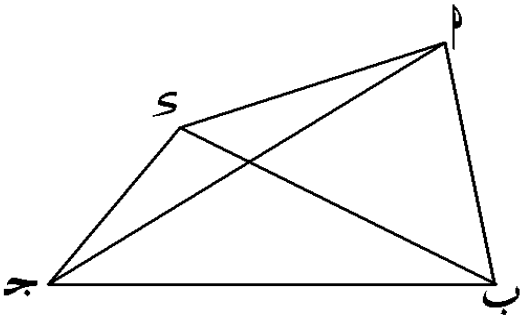
∴ $\overleftarrow{\text{ل س}} + \overleftarrow{\text{س ع}} = \overleftarrow{\text{ل س}} + \overleftarrow{\text{س ع}}$

∴ $\overleftarrow{\text{ل ص}} - \overleftarrow{\text{س ع}} = \overleftarrow{\text{ل س}} - \overleftarrow{\text{ص ع}}$

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى

مثال [٢]

فى أى شكل رباعى م ب جـ ء اثبت أن : $\overrightarrow{\text{م جـ}} - \overrightarrow{\text{ء ب}} = \overrightarrow{\text{ب جـ}} - \overrightarrow{\text{ء م}}$



فى Δ ء ب جـ :

∵ $\overrightarrow{\text{ء ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{\text{ء جـ}}$

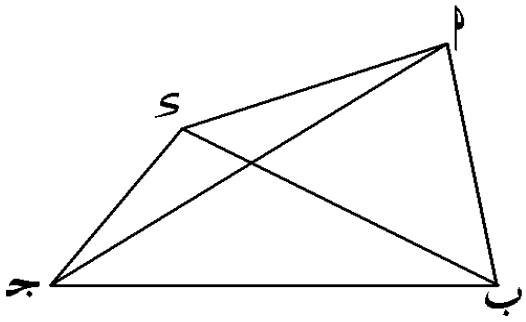
فى Δ م جـ ء : ∵ $\overrightarrow{\text{ء م}} + \overrightarrow{\text{م جـ}} = \overrightarrow{\text{ء جـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ء ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{\text{ء م}} + \overrightarrow{\text{م جـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ب جـ}} - \overrightarrow{\text{ء م}} = \overrightarrow{\text{م جـ}} - \overrightarrow{\text{ب ء}}$

مثال [٣]

فى أى شكل رباعى م ب جـ ء اثبت أن : $\overrightarrow{\text{م جـ}} - \overrightarrow{\text{ء جـ}} + \overrightarrow{\text{ب م}} = \overrightarrow{\text{ب ء}}$



فى Δ م ب جـ :

∴ $\overrightarrow{\text{ب م}} + \overrightarrow{\text{م جـ}} = \overrightarrow{\text{ب جـ}}$

فى Δ ب ء جـ :

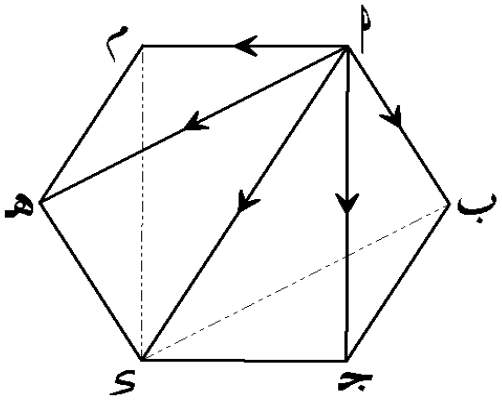
∵ $\overrightarrow{\text{ب ء}} + \overrightarrow{\text{ء جـ}} = \overrightarrow{\text{ب جـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ب م}} + \overrightarrow{\text{م جـ}} = \overrightarrow{\text{ب ء}} + \overrightarrow{\text{ء جـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{م جـ}} - \overrightarrow{\text{ء جـ}} + \overrightarrow{\text{ب م}} = \overrightarrow{\text{ب ء}}$

مثال [٤]

م ب جـ ء هـ م مسدس منتظم اثبت أن : $\overrightarrow{\text{م ب}} + \overrightarrow{\text{م جـ}} + \overrightarrow{\text{م هـ}} + \overrightarrow{\text{م م}} = ٢\,\overrightarrow{\text{م ء}}$



∵ الشكل م ب ء هـ مستطيل من خواص المسدس

∵ $\overrightarrow{\text{م ب}} + \overrightarrow{\text{م هـ}} = \overrightarrow{\text{م ء}}$

