



المملكة العربية السعودية
وزارة التعليم العالي
جامعة أم القرى
كلية التربية للبنات بمكة المكرمة / الأقسام العلمية
الدراسات العليا
قسم الرياضيات

نماذج المخزون السلعي الاحتمالي وغير الاحتمالي بقيود بأسلوب البرمجة الهندسية

Constrained Deterministic and Probabilistic Inventory Models Using Geometric Programming Approach

رسالة مقدمة إلى قسم الرياضيات
ضمن متطلبات الحصول على درجة الماجستير في العلوم / رياضيات
تخصص / إحصاء رياضي

إعداد الطالبة

هدى بنت محمد بن حامد الشنبري

طالبة الدراسات العليا بكلية التربية للبنات بمكة المكرمة (الأقسام العلمية)

إشراف

الدكتور/قطب عبد الحميد محمود قطب

أستاذ الإحصاء الرياضي، المساعد - رئيس قسم الرياضيات - كلية المعلمين - جامعة الطائف

١٤٢٩ هـ / ٢٠٠٨ م

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

إهداء

أهدي هذه الرسالة التي أرجوا من الله عز وجل أن يتقبل ما بذلت فيها من جهدٍ خالصاً لوجهه الكريم .

إلى والديّ أغلى قلبين في هذا الوجود صاحبي الفضل الكبير عليّ أطال الله في

عمرهما وجعلهما تاجاً فوق رأسي .

.. وإلى أخوتي الأعزاء رمزا للعطاء . . .

.. تقديراً للتضحية وإجلالاً للوفاء . .

وإلى كل من أسهم معي بجهده وعلمه وصبره ودعائه لإتمام هذه الرسالة . .

هدى الشنبري

شكر وتقدير

أتوجه بعظيم الشكر والامتنان لجزيل العطايا والنعم فله الحمد والشكر حتى يرضى .
كما أتقدم بالشكر لمن كان له الفضل والذي حين أتذكر جهوده يتوقف قلبي عن الكتابة وتخونني
العبارات وتتوه الأحرف عرفاناً بحميلة ، فقد كان خير عون لإتمام هذه الرسالة ، فله الشكر والتقدير
عرفانا بحقه وتقديرًا لحميلة **سعادة الدكتور/ قطب عبد الحميد محمود قطب** الذي لم يخل على بعلمه
وجهده وفقه الله وسدد على الخير خطاه .

وأتوجه بخالص الشكر والتقدير **لوالدي العزيزين** لما هياه لي من الظروف المناسبة وتوفير سبل
الراحة وتشجيعهم ودعمهم المعنوي المستمر لإنجاز هذه الرسالة حفظهما الله من كل سوء وأمدهما
بالصحة والعافية .

كما يسرني أن أشكر إدارة ومنسوبات كلية التربية للبنات الأقسام العلمية بمكة المكرمة ،
وأخص بالشكر والتقدير عميدة الكلية للأقسام العلمية **الدكتورة/ سميحة عبد الله قاري** ، ووكيلة
الدراسات العليا بالكلية **الدكتورة/ أحلام قملو** ، ورئيسة قسم الرياضيات السابقتين
الدكتورة/ شادية محمد عبد الشافي والدكتورة/ بسمة الشافعي ، ورئيسة قسم الرياضيات
الحالية **الدكتورة/ مكية مكّي** ، ولكافة أعضاء هيئة التدريس بقسم الرياضيات .

كما أتقدم بخالص الشكر والتقدير لإدارة مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية لدعمهم الرسالة
بمنحة بحثية رقمها **أط-١٥-٤٨** . ويسرني أن أشكر شركة تبوك للتنمية الزراعية (تادكو) وأخص بالشكر
والتقدير الرئيس التنفيذي للشركة المهندس **سعد محمد السواط** على ما قدموه لنا من بيانات لحالات
تخزين تم استخدامها في الرسالة كأمثلة تطبيقية .

وإلى من أسهم بوقته وجهده ومد يد العون والمساعدة وكان له الفضل في توصيل المادة العلمية
المنجزة من وإلى **سعادة المشرف السيد/ جبر عآلى السواط** جزاه الله عني خير الجزاء .

﴿ ملخص الرسالة ﴾

نظام المخزون السلعي هو أحد فروع العلوم التي تعتمد على فن التحكم في تخزين كميات من السلع المختلفة ، والتي استخدمت على نطاق واسع في مجالات متعددة لتشمل بحوث العمليات ونظرية الاحتمالات وعلوم الإدارة وغيرها من العلوم المختلفة ، ويتناول هذا العلم مشكلة اتخاذ القرار الأمثل للتحكم في المخزون . ويعتبر التحكم في المخزون من أهم الموضوعات التي تشغل تفكير صانعي القرار ، كما أصبح هذا العلم ظاهرة شائعة داخل المجتمعات المتحضرة والمتقدمة صناعياً واقتصادياً .

تنقسم نماذج المخزون السلعي إلى نوعين : نماذج احتمالية ونماذج غير الاحتمالية ، ويتوقف ذلك على معدل الطلب أو الزمن المسموح به لوصول الكمية المطلوبة . وهما إما معلومان وهذا ما يعرف بالنماذج غير الاحتمالية (النماذج الثابتة) ، وإما متغيران عشوائيان ومعلوم دالتهما الاحتمالية (مستقرة أو غير مستقرة) وهذا ما يعرف بالنماذج الاحتمالية .

ونظام المخزون السلعي متشابه تماماً لشكل التسلسل الهرمي فيوجد على قمته نظام المخزون متعدد السلع متعدد المصادر (*Multi-Item , Multi-Source MIMS*) ، وفي المراحل المتدانية يوجد نظام المخزون متعدد السلع ذي المصدر الواحد (*Multi-Item , Single-Source MISS*) ، نظام المخزون الذي يحتوي على نوع واحد من السلع متعدد المصادر (*Single-Item , Multi-Source SIMS*) ، نظام المخزون ذي المصدر الواحد ويتعامل مع نوع واحد من السلع (*Single-Item , Single-Source SISS*) .

والهدف الأساسي لهذه الرسالة والتي تشتمل على ثلاث أبواب هو دراسة الأنظمة المقيدة للمخزون السلعي ذي الصنف الواحد من السلع ، مع اعتبار أن معدل الطلب وتكلفة التجهيز ثابتان ومتغيران في الحالتين غير الاحتمالية والاحتمالية على الترتيب .

الباب الأول : يعرض مقدمة عامة لبعض التعريفات والرموز المستخدمة في الرسالة ، ونبذة عن أسلوب البرمجة الهندسية وكذلك سرداً تاريخياً عن أنظمة المخزون السلعي ، كما يعرض هذا الباب النتائج الجديدة التي تم الحصول عليها في البابين الثاني والثالث .

ويتناول **الباب الثاني** دراسة نموذجين للمخزون السلعي غير الاحتمالي ذي صنف واحد من السلع بقيدتين أحدهما خطي والآخر غير خطي ، ومعدل الطلب متغير تزايدياً في النموذج الأول ، ومتغير تناقصياً في النموذج الثاني . وتم الحصول على القيمة المثلى للوحدات (كمية الطلب المثلى) Q^* ، ومعدل الطلب الأمثل $D(Q^*)$ ، وطول دورة المخزون المثلى T_c^* ، وكذلك

التكلفة الكلية الصغرى للمخزون $\min TC(Q^*)$ بصورة رياضية صريحة. وكذلك دراسة بعض النماذج بوصفها حالات خاصة . وفي نهاية كل نموذج من النموذجين محل الدراسة تم إضافة مثال عددي محلول باستخدام برنامج **Mathematica** مع رسم المنحنيات التوضيحية لكل منهما باستخدام برنامج **MATLAB** .

ويهدف الباب الثالث إلى دراسة نموذجين احتماليين للمخزون السلعي ذي صنف واحد من السلع بتغير تكلفة التجهيز ، وزمن وصول الكمية المطلوبة يساوي الصفر . وتكلفة التجهيز تزايدية في النموذج الأول والتي تخضع لقيدين خطيين ، بينما تكلفة التجهيز تناقصية في النموذج الثاني وتخضع لقيدين أحدهما غير خطي والآخر خطي . وتم الحصول على القيم المثلى لعدد الفترات لكل دورة مخزون N^* ، وأعلى مستوى أمثل للمخزون Q_m^* ، وكذلك القيمة المتوقعة الصغرى للتكلفة الكلية للمخزون $\min \overline{TC}$ بصورة رياضية صريحة لكل نموذج قيد الدراسة . كما تم استنتاج بعض الحالات الخاصة لكل نموذج . وأضيف مثال عددي لكل منهما محلول باستخدام برنامج **Mathematica** مع رسم المنحنيات التوضيحية باستخدام برنامج **MATLAB** . وتم معالجة النماذج الأربعة السابقة باستخدام أسلوب البرمجة الهندسية (Geometric Programming Approach) .

ملاحظة :

تم استخلاص بحثين من الباب الثاني ، وأيضاً بحثين من الباب الثالث لنشرهم في مجلات علمية عالمية متخصصة .

❧ ABSTRACT ❧

Inventory system is one of the most diversified fields of applied sciences that is widely used in a variety of areas including operations research , applied probability , computer sciences , management sciences , production system , telecommunications , and many others . Inventory problem phenomena is becoming more and more prevalent in urbanized societies . And it is defined as art of controlling a stock of goods . Inventory control is the science – based on art of controlling the amount of stocks held within a business to meet economically the demands placed upon that business . Inventory control models are subject concerning decision making for management .

Inventory models may be either deterministic or probabilistic , since the demand of commodity may be deterministic or probabilistic respectively . In the deterministic models , it is assumed that the quantities needed over subsequent periods of time are known with certainty . This may be expressed over equal periods of time in terms of known constant demands or in terms of known variable demands . These two cases referred to as static and dynamic demands , respectively . While in the probabilistic models , demand occurs when the requirement over a certain period of time are not known with certainty but their pattern can be described by a known probability distribution . In this case , the probability distribution is said to be either stationary or non-stationary over time .

Inventory systems are presented as a hierarchy with the multi-item , multi-source (MIMS) system at its apex . Lower – order systems are : the single-item , multi-source (SIMS) system , the multi-item , single – source (MISS) system , and the single-item , single-source (SISS) system . Decision models for these system are formulated for both the deterministic and probabilistic situations .

The general aim of this thesis which contains three chapters is to introduce a study of the constrained (SISS) with constant and varying of demand rate and setup cost for the deterministic and probabilistic situations respectively .

The first chapter is a general introduction .The definitions , basic notation ,background about Geometric Programming Approach , review of literature are presented . And some basic new results of this thesis are introduced .

In chapter two , the author studied two deterministic single –item inventory models with increasing and decreasing varying demand rate under linear and non-linear constrained using geometric programming technique .The author evaluated the optimal order quantity Q^* , the optimal demand rate $D(Q^*)$, the optimal length of inventory cycle T_c^* and $\min TC(Q^*)$ for two models . Some special cases of these models are deduced and two numerical examples are solved using Mathematica program to illustrate the models with some graphs using MATLAB program .

The objective of chapter three is to study two probabilistic single – item inventory models with varying order cost and zero lead time under linear and non-linear constraints . The researcher evaluated the optimal number of period per cycle N^* , the optimal maximum inventory level Q_m^* which minimize the expected annual relevant total cost $\min \overline{TC}$. Some special cases of these models are deduced , and two numerical examples are solved using Mathematica program to illustrate the models with some graphs using MATLAB program .