∵ الشكل م جـ ء م مستطيل

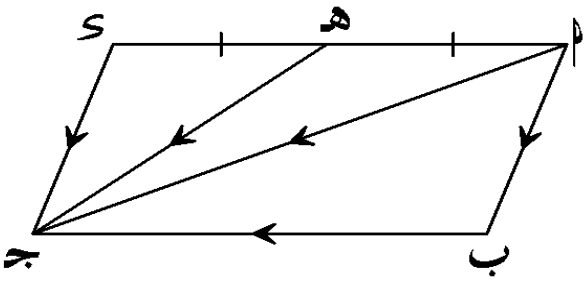
∴ $\overrightarrow{\text{م جـ}} + \overrightarrow{\text{م م}} = \overrightarrow{\text{م ء}}$

وبجمع ❶ ، ❷

∴ $\overrightarrow{\text{م ب}} + \overrightarrow{\text{م جـ}} + \overrightarrow{\text{م هـ}} + \overrightarrow{\text{م م}} = ٢\,\overrightarrow{\text{م ء}}$

مثال (٥)

أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه هـ منتصف $\overline{أ ء}$ اثبت أن : $\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب جـ} + \overrightarrow{ء جـ} = ٢ \overrightarrow{هـ جـ}$



فى Δ أ ب جـ

∵ $\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب جـ} = \overrightarrow{أ جـ}$ باضافة $\overrightarrow{ء جـ}$ للطرفين

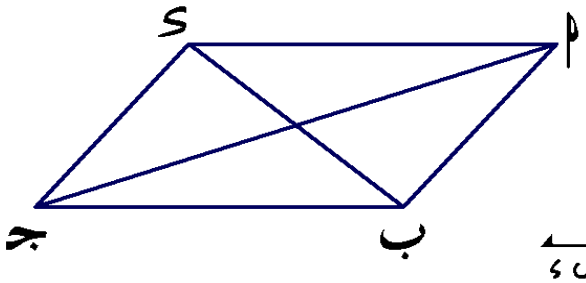
∴ $\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب جـ} + \overrightarrow{ء جـ} = \overrightarrow{أ جـ} + \overrightarrow{ء جـ}$

∵ $\overrightarrow{أ جـ} + \overrightarrow{ء جـ} = ٢ \overrightarrow{هـ جـ}$

∴ $\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب جـ} + \overrightarrow{ء جـ} = ٢ \overrightarrow{هـ جـ}$

مثال (٦)

أ ب جـ ء متوازى أضلاع . اثبت أن : $\overrightarrow{أ جـ} + \overrightarrow{ب ء} = ٢ \overrightarrow{أ ء}$



∵ فى Δ أ ب جـ :

∴ $\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب جـ} = \overrightarrow{أ جـ}$ .....(١)

∵ فى Δ أ ب ء :

∴ $\overrightarrow{ب أ} + \overrightarrow{أ ء} = \overrightarrow{ب ء}$ .....(٢) بالجمع

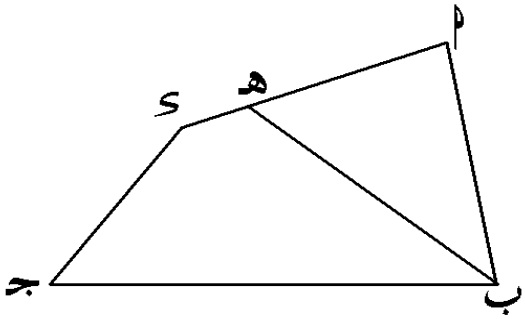
∴ $\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب جـ} + \overrightarrow{ب أ} + \overrightarrow{أ ء} = \overrightarrow{أ جـ} + \overrightarrow{ب ء}$

∵ $\overrightarrow{ب جـ} = \overrightarrow{أ ء}$ ∵ $\overrightarrow{ب أ} = - \overrightarrow{أ ب}$

∴ $٢ \overrightarrow{أ ء} = \overrightarrow{أ جـ} + \overrightarrow{ب ء}$

مثال (٧)

فى أى شكل رباعى أ ب جـ ء ، هـ ∈ $\overline{ب جـ}$ اثبت أن : $\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب هـ} - \overrightarrow{أ ء} = \overrightarrow{ء هـ}$



فى Δ أ ب هـ :

∴ $\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب هـ} = \overrightarrow{أ هـ}$ ..... (١)

∵ $\overrightarrow{أ ء} = \overrightarrow{أ هـ} + \overrightarrow{هـ ء}$ ..... (٢) من (١) ، (٢)

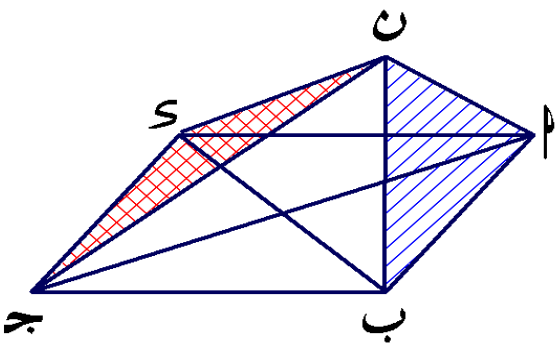
∴ $\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب هـ} - \overrightarrow{أ ء} = \overrightarrow{أ هـ} - (\overrightarrow{أ هـ} + \overrightarrow{هـ ء})$

∴ $= \overrightarrow{أ هـ} - \overrightarrow{أ هـ} - \overrightarrow{هـ ء} = \overrightarrow{ء هـ}$

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى

مثال [٨]

أ ب جـ ء متوازى أضلاع ، هـ أى نقطة فى مستواه اثبت أن : $\overrightarrow{\text{هـ أ}} + \overrightarrow{\text{هـ جـ}} = \overrightarrow{\text{هـ ب}} + \overrightarrow{\text{هـ ء}}$



∵ فى Δ أ هـ ب : ∵ $\overrightarrow{\text{هـ أ}} + \overrightarrow{\text{أ ب}} = \overrightarrow{\text{هـ ب}}$

∵ فى Δ هـ جـ ء : $\overrightarrow{\text{هـ جـ}} + \overrightarrow{\text{جـ ء}} = \overrightarrow{\text{هـ ء}}$ بالجمع

∴ $\overrightarrow{\text{هـ أ}} + \overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{هـ جـ}} + \overrightarrow{\text{جـ ء}} = \overrightarrow{\text{هـ ب}} + \overrightarrow{\text{هـ ء}}$

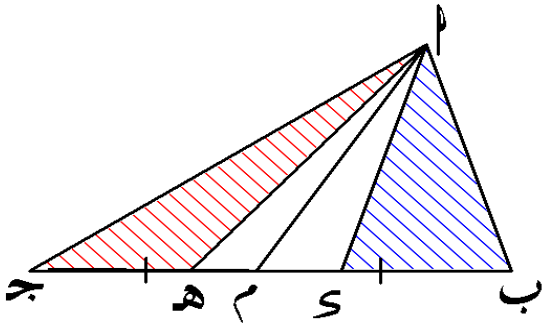
∵ $\overrightarrow{\text{أ ب}} = -\overrightarrow{\text{جـ ء}}$

∴ $\overrightarrow{\text{هـ أ}} + \overrightarrow{\text{هـ جـ}} = \overrightarrow{\text{هـ ب}} + \overrightarrow{\text{هـ ء}}$

مثال [٩]

فى Δ أ ب جـ : م منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ء ∈ $\overline{\text{ب م}}$ ، هـ ∈ $\overline{\text{م جـ}}$ اثبت أن :

$\overrightarrow{\text{أ ء}} + \overrightarrow{\text{ء ب}} + \overrightarrow{\text{أ هـ}} + \overrightarrow{\text{هـ جـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{أ م}}$



∵ فى Δ أ ء ب :

∵ $\overrightarrow{\text{أ ء}} + \overrightarrow{\text{ء ب}} = \overrightarrow{\text{أ ب}}$ .....(١)

∵ فى Δ أ هـ جـ :

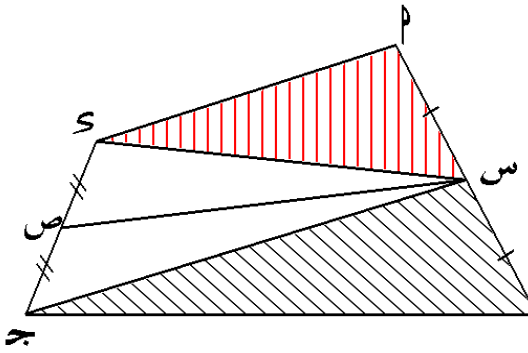
∵ $(\overrightarrow{\text{أ هـ}} + \overrightarrow{\text{هـ جـ}}) = \overrightarrow{\text{أ جـ}}$ .....(٢) بالجمع

$(\overrightarrow{\text{أ ء}} + \overrightarrow{\text{ء ب}}) + (\overrightarrow{\text{أ هـ}} + \overrightarrow{\text{هـ جـ}}) = \overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ جـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ جـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{أ م}}$

مثال [١٠]

أ ب جـ ء شكل رباعى فيه س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{جـ ء}}$ اثبت أن : $\overrightarrow{\text{أ ء}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{س ص}}$



∵ فى Δ أ س ء :

$\overrightarrow{\text{أ س}} + \overrightarrow{\text{س ء}} = \overrightarrow{\text{أ ء}}$ .....(١)