المحتويات

CONTENTS

الموضوع	رقم الصفحة
١- الباب الأول : مقدمة	
١-١- : مقدمة	١
١-٢- : المفاهيم الأساسية والتعريفات	٣
١-٣- : المعالم الاقتصادية للمخزون	٦
١-٤- : الرموز المستخدمة في الرسالة	٩
١-٥- : نبذة عن أسلوب البرمجة الهندسية	١٠
١-٦- : نبذة تاريخية عن أنظمة المخزون السلعي	١٢
١-٧- : محتوى الرسالة	١٤
٢- الباب الثاني : نماذج المخزون السلعي غير الاحتمالية ذي الصنف الواحد من السلع بقيود مع معدل الطلب بحالة الاعتماد	
٢-١- : مقدمة	١٨
٢-٢- : نموذج المخزون السلعي ذي الصنف واحد من السلع مع معدل الطلب بحالة الاعتماد الترايدية تحت قيدين أحدهما خطي والآخر غير خطي	١٩
٢-٢-١- : الحالات الخاصة	٢٧
٢-٢-٢- : مثال عددي (١)	٣٢
٢-٢-٣- : الخلاصة	٣٦
٢-٣- : نموذج المخزون السلعي ذي الصنف واحد من السلع مع معدل الطلب بحالة الاعتماد التناقضية تحت قيدين أحدهما خطي والآخر غير خطي	٣٧

٤٠ (٢) : مثال عددي
٤٤ : الخلاصة
٣ - الباب الثالث : نماذج المخزون السلعي الاحتمالية المقيدة ذي الصنف الواحد من السلع بتغير تكلفة التجهيز وصفر وقت الانتظار	
٤٥ : مقدمة
	٣-٢ : نموذج المخزون السلعي الاحتمالي ذي الصنف الواحد من السلع بتغير
٤٦	تكلفة التجهيز تزايدياً وصفر وقت الانتظار تحت قيدين خطيين
٥٣ : الحالات الخاصة
٥٨ : مثال عددي (١)
٦٣ : الخلاصة
٣-٣ : نموذج المخزون السلعي الاحتمالي ذي الصنف الواحد من السلع بتغير	
	تكلفة التجهيز تناقصياً وصفر وقت الانتظار تحت قيدين أحدهما غير
٦٤ خطي والآخر خطي
٧٢ : الحالات الخاصة
٧٧ : مثال عددي (٢)
٨١ : الخلاصة
٨٢ ٤ - المراجع
	٥ - الملاحق :
I ١ - ملحق (أ) : المصطلحات
a ٢ - ملحق (ب) : مثال تطبيقي

البَابُ الْأَوَّلُ

مُقَدِّمَةٌ

INTRODUCTION

الباب الأول

مقدمة

INTRODUCTION

INTRODUCTION

١-١ - مقدمة

نظام المخزون السلعي هو أحد أهم فروع العلوم التطبيقية المختلفة التي تهتم بدراسة أنواع عديدة من السلع وليس دراسة نوع واحد . وعندما لا يكون هناك تفاعل بين الأنواع المختلفة من السلع فمن الأفضل دراسة كل نوع على حدة . عملياً يوجد كثير من التفاعلات بين الأنواع المختلفة كما هو الحال في الإبدال الجزئي من نوع لآخر ، على سبيل المثال عملية تصنيع السيارات من حيث وجود الكماليات أو عدم وجودها .

المخزون السلعي هو فن التحكم في ما يتم تخزينه من المواد أو البضائع للانتفاع بها أو استهلاكها عند الحاجة ، مثل المواد الخام التي تستخدم لإنتاج نفس البضائع المتنوعة أو المواد الغذائية أو المياه خلف السدود أو الأموال في المصارف (البنوك) أو الدم في بنوك الدم وغير ذلك الكثير من الأمثلة .

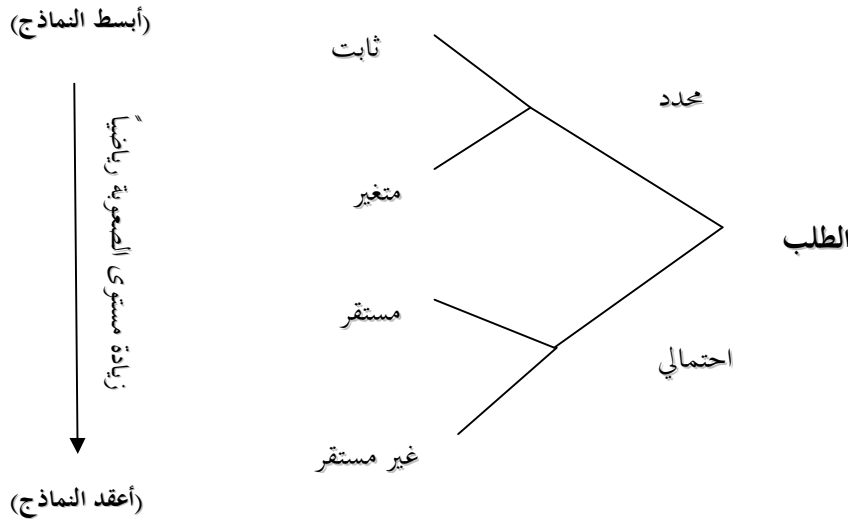
قلما يخلو نظام (اقتصادي - زراعي - تجاري - إداري) صغيراً كان أم كبيراً من الحاجة للمخزون . ومن الواضح أن لعملية الاحتفاظ بالمخزون تكاليفها الخاصة بها ، وتتكون هذه التكاليف عادة من تكاليف طلب البضائع أو المواد ، وتكاليف وضعها وترتيبها والاحتفاظ بها في المخازن المخصصة ، والتكاليف الناتجة عن تعطيل رأس المال الذي هو تكلفة للبضاعة المخزنة ، والتكاليف الناتجة عن التغير في ثمن البضائع ، بالإضافة إلى التكاليف الأخرى كالتي تنتج من التلف الكلي أو الجزئي للسلع المخزنة ، وقد لوحظ أن مجموع التكاليف المشار إليها قد يصل أحياناً إلى نسبة كبيرة من تكاليف المواد المخزنة .

تواجه أنظمة المخزون السلعي نوعين متضادين من الضغوطات العملية ، فهي من جهة تود تخزين كميات كبيرة من البضائع لتغطية طلبات العملاء (الزبائن) ، ومن جهة أخرى تود تخزين أقل كمية ممكنة من البضائع في المخزن لتجنب تكديسها مما يؤدي إلى تجميد رؤوس الأموال والفائدة العائدة عليها بجانب إمكانية استثمار هذا المال والاستفادة منه في مشاريع أخرى . ويجب على هذه الأنظمة إيجاد

التوازن بين هذين الضغطين ، ومن هنا تظهر لنا أهمية استخدام ما يسمى نماذج المخزون السلعي وذلك لتحديد كمية الطلب المثلى ، وطول دورة المخزون المثلى ، ومعدل الطلب الأمثل ، وعدد الفترات المثلى لدورة المخزون ، وتكلفة المخزون الكلية الصغرى التي تحقق مثل هذا التوازن .

الهدف الأساسي من دراسة نماذج المخزون السلعي هو تحديد القواعد والأسس التي يمكن من خلالها للمؤسسة استخدامها للتقليل من التكاليف الكلية للمخزون التي تنتج من عمليات التخزين لتغطية طلبات العملاء ، ووجود قدر ملائم من المخزون السلعي يحمي إدارة المبيعات ضد أي انخفاض غير متوقع في حجم الإنتاج إذ تظل إدارة المبيعات قادرة على الاستجابة لطلبات العملاء .

عملية تصنيف نماذج المخزون السلعي تتم غالباً حسب طبيعة الطلب الذي قد يكون إما طلباً محدداً (Deterministic) (أي معروف على وجه التأكيد) ، أو طلباً احتمالياً (Probabilistic) (أي يخضع لتوزيع احتمالي) . ويمكن أن يكون الطلب ثابتاً (Static) . بمعنى ثبات معدل الطلب من فترة إلى أخرى ، أو متغير (Dynamic) . بمعنى أن الطلب معروف على وجه التأكيد لكنه يتغير من فترة إلى أخرى ، أو يمكن أن يكون الطلب احتمالي مستقر (Stationary) ، بمعنى بقاء دالة الكثافة الاحتمالية للطلب بدون تغيير على مدار المدى الزمني ، أو احتمالي غير مستقر (non-Stationary) . بمعنى أن دالة الكثافة الاحتمالية للطلب تتغير مع مرور المدى الزمني . والشكل التالي يوضح التصنيفات المختلفة التي عادة يتم افتراضها للطلب في نماذج المخزون السلعي :



شكل (١-١) التصنيفات المختلفة لمعدل الطلب .

٢-١- المفاهيم الأساسية والتعريفات

DEFINITIONS AND BASIC CONCEPTS

١- التخزين *STOCK*

هو الاحتفاظ بكمية معينة من سلعة أو سلع مختلفة لفترة زمنية معينة بالرغم من تكاليف التخزين وتمويل المخزون وفائدة رأس المال بجانب إمكانية استثمار رأس المال في مشاريع أخرى .

٢- التوريد *ORDER*

هي الكميات التي يجب توريدها للمخزن من سلعة أو سلع مختلفة . وتورد إما على دفعة واحدة *one-shot* وتسمى بالحالة الساكنة (*static case*) أو على دفعات وتسمى بالحالة الديناميكية (*dynamic case*). ويتم التوريد عن طريق مورد خارجي أو وحدة إنتاج أو مصنع .

٣- كمية التوريد *PRODUCTION RUN*

هي الكمية Q التي يحتاجها المخزن لتزويده بها من وقت لآخر (لسد النقص) حتى يمكن الوفاء باحتياج العملاء من شركات أو أفراد . والتزويد إما أن يكون ثابت أو مستمر (على دفعات) .

٤- النفاذ *STOCKOUT*

يعني أنه عند مرحلة معينة من الإنتاج تكون وحدات المخزون قد استُنفذت تماماً من المخزن وأصبح خاوياً . وبذلك لا تفي بالطلبات اللازمة للعملاء في أي وقت .

٥- حجم المخزون *RUN SIZE*

هي أقصى كمية (الكمية الكلية) التي يمكن أن يحتفظ بها المخزن من سلعة ما أو سلع مختلفة . وتسمى أيضاً طاقة المخزن .

٦- نمط الطلب *DEMAND PATTERN*

هي الكمية التي يتعاقد عليها العميل مع إدارة المخزن لسحبها من المخزن وقت الحاجة ، وقد يكون الطلب ثابت (حتمي - غير احتمالي) ، بمعنى ثبات معدل الطلب من فترة لأخرى ، أي تكون الكمية على فترات زمنية متعاقبة وتسمى نماذج المخزون السلعي في هذه الحالة بالنماذج الساكنة *static models* ومعدل الطلب في هذه الحالة يسمى معدل الطلب

الساكن (الثابت) *static demand rate* . وقد يكون طلب عشوائي (احتمالي) ، بمعنى أن للطلبات دالة توزيع احتمالي ، وتكون الكمية على فترات زمنية متصلة ، وتسمى بالنماذج الاحتمالية *probabilistic models* ومعدل الطلب في هذه الحالة يسمى معدل الطلب الاحتمالي (العشوائي) *Probabilistic or stochastic demand rate* . وفي كلتا الحالتين تكون الطلبات بثقة أو عدم ثقة (أي ثقة العميل في إدارة المخزن لتوفير الكمية المطلوبة أو عدم الثقة في حالة تعثر توفير الكمية المطلوبة من إدارة المخزن) .

٧- زمن التسليم (زمن التأخير) *LEAD TIME (TIME LAG)*

هو الزمن اللازم منذ لحظة إذن التوريد حتى لحظة تسليم البضاعة للمخزن وتسمى أيضاً بفترة التوريد أي عند إصدار الطلبية إلى المورد ، فقد يستجيب المورد في الحال أو قد يحتاج لبعض الوقت قبل توريد الطلبية وهذا الوقت المنقضي بين إصدار الطلبية واستلامها يسمى بزمن التسليم ، ويرمز له بالرمز L . إذا كان $L = 0$ يعني أن التوريد فوري ، $L > 0$ يعني أن هناك زمن تأخير في التسليم . وزمن التسليم قد يكون ثابت (محدد) *(deterministic)* ، أو متغير عشوائي له دالة توزيع احتمالي *(probabilistic)* .

٨- عدم الوفاء *BACKLOGGING*

يعني لا تزود الطلبات مهما يطول انتظارها ويؤجل تسليمها حتى يزود المخزون .

٩- الاحتياطي *PRECAUTIONARY*

هو الاحتفاظ بكمية مناسبة من سلعة ما كاحتياطي وذلك للوفاء ببعض الالتزامات المطلوبة في مواعيدها المحددة ، وكذلك لتفادي تقلبات الأسعار وغرامة التأخير عن تنفيذ العقود المبرمة ، وكذلك ضمان استمرارية تمويل جهاز الإنتاج والصناعة وما يلزمه من مواد خام ، أو مواد أولية ، أو قطع غيار.

١٠- المضاربة *SPECULATIVE*

في بعض الأحيان يكون الغرض من التخزين هو انتظار ارتفاع الأسعار لتحقيق ربحاً كبيراً ، ويتم ذلك بشراء كميات كبيرة من السلع وقت انخفاض أسعارها في السوق ، ثم يعاد بيعها بعد ارتفاع سعرها ، ويراعى عند البيع تكلفة التخزين ، وتلف بعض السلع ، وتعطيل رأس المال .