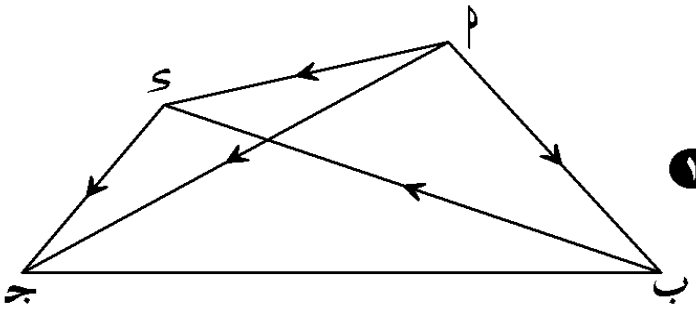
∵ فى Δ ب س جـ : ∵ $\overrightarrow{\text{ب س}} + \overrightarrow{\text{س جـ}} = \overrightarrow{\text{ب جـ}}$ .....(٢)

، $\overrightarrow{\text{ب س}} = -\overrightarrow{\text{أ س}}$ بالجمع

∴ $\overrightarrow{\text{س جـ}} + \overrightarrow{\text{س ء}} = \overrightarrow{\text{أ ء}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{س ص}}$

مثال [١١]

أ ب جـ ء شكل رباعى فيه ٢ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ اثبت أن : ٢ $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ = ٥ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$



فى Δ أ جـ ء :

∵ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ + $\overleftarrow{\text{ء جـ}}$ = $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$

∴ ٢ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ء جـ}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ .....❶

فى Δ ب جـ ء :

$\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ + $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ = $\overleftarrow{\text{ب ء}}$

∴ ٢ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ .....❷ بجمع ❶ ، ❷

∴ ٢ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ء جـ}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ب ء}}$

$\overleftarrow{\text{ء جـ}}$ = − $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ ∴ ٢ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ء جـ}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ − ٢ $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$

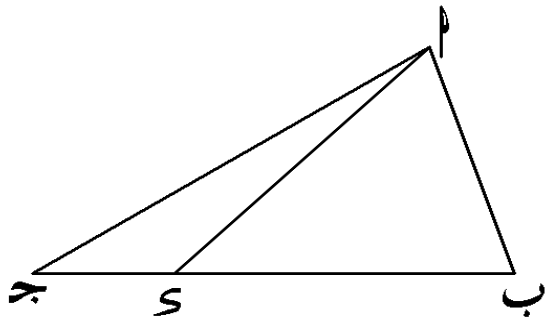
∴ ٢ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ب ء}}$

∵ ٢ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ∴ ٢ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ = ٥ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$

∴ ٢ $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ = ٥ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$

مثال [١٢]

أ ب جـ مثلث ، ء ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ بحيث $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{ء جـ}}$ اثبت أن : $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$



∵ فى Δ أ ب ء :

$\overleftarrow{\text{ب أ}}$ + $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ = $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ .....❶

∵ فى Δ أ ء جـ :

$\overleftarrow{\text{ء أ}}$ + $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ = $\overleftarrow{\text{ء جـ}}$ بضرب الطرفين فى ٣

∴ ٣ $\overleftarrow{\text{ء أ}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{ء جـ}}$ = $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ .....❷

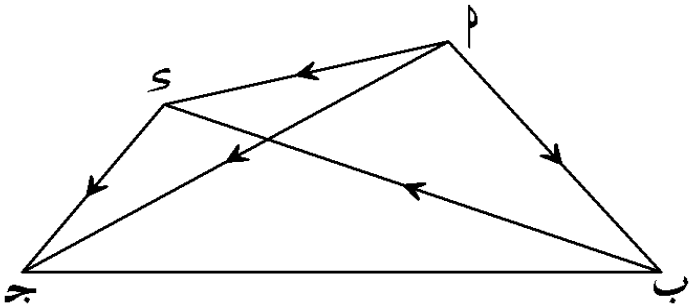
∵ $\overleftarrow{\text{ء أ}}$ = − $\overleftarrow{\text{أ ء}}$

∴ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ + $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ = − ٣ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$

∴ ٤ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ = − $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ = $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$

مثال [١٣]

أ ب جـ ء شكل رباعى فيه ٢ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ اثبت أن : ٢ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ − ٢ $\overrightarrow{\text{ء جـ}}$ = $\overrightarrow{\text{ء أ}}$



∵ فى Δ أ ب ء :

$\overrightarrow{\text{أ ء}}$ + $\overrightarrow{\text{ء ب}}$ = $\overrightarrow{\text{أ ب}}$

٢ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{ء ب}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ .....(١)

∵ فى Δ ء ب جـ :