SAFETY STOCK

١١- مخزون أمان

يعني الزيادة في المخزون كوقاية ضد احتمال نفاذ المخزون ، ومن الواضح أن مخزون أمان له تأثير على التكاليف الكلية ، فهي من جهة تخفض من التكاليف في حالة نفاذ المخزون ومن جهة أخرى فإنها تزيد من تكاليف التخزين . ويحقق المعادلتين الآتيتين :

رقم التخفيض في التكاليف الكلية = التكاليف الناتجة من نفاذ المخزون \times مرات نفاذ المخزون .

رقم التكاليف الإضافية = قيمة كمية مخزون أمان \times النسبة المتوقعة لتكاليف التخزين .

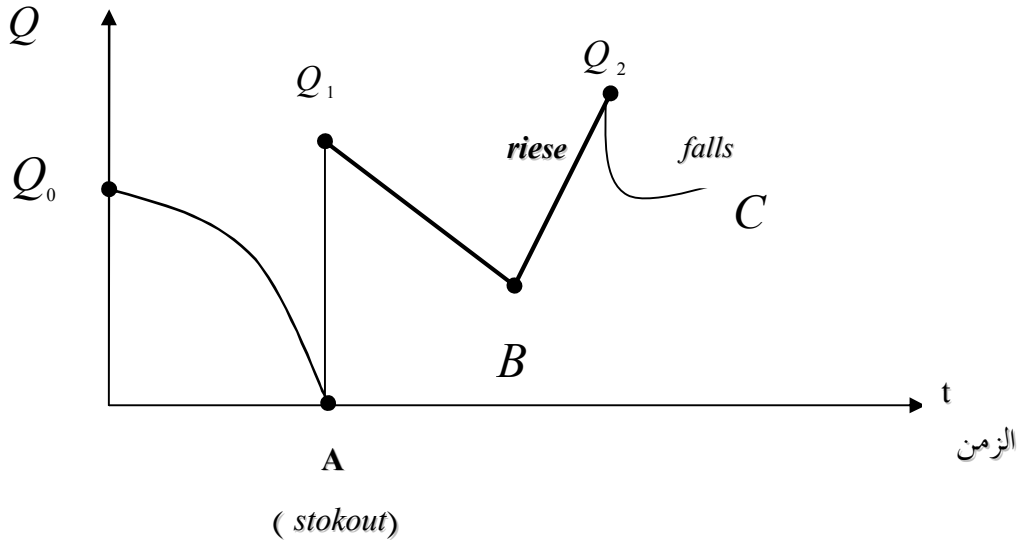
ويلاحظ هنا أن التكاليف الإضافية دائمة لأن كمية مخزون أمان تكون جزءاً من المخزون .

INVENTORY GRAPH

١٢- منحنى المخزون السلعي

نفرض أن Q تمثل الكمية المخزنة عند الزمن t ، أي أن : $Q = f(t)$

ويمكن أن يزود المخزن أو يسحب منه بمعدل ثابت أو مستمر . ويكون منحنى المخزون كما بالشكل الآتي :



شكل (٢-١) منحنى المخزون السلعي

حيث :

$Q = 0$ تدل على نفاذ المخزون (stockout) ،

$Q_1 A$ يعني تزويد فوري ،

$Q_1 B$ يعني مرحلة الطلب (السحب من المخزن) . أي أن : $\frac{dQ}{dt} < 0$ ،

$Q_2 B$ يعني التزويد للمخزن متصل . أي أن : $\frac{dQ}{dt} > 0$.

١٣- المدى الزمني *TIME HORIZON*

هو الزمن الذي سيخضع فيه المخزون للرقابة والجرد ، ويمكن أن يكون المدى الزمني محدود (نهائي) أو غير محدود (لانهائي) .

١٤- زمن دورة المخزون *INVENTORY CYCLE*

يُعرف على أنه الفترة الزمنية المستغرقة من خلو المخزن من الوحدات مرتين متتاليتين . ويكون عدد الفترات الزمنية لكل دورة مخزون :

$$N = \frac{Q}{D}$$

حيث D هو معدل الطلب ، Q هي الكمية المطلوبة لتزويد المخزن .

١٥- متوسط مستوى المخزون *AVERAGE INVENTORY LEVEL*

مستوى المخزون هو كمية البضاعة الموجودة في المخزن ، ويتغير مستوى المخزون مع تغير الزمن فهو يتناقص بتزايد كميات الطلب (الاستهلاك) (*Demand*) ، ويزداد عند استقدام البضاعة ووصول الطلبية (*Replenishment*) . ومتوسط مستوى المخزون يرمز له بالرمز q ، ويعرف على أنه المساحة الكلية المحصورة تحت منحنى المخزون مقسوماً على الزمن الكلي .

١-٣- المعالم الاقتصادية للمخزون *ECONOMIC PARAMETERS*

في علم المخزون السلمي مصطلحات أساسية وهامة خاصة بالتكاليف والمصاريف ، ألا وهي :

١- تكلفة الإنتاج *PRODUCTION COST (PURCHASE COST)*

هي تكلفة إنتاج السلعة الواحدة أو تكلفة شرائها لكل دورة وذلك لزيادة مستوى المخزون ، ولها أهمية خاصة في حال خفض الأسعار .

نفرض أن C_p تمثل تكلفة الإنتاج لكل وحدة ، D هو معدل طلب الوحدات لكل فترة زمنية . وبالتالي فإن :

$$production\ Cost = C_p \cdot D$$

٢- تكلفة التجهيز *SETUP COST (ORDER COST - PROCUREMENT COST)*

هي تكلفة إذن إصدار الطلبية ، وتكلفة أمر التوريد ، وتجهيز الآلات لإنتاج السلع المطلوبة لكل دورة مخزون . وتبدأ هذه التكلفة بالتجهيز للإنتاج وتنتهي بتسليم السلع للمخزن ، وتكون مستقلة عن كمية البضاعة المطلوبة . وكلما زاد عدد الطلبيات في وحدة الزمن كلما زادت تكلفة الطلبية وقد تكون ثابتة أو دالة في الكمية المطلوبة . وعند تحديد قيمة تكلفة التجهيز يجب أخذ التكاليف التالية بعين الاعتبار : تكلفة الحصول على الموافقة لإصدار الطلبية ، تكاليف الاتصالات (البريد - الهاتف - الفاكس - البريد الإلكتروني) ، تكاليف استقبال الطلبية (تفريغ البضاعة من وسائل النقل ووضعها بالمخازن الخاصة بها وترتيبها) ، وتكاليف الوسائل المستخدمة (الآلات) .

نفرض أن C_o هي تكلفة التجهيز للدورة ، وأن N هو عدد الفترات لكل دورة .

$$\therefore \text{Setup Cost} = \frac{C_o}{N} = C_o \frac{D}{Q}$$

٣- تكلفة التخزين *HOLDING COST*

هي تكلفة تخزين الوحدة الواحدة لكل دورة مخزون ، أي تكلفة الاحتفاظ بالمخزون . ويتم التعبير عن تكاليف التخزين إما على شكل وحدات نقدية عن كل وحدة مخزنة خلال فترة زمنية معينة ، وإما على شكل نسبة مئوية من قيمة متوسط المخزون . وعند تحديد قيمة تكلفة التخزين يجب أن نأخذ العناصر التالية بعين الاعتبار : تجميد رؤوس الأموال التي تنتج عند تكديس كميات ضخمة من البضاعة في المخازن ، وتكلفة إيجار المخزن وما يلزمها من خدمات كالكهرباء ، المياه ، وسائل الاتصال (الهاتف - الفاكس - الانترنت) ، الحارس ، وتكاليف التلف من سرقة أو تلف البضاعة أو عدم صلاحيتها ، وتكاليف التأمين وخلافه . وتكلفة التخزين تزايد بتزايد حجم المخزون وتتناقص بتناقصه.

نفرض أن C_h تمثل تكلفة التخزين للوحدة الواحدة لكل فترة زمنية .

$$\therefore \text{Holding Cost} = C_h \cdot q$$

حيث q تمثل متوسط مستوى المخزون و تساوى $\frac{Q}{2}$ ، أي أن :

$$\text{Holding Cost} = \frac{1}{2} C_h \cdot Q$$

٤- تكلفة العجز (تكلفة الغرامة) *SHORTAGE COST (PENALTY COST)*

هي التكلفة الناتجة عن نفاذ المخزون عند الحاجة إليه ، أو نتيجة قصور في حجم المبيعات والتأخر في تسليم السلع للعملاء . وللعجز آثار سلبية على التكاليف الإجمالية للنظام منها ضياع الأرباح التي كان من الممكن الحصول عليها لو توافرت البضاعة عند الطلب ، وفقدان بعض العملاء وعدم عودتهم مرة أخرى لاقتناء البضاعة ، وتشويه السمعة التجارية للمنشأة . هذه التكلفة تتزايد كلما تناقص حجم المخزون ، وتتناقص كلما تزايد حجم المخزون .

نفرض أن C_s هي تكلفة العجز للوحدة الواحدة لكل فترة زمنية ، كما أن Q_s هي الكمية الواردة للمخزن لكل دورة مخزون .

$$\therefore \text{Shortage Cost} = \frac{1}{2} C_s Q_s$$

٥- تكلفة الميزانية *BUDGET COST*

هي التكلفة المخصصة للتحكم في ميزانية السلع المخزنة أو إنتاجها .

نفرض أن C_b تمثل تكلفة الميزانية لكل وحدة ، Q هو كمية تزويد الوحدات لكل فترة زمنية . وبالتالي فإن :

$$\text{Budget Cost} = C_b \cdot Q = C_b D N$$

حيث N عدد الفترات لكل دورة مخزون .

٦- التكلفة الكلية للمخزون *TOTAL INVENTORY COST*

هي التكلفة الناتجة من جمع تكلفة التجهيز وتكلفة الإنتاج وتكلفة التخزين وتكلفة العجز جميعاً أي أن :

التكلفة الكلية للمخزون لكل وحدة زمن = تكلفة التجهيز + تكلفة الإنتاج + تكلفة التخزين + تكلفة العجز .

The Total Cost Per Unit Time = setup cost + production cost + holding cost + shortage cost .

$$\therefore TC = C_o \frac{D}{Q} + C_P D + \frac{1}{2} C_h Q + \frac{1}{2} C_s Q_s$$

NOTATION

١-٤- الرموز المستخدمة في الرسالة

C_b	: تكلفة ميزانية التخزين لكل وحدة .
\bar{C}_b	: تكلفة ميزانية التخزين المتوقعة لكل وحدة .
C_h	: تكلفة التخزين لكل وحدة .
\bar{C}_h	: تكلفة التخزين المتوقعة لكل وحدة .
C_o	: تكلفة الطلب (تكلفة التجهيز) لكل وحدة .
\bar{C}_o	: تكلفة الطلب المتوقعة لكل وحدة .
$C_o(N)$: تكلفة الطلب المتغيرة كدالة في عدد الفترات الزمنية لكل دورة مخزون .
C_p	: تكلفة الشراء (تكلفة الإنتاج) لكل وحدة .
\bar{C}_p	: تكلفة الشراء المتوقعة لكل وحدة .
C_s	: تكلفة العجز (تكلفة النقص) لكل وحدة .
\bar{C}_s	: تكلفة العجز المتوقعة لكل وحدة .
D	: معدل الطلب لوحدة المخزون لكل فترة زمنية .
$D(Q)$: معدل الطلب لوحدة المخزون لكل فترة زمنية كدالة في كمية التوريد Q .
\bar{D}	: معدل الطلب لوحدة المخزون المتوقع لكل فترة زمنية .
D^*	: معدل الطلب الأمثل لوحدة المخزون لكل فترة زمنية .
K_1	: الحد الأقصى لمتوسط مستوى المخزون .
K_2	: الحد الأقصى لعدد الطلبات خلال وحدة الزمن .
K_3	: الحد الأقصى لتكلفة التخزين .
K_4	: الحد الأقصى لمساحة التخزين .
K_5	: الحد الأقصى لتكلفة التجهيز .
K_6	: الحد الأقصى لتكلفة ميزانية التخزين .
L	: زمن تسليم البضاعة للمخزن (فترة التوريد) .
$\min TC$: التكلفة الكلية الصغرى للمخزون لكل وحدة زمن .
$\min \bar{TC}$: التكلفة الكلية الصغرى المتوقعة للمخزون لكل وحدة زمن .
N	: عدد الفترات الزمنية لكل دورة مخزون .
N^*	: عدد الفترات الزمنية المثلى لكل دورة مخزون .

q	: متوسط مستوى المخزون لسلعة واحدة في المخزن .
Q	: الكمية المطلوبة لتزويد المخزن .
\bar{Q}	: كمية الطلب المتوقعة .
Q^*	: كمية الطلب المثلى .
Q_m	: كمية الطلب لأعلى مستوى للمخزون .
Q_m^*	: كمية الطلب المثلى لأعلى مستوى للمخزون .
S	: مساحة التخزين لسلعة واحدة لكل وحدة في المخزن .
T_c	: طول دورة المخزون .
T_c^*	: طول دورة المخزون المثلى .
TC	: التكلفة الكلية للمخزون لكل وحدة زمن .
\bar{TC}	: التكلفة الكلية المتوقعة للمخزون لكل وحدة زمن .
W_i	: وزن سلعة المخزون لكل i .
W_i^*	: وزن سلعة المخزون المثلى لكل i .

١-٥- نبذة عن أسلوب البرمجة الهندسية :

BACKGROUND ABOUT GEOMETRIC PRORAMMING APPROACH

تعتبر البرمجة الهندسية أسلوباً هاماً لحل حالة خاصة من مشاكل البرمجة غير الخطية (Non-Linear Programming)، وقد وضع هذا الأسلوب كلاً من [6] *Duffin et al* ، حيث يعتمد أسلوب البرمجة الهندسية على العلاقة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي ، لذا سميت بالبرمجة الهندسية.

العلاقة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي :

$$\sum_{i=1}^n W_i x_i \geq \prod_{i=1}^n x_i^{W_i}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{W_i} \right)^{W_i} \quad (1.1)$$

حيث W_i لكل i تسمى الأوزان .

تعرف الدالة البوسية كما يلي :

$$f(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x)$$

حيث

$$f_i(x) = C_i x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \dots x_n^{a_{in}} \quad , \quad i=1,2,\dots,m \quad , \quad j=1,2,\dots,n$$

كما أن $x_i > 0$ ، $C_i > 0$ ، a_{ij} عدد حقيقي .

المطلوب تدنية الدالة البوسية والتي تأخذ الصيغة التالية :

$$\text{Min } f(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x) \quad (1.2)$$

بتطبيق العلاقة (1.1) نحصل على :

$$f_i(x) \geq \left(\frac{C_1}{W_1} \right)^{W_1} \left(\frac{C_2}{W_2} \right)^{W_2} \dots \left(\frac{C_m}{W_m} \right)^{W_m}$$

- $x_1^{a_{11}W_1 + a_{21}W_2 + \dots + a_{m1}W_m}$
- $x_2^{a_{12}W_1 + a_{22}W_2 + \dots + a_{m2}W_m}$
- \vdots
- $x_n^{a_{1n}W_1 + a_{2n}W_2 + \dots + a_{mn}W_m}$

(1.3)

كما أنها تحقق الشرطين الآتيين :

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} W_i = 0 \quad , \quad i=1,2,\dots,m \quad , \quad j=1,2,\dots,n \quad (1.4)$$

$$\sum_{i=1}^m W_i = 1 \quad (1.5)$$

و الشرطان (1.4)، (1.5) يسميان شرط التعامد (Orthogonality Condition) و شرط السوية (Normality Condition) على الترتيب .

٦-١- نبذة تاريخية عن أنظمة المخزون السلعي

BACKGROUND ABOUT THE INVENTORY SYSTEMS

بعض الباحثين درسوا نماذج المخزون السلعي متعدد الأنواع من السلع المشروطة بقيد واحد ، بينما درس البعض الآخر نماذج مشروطة باستخدام طريقة لاجرانج (Lagrangian Method) ، أو الطريقة الخوارزمية (Algorithmic Method) ، أو الطرق المساعدة على اكتشاف الحل (Heuristic Methods) حاصلين جميعاً على نتائج عديدة .

من الأهداف الرئيسية المطروحة الآن هو الحصول على نتائج رياضية تحليلية صريحة مع تطوير أسلوب البرمجة الهندسية الذي استخدمه [4] Cheng رائد هذا الأسلوب في دراسة نموذج المخزون السلعي الذي يعتمد سعر الوحدة فيه على معدل الطلب بدون قيود مع الحصول على نتائج غير صريحة . علاوة على ذلك تم تطوير طريقة شينج في حالة وجود قيود مع إضافة نظرية دوفن وبيترسون [6] Duffin & Peterson على أسلوب البرمجة الهندسية الذي استخدمه شينج والتي ساعدت في الحصول على نتائج رياضية تحليلية صريحة لكل من القيمة المثلى للوحدات Q^* ، وزمن الدورة الأمثل T_c^* وبالتالي حساب التكلفة السنوية الصغرى $\min TC$. ويعتمد أسلوب البرمجة الهندسية على تحويل دالة الهدف الأولية (Primal) والتي تدني دالة التكلفة السنوية (min TC) إلى الدالة البوسية (Posynomial) وهي تعميم لكثيرة الحدود التي تتكون من حاصل ضرب كل حدود دالة التكلفة وحدود القيود بأسلوب خاص تسمى بالدالة البديلة (Dual) . ويتم تعظيم هذه الدالة التي تعتمد على العلاقة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي . وهذه الطريقة أفضل بكثير من الطرق المألوفة سالفة الذكر وغيرها .

ومن الأبحاث التي اعتمدت عليها الدراسة [8] Fabrycky and Banks حيث درسنا نظام المخزون السلعي ذي المصدر الواحد ويتعامل مع نوع واحد من السلع (Single-Item , Single-Source (SISS) في الحالتين الاحتمالية وغير الاحتمالية ، واستخدما الطريقة الكلاسيكية لتحقيق الأمثلية وكذلك استخدما طريقة Monte Carlo التحليلية في بعض الأنظمة الاحتمالية . وأيضاً [24] Taha تناول دراسة نماذج المخزون السلعي الاحتمالية وغير الاحتمالية بدون قيود مع ثبات تكلفة الوحدات . وتم دراسة النموذج الاقتصادي لكمية الطلب بانخفاض السعر تحت قيد متوسط مستوى التخزين بأسلوب البرمجة الهندسية من قبل [11] Hariri et al . وكذلك تم دراسة الحل التحليلي لنموذج المخزون السلعي متعدد السلع بتغير تكلفة التخزين تحت قيدين باستخدام أسلوب البرمجة

الهندسية من قبل [2] **Abou EL-Ata and Kotb** . [17] **Kotb** عالج الحل التحليلي لمشكلة المخزون السلعي ذي صنف واحد من السلع بقيدين عندما يعتمد سعر الوحدة فيه على معدل الطلب وتكلفة الإنتاج دالة في معدل الطلب تناقصية والمتغيرات القرارية للنموذج هي كمية الطلب ومعدل الطلب مستخدماً أسلوب البرمجة الهندسية . كما عولجت نماذج المخزون الاحتمالي بطلبات تعتمد على تكلفة الوحدات المتغيرة باستخدام أسلوب لاجرانج من قبل [9] **Fergany** . كذلك تم مناقشة نماذج المخزون الاحتمالية بتكاليف وحدات ثابتة ومتغيرة ذي الصنف الواحد ومتعدد الأصناف من السلع باستخدام أسلوب البرمجة الهندسية من قبل [7] **EL- Wakeel** . كما درسنا [16] **Khouja and Goyal** الحل الأمثل لنموذج المخزون السلعي ذي صنف واحد من السلع مع قيد تكلفة الوحدة المتصل تناقصياً لإيجاد الكمية المثلى للوحدات . كذلك عالجنا [3] **Berman and Perry** نموذج المخزون السلعي بحالة اعتماد أسية على معدل الطلب .

وتناول [5] **Das et al** نموذج المخزون السلعي متعدد الأصناف من السلع بكمية تعتمد على تكلفة المخزون ، وتكلفة الوحدات تعتمد على الطلبات تحت قيود باستخدام أسلوب البرمجة الهندسية . كما ناقش [15] **Juneau and Eyler** نموذج كمية الطلب الاقتصادية بمعدل طلب كدالة في الزمن يتبع التوزيع الأسّي وتكلفة الوحدات ثابتة واستخدم الطريقة الكلاسيكية لتحقيق الأمثلية للمتغيرات القرارية . تناول [19] **Kurt et al** أيضاً دراسة الإنتاج وإدارة المخزون السلعي متعدد القيود بإعادة المورد . ونوقش أيضاً نظام المخزون بمراجعة مستمرة ذي الطابع العشوائي عندما تعتمد فترة التوريد على حجم الدفعة ووقت الإعداد باستخدام نموذج محاكاة من قبل [13] **Ibrahim and Moncer** ، كما عالج [21] **Mandal and Maiti** نموذج المخزون متعدد الأصناف من السلع بقيد مساحة التخزين باستخدام أسلوب البرمجة الهندسية . أوجد [10] **Goyal and Girib** قاعدة بسيطة لتحديد طريقة تجديد المخزون لسلعة فيها معدل طلب متناقص خطياً حيث استخدم الطرق المساعدة لاكتشاف الحل . كما تمت معالجة نموذج المخزون السلعي غير الاحتمالي بتغير الطلب في الزمن ومعدل التلف للسلعة يتبع توزيع واييل مع وجود حالة العجز لـ [27] **WUKun** ، ودرس [25] **Wang Sheng** تجديد المخزون بتزايد معدل الطلب حيث قدم الأسلوب التحليلي لتحديد حجم تجديد الطلبية التي تقلل التكلفة الكلية للمخزون في حال تزايد معدل الطلب .

٧-١ - محتوى الرسالة

الرسالة تحتوى ثلاث أبواب تتناول دراسة الأنظمة المقيدة في الحالتين غير الاحتمالية والاحتمالية باستخدام أسلوب البرمجة الهندسية .

الباب الأول : مقدمة عامة لعرض بعض التعريفات والمصطلحات الهامة التي استخدمت في الدراسة ، ونبذة عن أسلوب البرمجة الهندسية وكذلك سرداً تاريخياً عن تطور موضوع الدراسة ، كما يعرض هذا الباب النتائج الجديدة التي تم الحصول عليها .

وفي الباب الثاني : تم دراسة الحل التحليلي لنموذجين من المخزون السلعي ذي صنف واحد من السلع المشروط بقيدين أحدهما خطي والآخر غير خطي باستخدام أسلوب البرمجة الهندسية .

النموذج الأول : نموذج المخزون السلعي ذي صنف واحد من السلع ومعدل الطلب يتغير تزايدياً بالنسبة لكمية التوريد تحت قيدين أحدهما خطي وهو متوسط مستوى المخزون ، والآخر غير خطي وهو عدد الطلبات بمعدل طلب متغير تزايدياً في كمية التوريد . ويأخذ معدل الطلب الصيغة التالية :

$$D(Q) = \alpha Q^\beta \quad \alpha > 0 , \quad 0 \leq \beta < 1$$

النتائج الأساسية لهذا النموذج هي :

كمية الطلب المثلى :

$$Q^* = \left(\frac{2\alpha C_o((1-\beta)(1+W_4^*) - W_3^*)}{C_h(1+W_3^* - (1-\beta)W_4^*)} \right)^{\frac{1}{2-\beta}}$$

معدل الطلب الأمثل :

$$D^* = \alpha \left(\frac{2\alpha C_o((1-\beta)(1+W_4^*) - W_3^*)}{C_h(1+W_3^* - (1-\beta)W_4^*)} \right)^{\frac{\beta}{2-\beta}}$$

طول دورة المخزون المثلى :

$$T_c^* = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{2\alpha C_o((1-\beta)(1+W_4^*) - W_3^*)}{C_h(1+W_3^* - (1-\beta)W_4^*)} \right)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}}$$

التكلفة الكلية الصغرى للمخزون :

$$\min TC(Q^*) = \left(\frac{1}{2} (\alpha C_o)^{\frac{1}{1-\beta}} C_h \right)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}} \left[\left(\frac{1+W_3^* - (1-\beta)W_4^*}{(1-\beta)(1+W_4^*) - W_3^*} \right)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}} + \left(\frac{(1-\beta)(1+W_4^*) - W_3^*}{1+W_3^* - (1-\beta)W_4^*} \right)^{\frac{1}{2-\beta}} \right]$$

في نهاية النموذج تم دراسة الحالات الخاصة به مع إضافة مثال عددي لتوضيح النموذج ورسم المنحنيات التوضيحية الخاصة به .