$\overrightarrow{\text{ء ب}}$ + $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = $\overrightarrow{\text{ء جـ}}$

∴ ٢ $\overrightarrow{\text{ء جـ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{ء ب}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ .....(٢)

بطرح (٢) من (١)

∴ ٢ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{ء ب}}$ − ٢ $\overrightarrow{\text{ء ب}}$ − ٢ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ − ٢ $\overrightarrow{\text{ء جـ}}$

∴ ٢ $\overrightarrow{\text{أ}}$ − ٢ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ − ٢ $\overrightarrow{\text{ء جـ}}$

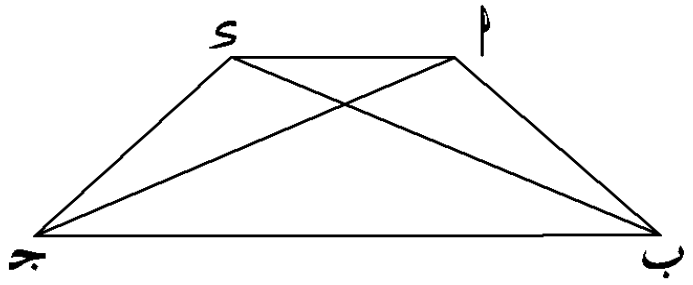
∵ ٢ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$

∴ ٢ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ − ٣ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ − ٢ $\overrightarrow{\text{ء جـ}}$ = − $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ = $\overrightarrow{\text{ء أ}}$

∴ ٢ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ − ٢ $\overrightarrow{\text{ء جـ}}$ = $\overrightarrow{\text{ء أ}}$

مثال [١٤]

أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{أ ء}}$ ، ب جـ = ٢ أ ء اثبت أن : ٢ $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$



∵ فى Δ أ ب جـ

∵ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ + $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$

٢ $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ .....(١)

∵ فى Δ أ ب ء :

∴ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ + $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ = $\overrightarrow{\text{ب ء}}$

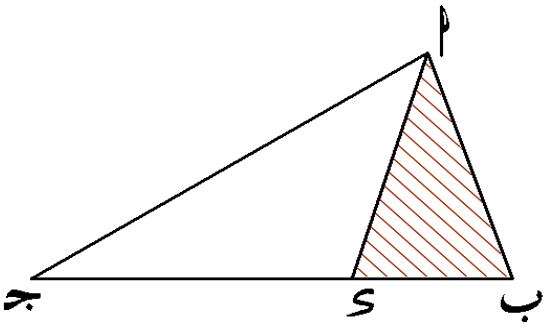
٢ $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ .....(٢) بالجمع

∴ ٢ $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ + ٢ × $\frac{١}{٢}$ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى

مثال [١٥]

أ ب جـ مثلث فيه ء ∈ $\overline{ب جـ}$ بحيث $\frac{ب ء}{ء جـ} = \frac{٥}{٨}$ اثبت أن : ١٣ $\overrightarrow{أ ء}$ = ٨ $\overrightarrow{أ ب}$ + ٥ $\overrightarrow{أ جـ}$



فى Δ أ ء جـ :

∵ $\overrightarrow{ء جـ}$ = $\overrightarrow{ء أ}$ + $\overrightarrow{أ جـ}$

∴ ٥ $\overrightarrow{ء جـ}$ = ٥ $\overrightarrow{ء أ}$ + ٥ $\overrightarrow{أ جـ}$ ..... (١)

فى Δ أ ب ء :

∵ $\overrightarrow{ب ء}$ = $\overrightarrow{ب أ}$ + $\overrightarrow{أ ء}$

∴ ٨ $\overrightarrow{ب ء}$ = ٨ $\overrightarrow{ب أ}$ + ٨ $\overrightarrow{أ ء}$ ..... (٢)

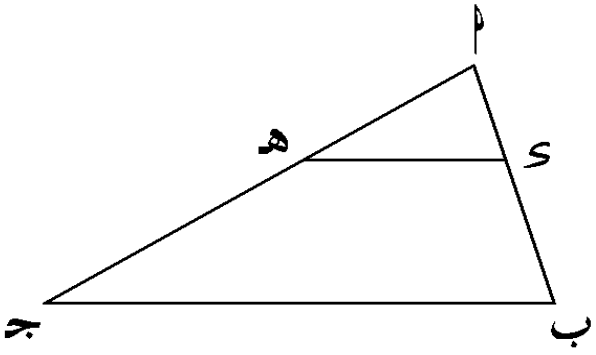
∵ $\frac{ب ء}{ء جـ} = \frac{٥}{٨}$ ∴ ٥ $\overrightarrow{ء جـ}$ = ٨ $\overrightarrow{ب ء}$