النموذج الثاني : نموذج المخزون السلعي ذي صنف واحد من السلع ومعدل الطلب يتغير تناقصياً بالنسبة لكمية التوريد تحت نفس القيدين السابقين في النموذج الأول . ويكون معدل الطلب على الصورة :

$$D(Q) = \alpha Q^{-\beta} \quad \alpha > 0, \beta \geq 1$$

النتائج الأساسية لهذا النموذج هي :

كمية الطلب المثلى :

$$Q^* = \left(\frac{2\alpha C_o ((\beta+1)(1+W_4^*) - W_3^*)}{C_h (1+W_3^* - (\beta+1)W_4^*)} \right)^{\frac{1}{\beta+2}}$$

معدل الطلب الأمثل :

$$D^* = \alpha \left(\frac{2\alpha C_o ((\beta+1)(1+W_4^*) - W_3^*)}{C_h (1+W_3^* - (\beta+1)W_4^*)} \right)^{\frac{-\beta}{\beta+2}}$$

طول دورة المخزون المثلى :

$$T_c^* = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{2\alpha C_o ((\beta+1)(1+W_4^*) - W_3^*)}{C_h (1+W_3^* - (\beta+1)W_4^*)} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}}$$

كما أن التكلفة الكلية الصغرى للمخزون :

$$\min TC(Q^*) = \left(\frac{1}{2} C_h (\alpha C_o)^{\frac{1}{\beta+1}} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}} \left\{ \left(\frac{1+W_3^*-(\beta+1)W_4^*}{(\beta+1)(1+W_4^*)-W_3^*} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}} + \left(\frac{(\beta+1)(1+W_4^*)-W_3^*}{1+W_3^*-(\beta+1)W_4^*} \right)^{\frac{1}{\beta+2}} \right\}$$

في نهاية النموذج تم دراسة نموذج يكون كحالة خاصة مع إضافة مثال عددي لتوضيح النموذج ورسم المنحنيات التوضيحية الخاصة به .

الباب الثالث : تناول دراسة نموذجين للمخزون السلعي الاحتمالي المقيدة ذي صنف واحد من السلع بتغير تكلفة التجهيز وصفر وقت الانتظار باستخدام أسلوب البرمجة الهندسية.

النموذج الأول : نموذج المخزون السلعي الاحتمالي ذي صنف واحد من السلع مع تغير تكلفة التجهيز تزايدياً وصفر وقت الانتظار تحت قيدين خطيين أحدهما تكلفة التخزين والآخر مساحة التخزين . وتأخذ تكلفة التجهيز الصيغة التالية :

$$C_o(N) = \alpha + \beta N \quad \alpha > 0 \quad , \quad \beta \geq 0$$

النتائج الأساسية لهذا النموذج هي :

عدد الفترات المثلى لكل دورة مخزون :

$$N^* = \sqrt{\frac{2\alpha(1-W_3^*-W_4^*)}{C_h \bar{D}(1+W_3^*+W_4^*)}}$$

أعلى مستوى أمثل للمخزون:

$$Q_m^* = \bar{D} \nu + \sqrt{\frac{2\alpha \bar{D}(1-W_3^*-W_4^*)}{C_h(1+W_3^*+W_4^*)}}$$

التكاليف الكلية الصغرى المتوقعة للمخزون :

$$\min \bar{TC} = C_p \bar{D} + \beta + C_h \bar{D} \nu + \sqrt{\frac{2\alpha C_h \bar{D}}{(1+W_3^*+W_4^*)(1-W_3^*-W_4^*)}}$$

في نهاية النموذج تم دراسة الحالات الخاصة به مع إضافة مثال عددي لتوضيح النموذج ورسم المنحنيات التوضيحية له .

النموذج الثاني : نموذج المخزون السلعي الاحتمالي ذي صنف واحد من السلع مع تغير تكلفة التجهيز تناقصياً تحت قيدين أحدهما غير خطي وهو تكلفة التجهيز المتغيرة تناقصياً والآخر خطي وهو ميزانية التخزين ، وتأخذ تكلفة التجهيز الصيغة التالية :

$$C_o(N) = C_o N^{-\beta} \quad C_o > 0 \quad , \quad \beta \geq 1$$

النتائج الأساسية لهذا النموذج هي :

عدد الفترات المثلى لكل دورة مخزون :

$$N^* = \left(\frac{2 C_o ((\beta+1) (1+W_3^*) - W_4^*)}{C_h \bar{D} (1 - (\beta+1) W_3^* + W_4^*)} \right)^{\frac{1}{\beta+2}}$$

أعلى مستوى أمثل للمخزون :

$$Q_m^* = \bar{D} \nu + \left(\frac{2 C_o (\bar{D})^{\beta+1} ((\beta+1)(1+W_3^*) - W_4^*)}{C_h (1 - (\beta+1) W_3^* + W_4^*)} \right)^{\frac{1}{\beta+2}}$$

التكلفة الكلية الصغرى المتوقعة للمخزون :

$$\min \overline{TC} = C_p \bar{D} + C_h \bar{D} \nu + \left(\frac{1}{2} C_o^{\frac{1}{\beta+1}} C_h \bar{D} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}} \left(\left(\frac{1 - (\beta+1) W_3^* + W_4^*}{(\beta+1)(1+W_3^*) - W_4^*} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}} + \left(\frac{(\beta+1)(1+W_3^*) - W_4^*}{1 - (\beta+1) W_3^* + W_4^*} \right)^{\frac{1}{\beta+2}} \right)$$

في نهاية النموذج تم دراسة الحالات الخاصة به مع إضافة مثال عددي لتوضيح النموذج ورسم المنحنيات التوضيحية له .

البَابُ الثَّانِي

نماذج المخزون السلعي غير الاحتمالية ذي الصنف
الواحد من السلع بقيود مع معدل الطلب بحالة الاعتماد

**CONSTRAINED DETERMINISTIC SINGLE-ITEM
INVENTORY MODELS WITH STATE-
DEPENDENT DEMAND RATE**

الباب الثاني

نماذج المخزون السلعي غير الاحتمالية ذي الصنف الواحد من السلع بقيود مع معدل الطلب بحالة الاعتماد

CONSTRAINED DETERMINISTIC SINGLE-ITEM INVENTORY MODELS WITH STATE-DEPENDENT DEMAND RATE

INTRODUCTION

٢-١- مقدمة

كثيراً من البحوث تناولت دراسة نماذج المخزون السلعي غير الاحتمالي بقيود وبدون قيود باستخدام أسلوب البرمجة الهندسية . [20] **Malony** عالج نموذج المخزون السلعي غير الاحتمالي متعدد الأصناف المقيّد . كما تناول [17] **Kotb** مشكلة المخزون السلعي بقيدين ذي الصنف الواحد وتكلفة ميزانية التخزين دالة في معدل الطلب مستخدماً أسلوب البرمجة الهندسية . حديثاً ، [16] **Khouja and Goyal** أوجدا الكمية المثلى لنموذج المخزون السلعي ذي الصنف الواحد بشرط أن تكون تكلفة الوحدة متصلة تناقصاً . [3] **Berman and Perry** قدما حلاً تحليلياً لنموذج كمية الطلب الاقتصادية ومعدل الطلب دالة في مستوى المخزون ، كما ألقوا الضوء على نوعين من دوال معدل الطلب الأسية بدون قيود مع إضافة العشوائية لكمية الطلب . وتمت دراسة سياسات المخزون المثلى مع تناقص تكلفة الوحدات باستخدام أسلوب البرمجة الهندسية لـ [12] **Hoon and Carry** . ودرسوا [23] **Sahidul and Tapan** نموذج كمية الإنتاج الاقتصادية تحت قيد مساحة التخزين باعتبار مرونة الإنتاج وتكلفته تعتمد على الطلب .

هذا الباب يعالج نموذجين غير احتماليين بنوعين مختلفين من معدل الطلب كدالة في مستوى المخزون متغيرة تزايدياً في النموذج الأول وتتغير في النموذج الثاني تناقصياً . والهدف الأساسي هو الحصول لكل نموذج على التكلفة الكلية الصغرى بصورة رياضية صريحة $\min TC$ ، وأيضاً الحصول على القيمة المثلى للوحدات Q^* ، وكذلك الحصول على معدل الطلب الأمثل $D(Q^*)$ ، وزمن دورة المخزون المثلى T_c^* . كما تم دراسة الحالات الخاصة لكل نموذج . وفي نهاية كل نموذج من النموذجين محل الدراسة أضيف مثال عددي محلول باستخدام برنامج **Mathematica** مع رسم المنحنيات التوضيحية لكل منهما باستخدام برنامج **MATLAB** . والمعالجة التحليلية لهذين النموذجين تمت باستخدام أسلوب البرمجة الهندسية .

٢-٢- نموذج المخزون السلعي ذي الصنف الواحد من السلع مع معدل الطلب بحالة الاعتماد التزايدية بقيدين أحدهما خطي والآخر غير خطي

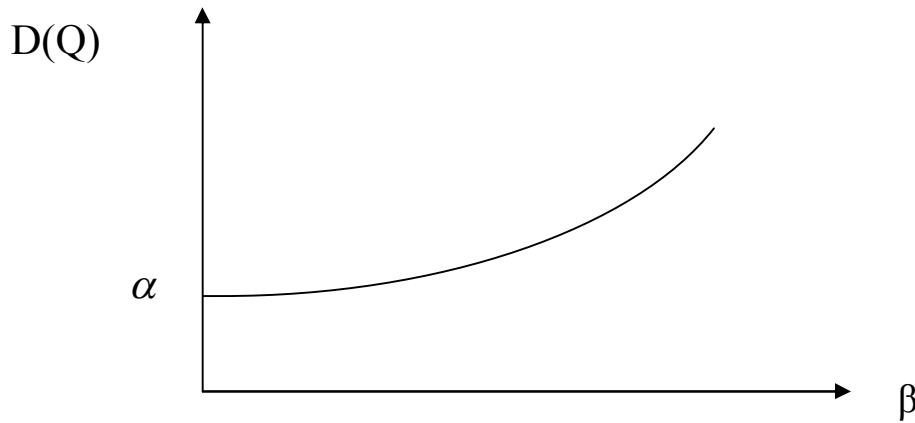
Single-Item Inventory Model With Increasing State-Dependent Demand Rate Under Linear and Non-Linear Constraints

نفرض أن معدل الطلب D منتظم ، مع عدم السماح بالتأخير في تسليم السلع للعملاء ، وكمية التوريد Q فورية ، والمدة الزمنية نهائي ، ومعدل الطلب يعتبر دالة متصلة تزايدية في كمية الطلب Q التي تأخذ الصورة التالية :

$$D(Q) = \alpha Q^\beta \quad \alpha > 0 , \quad 0 \leq \beta < 1 \quad (2.1)$$

حيث α, β أعداد حقيقية . والشرط $\alpha > 0$ يعني أن $D(Q)$ يجب أن لا تكون سالبة . بينما $0 \leq \beta < 1$ سيتضح فيما بعد في مناقشة النموذج باستخدام أسلوب البرمجة الهندسية .

معدل الطلب $D(Q)$ دالة متصلة تزايدية عندما تزداد Q لكل قيم β . إذا كانت $\beta = 0$ فإن معدل الطلب يكون مقدار ثابت (α) . وبالتالي فإن $D(Q)$ يمكن توضيحها كما بالرسم (١-٢) .



شكل (١-٢) العلاقة بين معدل الطلب $D(Q)$ و β .

هدف النموذج هو إيجاد أقل تكلفة كلية ممكنة للمخزون (أي مجموع تكلفة التجهيز وتكلفة التخزين) طبقاً للفروض الأساسية للنموذج الاقتصادي لويلسون (*Wilson*) والذي يفترض أن تكلفة إنتاج السلعة الواحدة C_p غير ذي أهمية ، وتأخذ الصورة التالية :

$$TC(Q) = \frac{D(Q)C_o}{Q} + \frac{1}{2} Q C_h \quad (2.2)$$

والتي تخضع لقيدتين أحدهما متوسط مستوى المخزون والآخر هو عدد الطلبات خلال وحدة الزمن على الترتيب كما يلي :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{Q}{2} \leq K_1 \\ \frac{D(Q)}{Q} \leq K_2 \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

حيث K_1 هو الحد الأقصى لمتوسط مستوى المخزون ، ويهدف إلى منع تراكم المخزون الذي يؤدي إلى خسائر كبيرة للمخزن ، بالإضافة إلى تعطيل رأس المال وزيادة فرصة التلف . كما أن K_2 هو الحد الأقصى لعدد الطلبات خلال وحدة الزمن ، ويهدف للتحكم في عدد الطلبات بما يتناسب مع قدرة المنشأة (المصنع) ، حيث أن تزايد عدد الطلبات يؤدي بشكل مباشر إلى ارتفاع تكلفة الطلب .

لحل دالة الهدف الأولية التي تقعر مشكلة البرمجة ، يمكن كتابتها في الصورة التالية بعد التعويض من (2.1) في (2.2) و (2.3) :

$$\min TC(Q) = \alpha C_o Q^{-(1-\beta)} + \frac{1}{2} Q C_h \quad (2.4)$$

مع القيدتين

$$\left. \begin{array}{l} \frac{Q}{2 K_1} \leq 1 \\ \frac{\alpha Q^{-(1-\beta)}}{K_2} \leq 1 \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

بتطبيق أسلوب البرمجة الهندسية لـ [6] *Duffin et al* على العلاقتين (2.4) ، (2.5) نحصل على دالة الهدف للمشكلة البديلة والتي يمكن كتابتها على الصورة :

$$G(W) = \left(\frac{\alpha C_0 Q^{-(1-\beta)}}{W_1} \right)^{W_1} \left(\frac{Q C_h}{2W_2} \right)^{W_2} \left(\frac{Q}{2K_1 W_3} \right)^{W_3} \left(\frac{\alpha Q^{-(1-\beta)}}{K_2 W_4} \right)^{W_4}$$

$$= \left(\frac{\alpha C_0}{W_1} \right)^{W_1} \left(\frac{C_h}{2W_2} \right)^{W_2} \left(\frac{1}{2K_1 W_3} \right)^{W_3} \left(\frac{\alpha}{K_2 W_4} \right)^{W_4} \times Q^{-(1-\beta)W_1 + W_2 + W_3 - (1-\beta)W_4} \quad (2.6)$$

حيث $\underline{W} = W_j$ لكل $j = 1, 2, 3, 4$ تسمى الأوزان (Weights) وتحقق $0 \leq W_j < 1$ ، وأيضاً تحقق شرط السوية Normality Condition ، وشرط التعامد Orthogonality Condition كما يلي:

$$W_1 + W_2 = 1$$

$$-(1-\beta) W_1 + W_2 + W_3 - (1-\beta) W_4 = 0$$

هما معادلتين خطيتين في أربعة مجاهيل بحلها معاً نحصل على :

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= \frac{1 + W_3 - (1-\beta) W_4}{2-\beta} \\ W_2 &= \frac{(1-\beta)(1 + W_4) - W_3}{2-\beta} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

بالتعويض عن قيمة W_1, W_2 في العلاقة (2.6) نحصل على الدالة البديلة (Dual Function) كما يلي :

$$g(W_3, W_4) = \left(\frac{(2-\beta) \alpha C_0}{1 + W_3 - (1-\beta) W_4} \right)^{\frac{1 + W_3 - (1-\beta) W_4}{2-\beta}} \left(\frac{C_h (2-\beta)}{2 \{ (1-\beta)(1 + W_4) - W_3 \}} \right)^{\frac{(1-\beta)(1 + W_4) - W_3}{2-\beta}}$$

$$\left(\frac{1}{2K_1 W_3} \right)^{W_3} \left(\frac{\alpha}{K_2 W_4} \right)^{W_4} \quad (2.8)$$

ولإيجاد W_3, W_4 التي تجعل $g(W_3, W_4)$ أكبر ما يمكن نأخذ اللوغاريتم لطرفي المعادلة (2.8) كما يلي :

$$\begin{aligned} \ln g(W_3, W_4) = & \frac{1+W_3-(1-\beta)W_4}{2-\beta} \left[\ln(2-\beta) \alpha C_o - \ln\{1+W_3-(1-\beta)W_4\} \right] \\ & + \frac{(1-\beta)(1+W_4)-W_3}{2-\beta} \left[\ln\left(\frac{2-\beta}{2}\right) C_h - \ln\{(1-\beta)(1+W_4)-W_3\} \right] \\ & + W_3 \left[\ln \frac{1}{2K_1} - \ln W_3 \right] + W_4 \left[\ln \frac{\alpha}{K_2} - \ln W_4 \right] \end{aligned}$$

باشتقاق العلاقة $\ln g(W_3, W_4)$ بالنسبة لـ W_3, W_4 على الترتيب ومساواتهما بالصفر نحصل على :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln g(W_3, W_4)}{\partial W_3} = & \frac{1}{2-\beta} \left[\ln(2-\beta) \alpha C_o - \ln\{1+W_3-(1-\beta)W_4\} \right] - \left(\frac{1}{2-\beta} \right) \\ & - \frac{1}{2-\beta} \left[\ln\left(\frac{2-\beta}{2}\right) C_h - \ln\{(1-\beta)(1+W_4)-W_3\} \right] + \left(\frac{1}{2-\beta} \right) \\ & + \left[\ln \frac{1}{2K_1} - \ln W_3 \right] - 1 = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

and

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln g(W_3, W_4)}{\partial W_4} = & \frac{-(1-\beta)}{2-\beta} \left[\ln(2-\beta) \alpha C_o - \ln\{1+W_3-(1-\beta)W_4\} \right] + \left(\frac{1-\beta}{2-\beta} \right) \\ & + \frac{1-\beta}{2-\beta} \left[\ln\left(\frac{2-\beta}{2}\right) C_h - \ln\{(1-\beta)(1+W_4)-W_3\} \right] - \left(\frac{1-\beta}{2-\beta} \right) \\ & + \left[\ln \frac{\alpha}{K_2} - \ln W_4 \right] - 1 = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

بتبسيط المعادلتين (2.9) و (2.10) نجد أن :

$$\left(\frac{2\alpha C_o}{C_h} \right) \left(\frac{(1-\beta)(1+W_4)-W_3}{1+W_3-(1-\beta)W_4} \right) \left(\frac{1}{2K_1 W_3 e} \right)^{2-\beta} = 1 \quad (2.11)$$

and

$$\left(\frac{C_h}{2\alpha C_o} \right) \left(\frac{1+W_3-(1-\beta)W_4}{(1-\beta)(1+W_4)-W_3} \right) \left(\frac{\alpha}{K_2 W_4 e} \right)^{\frac{2-\beta}{1-\beta}} = 1 \quad (2.12)$$

بضرب العلاقتين (2.11) و (2.12) في بعضهما نحصل على :

$$\left. \begin{aligned} W_3 &= \left(\frac{1}{2K_1} \right) \left(\frac{\alpha}{K_2 e^{2-\beta}} \right)^{\frac{1}{1-\beta}} \left(\frac{1}{W_4} \right)^{\frac{1}{1-\beta}} \\ W_4 &= \left(\frac{1}{2K_1} \right)^{1-\beta} \left(\frac{1}{W_3} \right)^{1-\beta} \left(\frac{\alpha}{K_2 e^{2-\beta}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

بالتعويض عن قيمة W_3 , W_4 في كل من (2.11) و (2.12) نجد أن :

$$f_1(W_3) = W_3^{4-2\beta} + W_3^{3-2\beta} - \left((1-\beta)A_1 - B_1 \right) W_3^{2-\beta} - (1-\beta)B_1 W_3^{1-\beta} - (1-\beta)A_1 B_1 = 0 \quad (2.14)$$

and

$$f_2(W_4) = W_4^{\frac{4-2\beta}{1-\beta}} + W_4^{\frac{3-\beta}{1-\beta}} - \left(\frac{A_2}{1-\beta} - B_2 \right) W_4^{\frac{2-\beta}{1-\beta}} - \frac{B_2}{1-\beta} W_4^{\frac{1}{1-\beta}} - \frac{1}{1-\beta} A_2 B_2 = 0 \quad (2.15)$$

حيث :

$$A_1 = \left(\frac{1}{2K_1} \right)^{1-\beta} \left(\frac{\alpha}{K_2 e^{2-\beta}} \right) \quad , \quad A_2 = \left(\frac{1}{2K_1} \right) \left(\frac{\alpha}{K_2 e^{2-\beta}} \right)^{\frac{1}{1-\beta}}$$

$$B_1 = \left(\frac{2\alpha C_o}{C_h} \right) \left(\frac{1}{2K_1 e} \right)^{2-\beta} \quad , \quad B_2 = \left(\frac{C_h}{2\alpha C_o} \right) \left(\frac{\alpha}{K_2 e} \right)^{\frac{2-\beta}{1-\beta}}$$

نلاحظ أن :

$$f_1(0) = -(1-\beta)A_1 B_1 < 0$$

and

$$f_2(0) = -\frac{A_2 B_2}{(1-\beta)} < 0$$

كما أن :

$$f_1(1) = 2 + \beta B_1 - (1-\beta)A_1(1+B_1) > 0$$

and

$$f_2(1) = 2 + B_2 - \frac{B_2}{(1-\beta)} - \frac{A_2}{(1-\beta)}(1+B_2) > 0$$

أي أنه يوجد جذرين $W_j \in (0,1)$ حيث $j = 3, 4$. وللتأكد من أن الجذرين المحسوبين من المعادلتين (2.14) و (2.15) يعظمان دالة الهدف للمشكلة البديلة $g(W_3, W_4)$ ، نوجد المشتقة الثانية لـ $\ln g(W_3, W_4)$ بالنسبة لـ W_3, W_4 على الترتيب كما يلي :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln g(W_3, W_4)}{\partial W_3^2} &= \left[\frac{1}{2-\beta} \frac{-1}{(1+W_3-(1-\beta)W_4)} - \frac{1}{2-\beta} \frac{+1}{((1-\beta)(1+W_4)-W_3)} - \frac{1}{W_3} \right], \\ &= -\left(\frac{1}{2-\beta} \right)^2 \left[\frac{1}{W_1 W_2} + (2-\beta)^2 \frac{1}{W_3} \right] < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln g(W_3, W_4)}{\partial W_4^2} &= \left[\left(\frac{-(1-\beta)}{2-\beta} \right) \frac{(1-\beta)}{(1+W_3-(1-\beta)W_4)} + \frac{1-\beta}{2-\beta} \frac{-(1-\beta)}{((1-\beta)(1+W_4)-W_3)} - \frac{1}{W_4} \right], \\ &= -\left(\frac{1-\beta}{2-\beta} \right)^2 \left[\frac{1}{W_1 W_2} + \left(\frac{2-\beta}{1-\beta} \right)^2 \frac{1}{W_4} \right] < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln g(W_3, W_4)}{\partial W_3 \partial W_4} &= \frac{1}{2-\beta} \left[\frac{(1-\beta)}{(1+W_3-(1-\beta)W_4)} \right] - \frac{1}{(2-\beta)} \left[\frac{-(1-\beta)}{((1-\beta)(1+W_4)-W_3)} \right], \\ &= \left(\frac{1-\beta}{(2-\beta)^2} \right) \left[\frac{1}{W_1 W_2} \right] > 0 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ln g(W_3, W_4)}{\partial W_4 \partial W_3} &= \frac{-(1-\beta)}{2-\beta} \left[\frac{-1}{(1+W_3-(1-\beta)W_4)} \right] + \frac{1-\beta}{(2-\beta)} \left[\frac{1}{((1-\beta)(1+W_4)-W_3)} \right], \\ &= \left(\frac{1-\beta}{(2-\beta)^2} \right) \left[\frac{1}{W_1 W_2} \right] > 0\end{aligned}$$

ومن ثم فإن :

$$\begin{aligned}\Delta \left(\frac{\partial^2 \ln g(W_3, W_4)}{\partial W_3 \partial W_4} \right)^2 &= \left(\frac{\partial^2 \ln g(W_3, W_4)}{\partial W_3^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \ln g(W_3, W_4)}{\partial W_4^2} \right) \\ &= \left[\left(\frac{1-\beta}{(2-\beta)^2} \frac{1}{W_1 W_2} \right)^2 - \left\{ \left(\frac{1}{2-\beta} \right) \left(\frac{1}{W_1 W_2} + (2-\beta)^2 \frac{1}{W_3} \right) \right\} \left\{ \left(\frac{1-\beta}{2-\beta} \right) \left(\frac{1}{W_1 W_2} + \left(\frac{2-\beta}{1-\beta} \right)^2 \frac{1}{W_4} \right) \right\} \right] < 0\end{aligned}$$

مما يثبت أن الجذرين المحسوبين من المعادلتين (2.15) و (2.14) يعظمان دالة الهدف للمشكلة البديلة $g(W_3, W_4)$ ، وعليه فإن W_3^*, W_4^* يمثلان الحل الأمثل للمعادلتين (2.15) ، (2.14) على الترتيب . ويتم الحصول على قيم W_1^*, W_2^* بالتعويض عن W_3^*, W_4^* في العلاقة (2.7) .