∴ ٥ $\overrightarrow{ء أ}$ + ٥ $\overrightarrow{أ جـ}$ = ٨ $\overrightarrow{ب أ}$ + ٨ $\overrightarrow{أ ء}$ ∴ ٥ $\overrightarrow{أ جـ}$ + ٨ $\overrightarrow{أ ب}$ = ١٣ $\overrightarrow{أ ء}$

مثال [١٦]

أ ب جـ Δ ، ء ∈ $\overline{أ ب}$ ، هـ ∈ $\overline{أ جـ}$ بحيث أن : $\frac{أ ء}{ء ب} = \frac{أ هـ}{هـ جـ} = \frac{٢}{٣}$ اثبت أن : ٢ $\overrightarrow{جـ ب}$ = ٥ $\overrightarrow{هـ ء}$

∵ $\frac{أ ء}{ء ب} = \frac{٢}{٣}$ ∴ $\frac{أ ء}{أ ب} = \frac{٢}{٥}$ ∴ $\overrightarrow{أ ء}$ = $\frac{٢}{٥}$ $\overrightarrow{أ ب}$



بالمثل ∵ $\frac{أ هـ}{هـ جـ} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{أ هـ}{أ جـ} = \frac{٢}{٥}$ $\overrightarrow{أ هـ}$ = $\frac{٢}{٥}$ $\overrightarrow{أ جـ}$ بالطرح

∴ $\overrightarrow{أ ء}$ − $\overrightarrow{أ هـ}$ = $\frac{٢}{٥}$ ($\overrightarrow{أ ب}$ − $\overrightarrow{أ جـ}$)

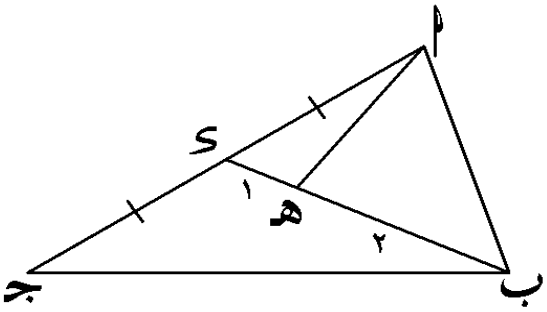
∴ $\overrightarrow{ء هـ}$ = $\frac{٢}{٥}$ $\overrightarrow{ب جـ}$ ∴ $\overrightarrow{هـ ء}$ = $\frac{٢}{٥}$ $\overrightarrow{جـ ب}$

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى

مثال [١٧]

أ ب جـ Δ ، ب ء متوسط ، هـ ∈ $\overline{ب ء}$ اثبت أن :

❶ $\overrightarrow{ب جـ} - \overrightarrow{أ ب} = ٢ \overrightarrow{ب ء}$ ❷ $٢ \overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب جـ} = ٣ \overrightarrow{أ هـ}$



∵ فى Δ ب ء جـ :

∴ $\overrightarrow{ب جـ} + \overrightarrow{جـ ء} = \overrightarrow{ب ء}$

∴ $\overrightarrow{ب جـ} + \frac{١}{٢} \overrightarrow{جـ أ} = \overrightarrow{ب ء}$ بالضرب × ٢ للطرفين

∴ $٢ \overrightarrow{ب جـ} + \overrightarrow{جـ أ} = ٢ \overrightarrow{ب ء}$

∵ $\overrightarrow{جـ أ} = \overrightarrow{جـ ب} + \overrightarrow{ب أ}$

∴ $٢ \overrightarrow{ب جـ} + \overrightarrow{جـ ب} + \overrightarrow{ب أ} = ٢ \overrightarrow{ب ء}$

∵ $\overrightarrow{جـ ب} = - \overrightarrow{ب جـ}$ ،

∵ $\overrightarrow{ب أ} = - \overrightarrow{أ ب}$

∴ $٢ \overrightarrow{ب جـ} - \overrightarrow{ب جـ} - \overrightarrow{أ ب} = ٢ \overrightarrow{ب ء}$

∴ $\overrightarrow{ب جـ} - \overrightarrow{أ ب} = ٢ \overrightarrow{ب ء}$ .....❶

∵ فى Δ أ ب هـ ∵ $\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب هـ}$

∴ $\overrightarrow{أ ب} + \frac{٢}{٣} \overrightarrow{ب ء} = \overrightarrow{أ هـ}$ بالضرب × ٣ للطرفين