لإيجاد كمية الطلب المثلى Q^* وطول دورة المخزون المثلى T_c^* نستخدم نتائج نظرية [6] *Duffin et al* للبرمجة الهندسية كالاتي :

$$\alpha C_o Q^{*(1-\beta)} = W_1^* g(W_3^*, W_4^*)$$

and

$$\frac{C_h Q^*}{2} = W_2^* g(W_3^*, W_4^*)$$

بحل هاتين العلاقتين معاً نحصل على الكمية المثلى لدورة المخزون :

$$Q^* = \left(\frac{2\alpha C_o W_2^*}{C_h W_1^*} \right)^{\frac{1}{2-\beta}} = \left(\frac{2\alpha C_o ((1-\beta)(1+W_4^*)-W_3^*)}{C_h (1+W_3^*-(1-\beta)W_4^*)} \right)^{\frac{1}{2-\beta}} \quad (2.16)$$

كما أن معدل الطلب الأمثل يكون :

$$D(Q^*) = \alpha \left(\frac{2\alpha C_o ((1-\beta)(1+W_4^*) - W_3^*)}{C_h (1+W_3^* - (1-\beta) W_4^*)} \right)^{\frac{\beta}{2-\beta}} \quad (2.17)$$

طول دورة المخزون المثلى :

$$\begin{aligned} T_c^* &= \frac{Q^*}{D(Q^*)} = \frac{1}{\alpha} Q^{*(1-\beta)} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{2\alpha C_o W_2^*}{C_h W_1^*} \right)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}} \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{2\alpha C_o ((1-\beta)(1+W_4^*) - W_3^*)}{C_h (1+W_3^* - (1-\beta) W_4^*)} \right)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

بالتعويض عن قيمة Q^* في (2.4) نحصل على تكلفة المخزون الكلية الصغرى :

$$\begin{aligned} \min TC(Q^*) &= \alpha C_o \left(\frac{2\alpha C_o W_2^*}{C_h W_1^*} \right)^{\frac{-(1-\beta)}{2-\beta}} + \frac{C_h}{2} \left(\frac{2\alpha C_o W_2^*}{C_h W_1^*} \right)^{\frac{1}{2-\beta}} \\ &= \left(\frac{1}{2} (\alpha C_o)^{\frac{1}{1-\beta}} C_h \right)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}} \left[\left(\frac{W_1^*}{W_2^*} \right)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}} + \left(\frac{W_2^*}{W_1^*} \right)^{\frac{1}{2-\beta}} \right] \\ &= \left(\frac{1}{2} (\alpha C_o)^{\frac{1}{1-\beta}} C_h \right)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}} \left[\left(\frac{(1+W_3^* - (1-\beta) W_4^*)}{((1-\beta)(1+W_4^*) - W_3^*)} \right)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}} + \left(\frac{((1-\beta)(1+W_4^*) - W_3^*)}{(1+W_3^* - (1-\beta) W_4^*)} \right)^{\frac{1}{2-\beta}} \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

SPECIAL CASES

٢-١-٢- حالات خاصة

يمكن استنتاج بعض نماذج المخزون السلعي كحالات خاصة كالتالي :

الحالة (١) :

نفرض أن $W_4 \rightarrow 0 \Leftrightarrow K_2 \rightarrow \infty$ and $B_2 \rightarrow 0$ ، نحصل على نموذج المخزون السلعي ذي الصنف الواحد من السلع مع تغير معدل الطلب تزايدياً بحالة الاعتماد تحت قيد خطي واحد وهو متوسط مستوى المخزون . وبالتالي فإن العلاقات (2.4) ، (2.5) ، (2.19) \rightarrow (2.14) تأخذ الصور التالية :

$$\min TC(Q) = \alpha C_o Q^{-(1-\beta)} + \frac{1}{2} C_h Q$$

$$s.t. \quad \frac{Q}{2K_1} \leq 1$$

كما أن

$$f(W_3) = W_3^{3-\beta} + W_3^{2-\beta} + B_1 W_3 - (1-\beta)B_1 = 0$$

حيث :

$$B_1 = \left(\frac{2\alpha C_o}{C_h} \right) \left(\frac{1}{2K_1 e} \right)^{2-\beta}, \quad 0 \leq \beta < 1$$

كمية الطلب المثلى :

$$Q^* = \left(\frac{2\alpha C_o (1-\beta - W_3^*)}{C_h (1 + W_3^*)} \right)^{\frac{1}{2-\beta}}$$

كما أن معدل الطلب الأمثل :

$$D(Q^*) = \alpha \left(\frac{2\alpha C_o (1-\beta - W_3^*)}{C_h (1 + W_3^*)} \right)^{\frac{\beta}{2-\beta}}$$

طول دورة المخزون المثلى :

$$T_c^* = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{2\alpha C_o (1-\beta - W_3^*)}{C_h (1 + W_3^*)} \right)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}}$$

وأيضاً تكلفة المخزون الكلية الصغرى :

$$\min TC(Q^*) = \left(\frac{1}{2} (\alpha C_o)^{\frac{1}{1-\beta}} C_h \right)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}} \left[\left(\frac{1+W_3^*}{1-\beta-W_3^*} \right)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}} + \left(\frac{1-\beta-W_3^*}{1+W_3^*} \right)^{\frac{1}{2-\beta}} \right]$$

الحالة (٢) :

نفرض أن $(A_1 \rightarrow 0 \text{ and } B_1 \rightarrow 0) \Rightarrow W_3 \rightarrow 0 \Leftarrow K_1 \rightarrow \infty$ ، نحصل على نموذج المخزون السلعي ذي الصنف الواحد من السلع مع تغير معدل الطلب ترايدياً بحالة الاعتماد تحت قيد غير خطي واحد وهو عدد الطلبات خلال وحدة الزمن . وبالتالي فإن العلاقات (2.4) ، (2.5) ، (2.19) \rightarrow (2.14) تأخذ الصور التالية :

$$\min TC(Q) = \alpha C_o Q^{-(1-\beta)} + \frac{1}{2} C_h Q$$

$$s.t. \quad \frac{\alpha Q^{-(1-\beta)}}{K_2} \leq 1$$

كما أن

$$f(W_4) = W_4^{\frac{3-2\beta}{1-\beta}} + W_4^{\frac{2-\beta}{1-\beta}} + B_2 W_4 - \frac{B_2}{(1-\beta)} = 0$$

حيث :

$$B_2 = \left(\frac{C_h}{2\alpha C_o} \right) \left(\frac{\alpha}{K_2 e} \right)^{\frac{2-\beta}{1-\beta}}, \quad 0 \leq \beta < 1$$

كمية الطلب المثلى :

$$Q^* = \left(\frac{2\alpha C_o ((1-\beta)(1+W_4^*))}{C_h (1-(1-\beta)W_4^*)} \right)^{\frac{1}{2-\beta}}$$

كما أن معدل الطلب الأمثل :

$$D(Q^*) = \alpha \left(\frac{2\alpha C_o (1-\beta)(1+W_4^*)}{C_h (1-(1-\beta)W_4^*)} \right)^{\frac{\beta}{2-\beta}}$$

طول دورة المخزون المثلى :

$$T_c^* = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{2\alpha C_o (1-\beta)(1+W_4^*)}{C_h (1-(1-\beta)W_4^*)} \right)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}}$$

تكلفة المخزون الكلية الصغرى :

$$\min TC(Q^*) = \left(\frac{1}{2} (\alpha C_o)^{\frac{1}{1-\beta}} C_h \right)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}} \left[\left(\frac{1-(1-\beta)W_4^*}{(1-\beta)(1+W_4^*)} \right)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}} + \left(\frac{(1-\beta)(1+W_4^*)}{1-(1-\beta)W_4^*} \right)^{\frac{1}{2-\beta}} \right]$$

الحالة (٣) :

نفرض أن $(A_1 = A_2 = B_1 = B_2 \rightarrow 0)$, $(W_3 \rightarrow 0, W_4 \rightarrow 0) \Leftarrow K_1, K_2 \rightarrow \infty$ ، نحصل على نموذج المخزون السلعي ذي الصنف الواحد من السلع بتغير معدل الطلب تزايدياً بحالة الاعتماد بدون قيود . وبالتالي فإن العلاقات (2.4) ، (2.5) ، (2.19) \rightarrow (2.14) تأخذ الصور التالية :

$$\min TC(Q) = \alpha C_o Q^{-(1-\beta)} + \frac{1}{2} C_h Q$$

كمية الطلب المثلى :

$$Q^* = \left(\frac{2\alpha C_o (1-\beta)}{C_h} \right)^{\frac{1}{2-\beta}}$$

أيضاً معدل الطلب الأمثل :

$$D(Q^*) = \alpha \left(\frac{2\alpha C_o (1-\beta)}{C_h} \right)^{\frac{\beta}{2-\beta}}$$

طول دورة المخزون المثلى :

$$T_c^* = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{2\alpha C_o (1-\beta)}{C_h} \right)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}}$$

أيضاً تكلفة المخزون الكلية الصغرى :

$$\min TC(Q^*) = \left(\frac{1}{2} C_h (\alpha C_o)^{\frac{1}{1-\beta}} \right)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}} \left[\left(\frac{1}{1-\beta} \right)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}} + (1-\beta)^{\frac{1}{2-\beta}} \right]$$

يمكن الحصول على نفس النتائج السابقة باستخدام الطريقة التقليدية وذلك باشتقاق دالة التكلفة الكلية للمخزون بالنسبة إلى Q عندما $Q=Q^*$ ومساواتها بالصفر :

$$\left. \frac{\partial TC(Q)}{\partial Q} \right|_{Q=Q^*} = - (1-\beta) \alpha C_o Q^{-(2-\beta)} + \frac{C_h}{2} \Big|_{Q=Q^*} = 0$$

كمية الطلب المثلى :

$$Q^* = \left(\frac{2 \alpha C_o (1-\beta)}{C_h} \right)^{\frac{1}{2-\beta}}$$

كما أن معدل الطلب الأمثل :

$$D(Q^*) = \alpha \left(\frac{2 \alpha C_o (1-\beta)}{C_h} \right)^{\frac{\beta}{2-\beta}}$$

طول دورة المخزون المثلى :

$$T_c^* = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{2 \alpha C_o (1-\beta)}{C_h} \right)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}}$$

تكلفة المخزون الكلية الصغرى :

$$\min TC(Q^*) = \left(\frac{1}{2} C_h (\alpha C_o)^{\frac{1}{1-\beta}} \right)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}} \left[\left(\frac{1}{1-\beta} \right)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}} + (1-\beta)^{\frac{1}{2-\beta}} \right]$$

الحالة (٤) :

نفرض أن $D(Q) = \alpha = D \Leftrightarrow \beta = 0$ مقدار ثابت ، نحصل على نموذج المخزون السلعي ذي الصنف الواحد من السلع مع ثبات معدل الطلب تحت قيدين أحدهما خطي وهو متوسط مستوى التخزين والآخر غير خطي وهو عدد الطلبات خلال وحدة الزمن . وبالتالي فإن العلاقات (2.4) ، (2.5) ، (2.19) \rightarrow (2.14) تأخذ الصور التالية :

$$\min TC(Q) = D C_o Q^{-1} + \frac{1}{2} Q C_h$$

$$s . t . \quad \frac{Q}{2 K_1} \leq 1 ,$$

$$\frac{D}{Q K_2} \leq 1$$

كما أن :

$$f_1(W_3) = W_3^4 + W_3^3 + (B_1' - A) W_3^2 - B_1' W_3 - A B_1' = 0$$

and

$$f_2(W_4) = W_4^4 + W_4^3 + (B_2' - A) W_4^2 - B_2' W_4 - A B_2' = 0$$

حيث :

$$B_1' = \left(\frac{2DC_o}{C_h} \right) \left(\frac{1}{2K_1 e} \right)^2 , \quad B_2' = \left(\frac{C_h}{2DC_o} \right) \left(\frac{D}{K_2 e} \right)^2 , \quad A = \frac{D}{2K_1 K_2 e^2}$$

كمية الطلب المثلى :

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 D C_o (1 - W_3^* + W_4^*)}{C_h (1 + W_3^* - W_4^*)}}$$

طول دورة المخزون المثلى :

$$T_c^* = \frac{1}{D} \sqrt{\frac{2 D C_o (1 - W_3^* + W_4^*)}{C_h (1 + W_3^* - W_4^*)}} = \sqrt{\frac{2 C_o (1 - W_3^* + W_4^*)}{D C_h (1 + W_3^* - W_4^*)}}$$