∴ $٣ \overrightarrow{أ ب} + ٢ \overrightarrow{ب ء} = ٣ \overrightarrow{أ هـ}$

∵ $٢ \overrightarrow{ب ء} = \overrightarrow{ب جـ} - \overrightarrow{أ ب}$

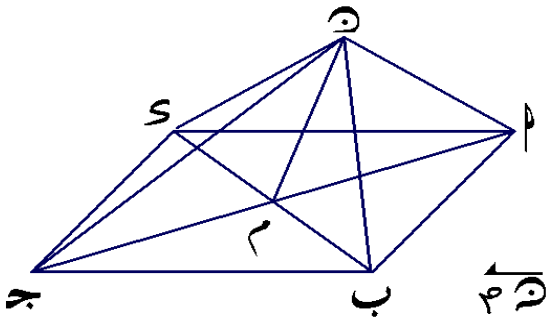
∴ $٣ \overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب جـ} - \overrightarrow{أ ب} = ٣ \overrightarrow{أ هـ}$

∴ $٢ \overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب جـ} = ٣ \overrightarrow{أ هـ}$

مثال [١٨]

متوازى أضلاع أ ب جـ ء تقاطع قطراه فى م ، فإذا كان ن نقطة خارجة عنه

اثبت أن : $\overrightarrow{ن أ} + \overrightarrow{ن ب} + \overrightarrow{ن جـ} + \overrightarrow{ن ء} = ٤ \overrightarrow{ن م}$



فى Δ ن أ جـ :

∵ $\overrightarrow{ن أ} + \overrightarrow{ن جـ} = ٢ \overrightarrow{ن م}$ .....❶

∵ فى Δ ن ب ء :

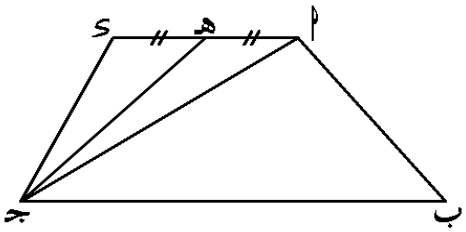
∵ $\overrightarrow{ن ب} + \overrightarrow{ن ء} = ٢ \overrightarrow{ن م}$ .....❷ بالجمع

∴ $(\overrightarrow{ن أ} + \overrightarrow{ن جـ}) + (\overrightarrow{ن ب} + \overrightarrow{ن ء}) = ٢ \overrightarrow{ن م} + ٢ \overrightarrow{ن م}$

مثال [١٩]

أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{أ ء}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أ ء}}$

اثبت أن : ❶ $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} + \overrightarrow{\text{جـ ء}} = \overrightarrow{\text{أ ء}}$ ❷ $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} + \overrightarrow{\text{ء جـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{هـ جـ}}$



❶ ∵ فى Δ أ ب جـ

∵ $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{\text{أ جـ}}$ ∴ بإضافة $\overrightarrow{\text{جـ ء}}$ للطرفين

∴ $(\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}}) + \overrightarrow{\text{جـ ء}} = \overrightarrow{\text{أ جـ}} + \overrightarrow{\text{جـ ء}} = \overrightarrow{\text{أ ء}}$

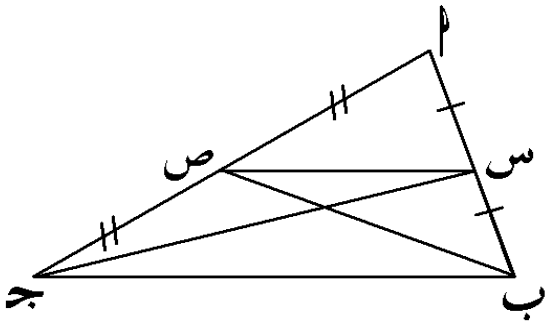
فى Δ أ ب جـ :

∵ $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{\text{أ جـ}}$ ∴ بإضافة $\overrightarrow{\text{ء جـ}}$ للطرفين

❷ ∴ $(\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}}) + \overrightarrow{\text{ء جـ}} = \overrightarrow{\text{أ جـ}} + \overrightarrow{\text{ء جـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{هـ جـ}}$

مثال [٢٠]

أ ب جـ Δ فيه س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ اثبت أن : $\overrightarrow{\text{أ ص}} + \overrightarrow{\text{جـ س}} = \overrightarrow{\text{ص ب}} + \overrightarrow{\text{س أ}}$



$٢\,\overrightarrow{\text{أ ص}} + \overrightarrow{\text{جـ س}} = \overrightarrow{\text{أ س}}$ .....❶