تكلفة المخزون الكلية الصغرى :

$$\min TC(Q^*) = \sqrt{\frac{D C_o C_h}{2 W_1^* W_2^*}} = \sqrt{\frac{2 D C_o C_h}{(1 + W_3^* - W_4^*)(1 - W_3^* + W_4^*)}}$$

الحالة (٥) :

نفرض أن $W_3, W_4 \rightarrow 0 \Leftrightarrow K_1, K_2 \rightarrow \infty$ ، كما أن $\beta = 0$ ، $D(Q) = \alpha = D$ مقدار ثابت ، نحصل على النموذج الكلاسيكي لويلسون كالتالي :

$$\min TC(Q) = \frac{D C_o}{Q} + \frac{1}{2} Q C_h$$

كمية الطلب المثلى:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 D C_o}{C_h}}$$

طول دورة المخزون المثلى :

$$T_c^* = \frac{Q^*}{D} = \sqrt{\frac{2 C_o}{D C_h}}$$

وأيضاً تكلفة المخزون الكلية الصغرى :

$$\min TC(Q^*) = \sqrt{2 D C_o C_h}$$

NUMERICAL EXAMPLE

٢-٢-٢ - مثال عددي (١)

المطلوب إيجاد معدل الطلب الأمثل ، وطول دورة التخزين المثلى ، وتكلفة المخزون الكلية الصغرى لمشكلة التخزين لصنف واحد من السلع لقيم α, β المختلفة . نفرض القيم التالية لمعالم النموذج :

$$C_o = 150 \text{ unit} , C_h = 0.24 \text{ unit} , K_1 = 2000 \text{ unit} , K_2 = 4000 \text{ unit}$$

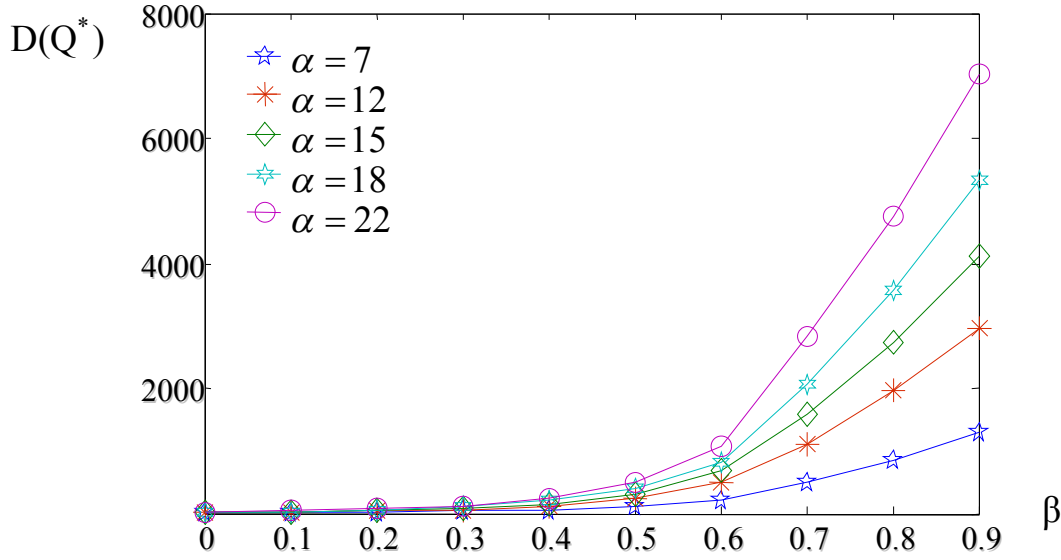
حيث K_1 هو الحد الأقصى لمتوسط مستوى المخزون ، K_2 هو الحد الأقصى لعدد الطلبات لكل دورة زمنية .

بالتعويض عن قيم α, β المختلفة ، نستخدم العلاقات (2.15) ، (2.14) لإيجاد W_3^*, W_4^* ، وذلك للحصول على قيم W_1^*, W_2^* من العلاقات (2.7) . نحصل على القيم المثلى لـ $\min TC(Q^*)$ ، T_c^* ، $D(Q^*)$ كما بالجدول (٢-١) .

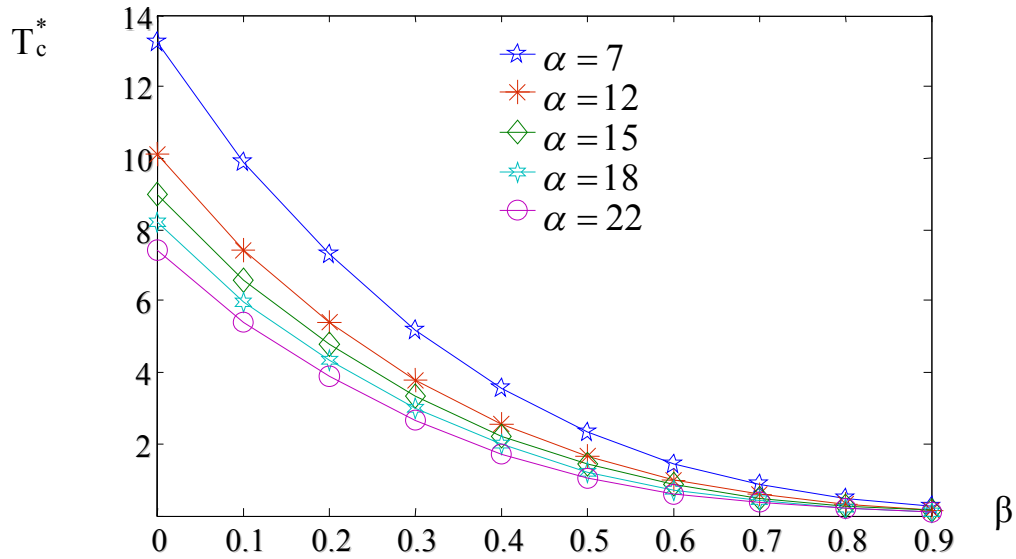
$\beta \backslash \alpha$	7			12			15			18			22		
	D*	T _c *	minTC	D*	T _c *	minTC	D*	T _c *	minTC	D*	T _c *	minTC	D*	T _c *	minTC
0	7	13.249	22.450	12	10.093	29.395	15	9.015	32.865	18	8.220	36.003	22	7.425	39.804
0.1	11.211	9.909	28.469	19.765	7.437	37.809	24.994	6.602	42.521	30.277	5.989	46.805	37.405	5.397	52.018
0.2	18.721	7.308	36.942	34.074	5.417	49.839	43.661	4.785	56.419	53.466	4.324	62.431	66.821	3.868	69.794
0.3	32.614	5.179	49.231	61.489	3.772	67.598	79.949	3.308	77.080	99.076	2.971	85.806	125.458	2.640	96.557
0.4	59.585	3.547	67.647	116.88	2.533	94.744	154.482	2.203	108.924	194.024	1.966	122.07	249.341	1.734	138.381
0.5	114.49	2.336	96.298	234.899	1.631	137.963	316.298	1.405	160.06	386.242	1.192	181.081	501.82	1.036	207.109
0.6	221.124	1.427	142.955	499.399	1.0006	209.86	686.816	0.853	246.122	802.222	0.698	282.019	1082.56	0.610	325.043
0.7	485.672	0.879	221.872	1112.49	0.580	335.867	1568.15	0.489	398.761	2075.9	0.425	458.798	2826.72	0.364	535.378
0.8	862.731	0.475	364.412	1958.24	0.297	573.608	2726.34	0.244	692.871	3558	0.208	809.02	4747.63	0.174	960.24
0.9	1296.6	0.255	627.495	2957.56	0.153	1030.7	4102.73	0.124	1267.39	5322.91	0.104	1501.67	7037.47	0.086	1811.39

جدول (٢-١) تأثير قيم α , β على القيم الاقتصادية المثلى

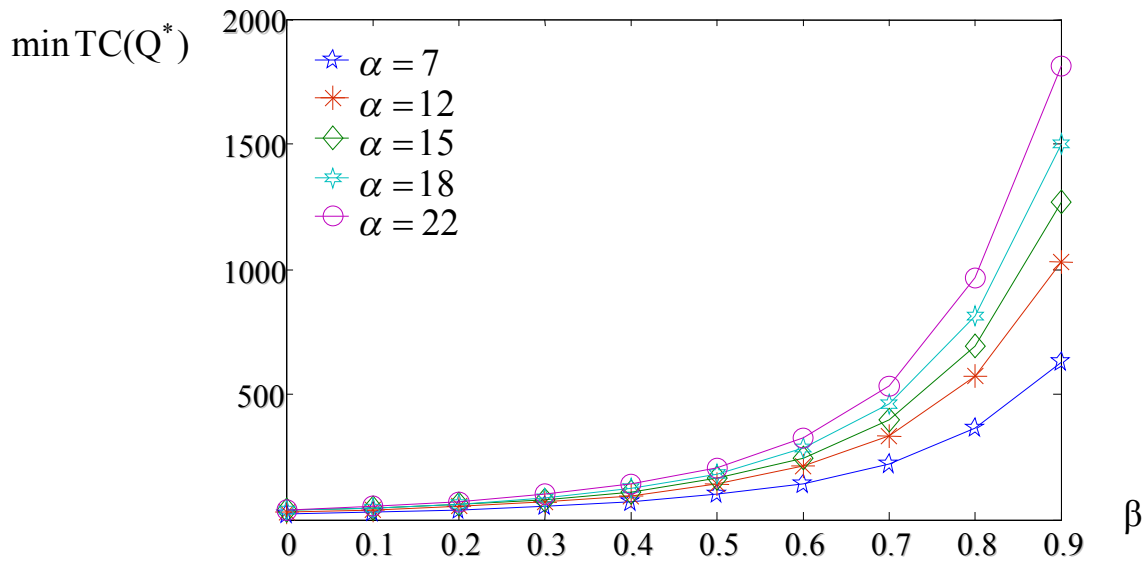
ويمكن توضيح حل هذا النموذج العددي لتمثيل العلاقة بين
 $(\min TC(Q^*), T_c^*, D(Q^*))$ مقابل β . وأيضاً $(\min TC(Q^*), T_c^*)$ مقابل $D(Q^*)$ كما
 بالرسومات (٢-٢) — (٦-٢) التالية :



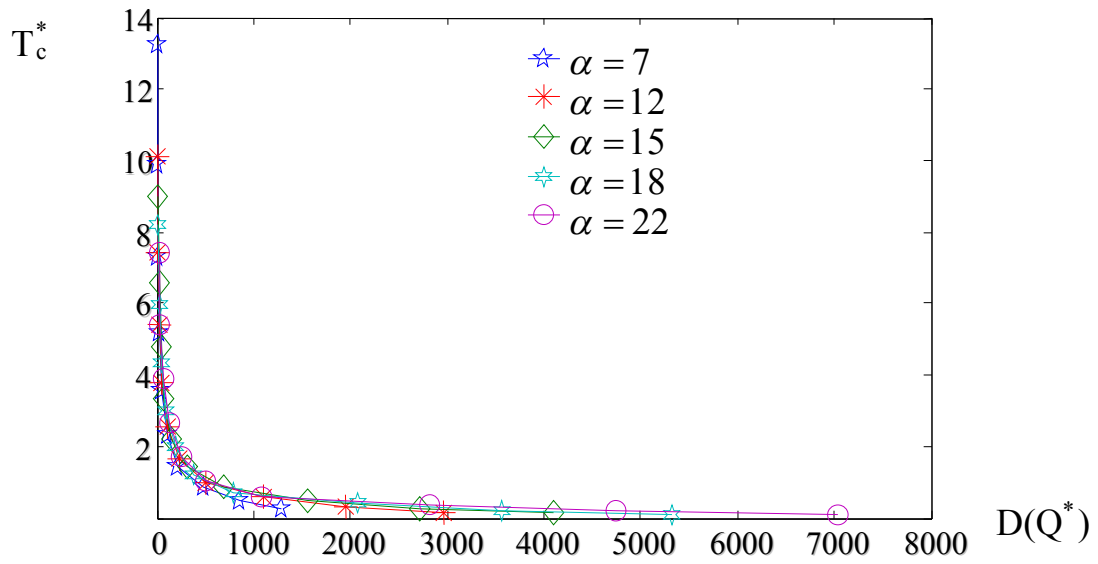
شكل (٢-٢) العلاقة بين $D(Q^*)$ و β