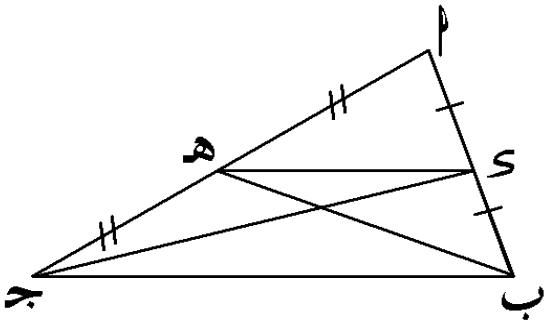
، $\overrightarrow{\text{أ ص}} + \overrightarrow{\text{ص ب}} = ٢\,\overrightarrow{\text{أ س}}$ .....❷ بطرح ❶ من ❷

∴ $\overrightarrow{\text{أ ص}} + \overrightarrow{\text{جـ س}} - \overrightarrow{\text{ص ب}} = -\overrightarrow{\text{أ س}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أ ص}} + \overrightarrow{\text{جـ س}} = \overrightarrow{\text{ص ب}} + \overrightarrow{\text{س أ}}$

مثال [٢١]

أ ب جـ مثلث ، ء منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أجـ}$ اثبت أن : $\overrightarrow{بهـ} + \overrightarrow{ءجـ} = \frac{٣}{٢} \overrightarrow{بجـ}$



∵ فى Δ أ ب جـ : ∵ ء منتصف $\overline{أب}$

∴ $\overrightarrow{بجـ} + \overrightarrow{أجـ} = ٢\overrightarrow{ءجـ}$ .....(١)

∵ هـ منتصف $\overline{أهـ}$

∴ $\overrightarrow{بأ} + \overrightarrow{بجـ} = ٢\overrightarrow{بهـ}$ .....(٢) بالجمع

∴ $٢\overrightarrow{ءجـ} + ٢\overrightarrow{بهـ} = \overrightarrow{بجـ} + \overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{بأ} + \overrightarrow{بجـ}$

∴ $٢\overrightarrow{ءجـ} + ٢\overrightarrow{بهـ} = \overrightarrow{بأ} + \overrightarrow{أجـ} + ٢\overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{بجـ} + ٢\overrightarrow{بجـ}$

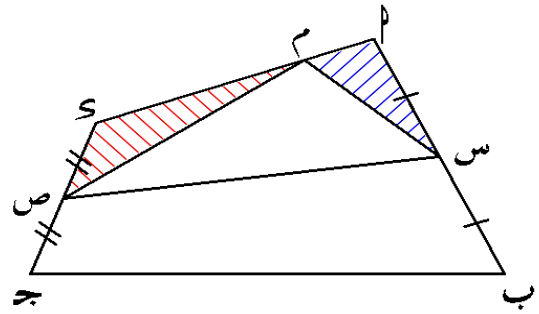
∴ $٢\overrightarrow{ءجـ} + ٢\overrightarrow{بهـ} = \overrightarrow{بجـ} + ٢\overrightarrow{بجـ} = ٣\overrightarrow{بجـ}$ بالقسمة ÷ ٢ للطرفين

∴ $\overrightarrow{بهـ} + \overrightarrow{ءجـ} = \frac{٣}{٢} \overrightarrow{بجـ}$

مثال [٢٢]

أ ب جـ ء شبه رباعى فيه س منتصف $\overline{أب}$ ، ص منتصف $\overline{جـء}$ ، م ∈ $\overline{أء}$

اثبت أن : $\overrightarrow{جـء} + ٢\overrightarrow{ءأ} + \overrightarrow{أب} = ٢\overrightarrow{صس}$



فى Δ أ س م : ∵ $\overrightarrow{مأ} + \overrightarrow{أس} = \overrightarrow{مس}$

∴ $٢\overrightarrow{مأ} + ٢\overrightarrow{أس} = ٢\overrightarrow{مس}$

∵ فى Δ م ء ص : $\overrightarrow{صء} + \overrightarrow{ءم} = \overrightarrow{صم}$

∴ $٢\overrightarrow{صء} + ٢\overrightarrow{ءم} = ٢\overrightarrow{صم}$

∵ $\overrightarrow{جـء} = ٢\overrightarrow{صء}$ .....(٣)

$\overrightarrow{ءأ} = \overrightarrow{ءم} + \overrightarrow{مأ}$ .....(٤) بالتعويض فى الطرف الأيمن

الأيمن = $\overrightarrow{جـء} + ٢\overrightarrow{ءأ} + \overrightarrow{أب} = ٢\overrightarrow{صء} + ٢(\overrightarrow{ءم} + \overrightarrow{مأ}) + ٢\overrightarrow{أس}$

$= (٢\overrightarrow{صء} + ٢\overrightarrow{ءم}) + (٢\overrightarrow{مأ} + ٢\overrightarrow{أس})$

$= ٢\overrightarrow{صم} + ٢\overrightarrow{مس} = ٢\overrightarrow{صس}$

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى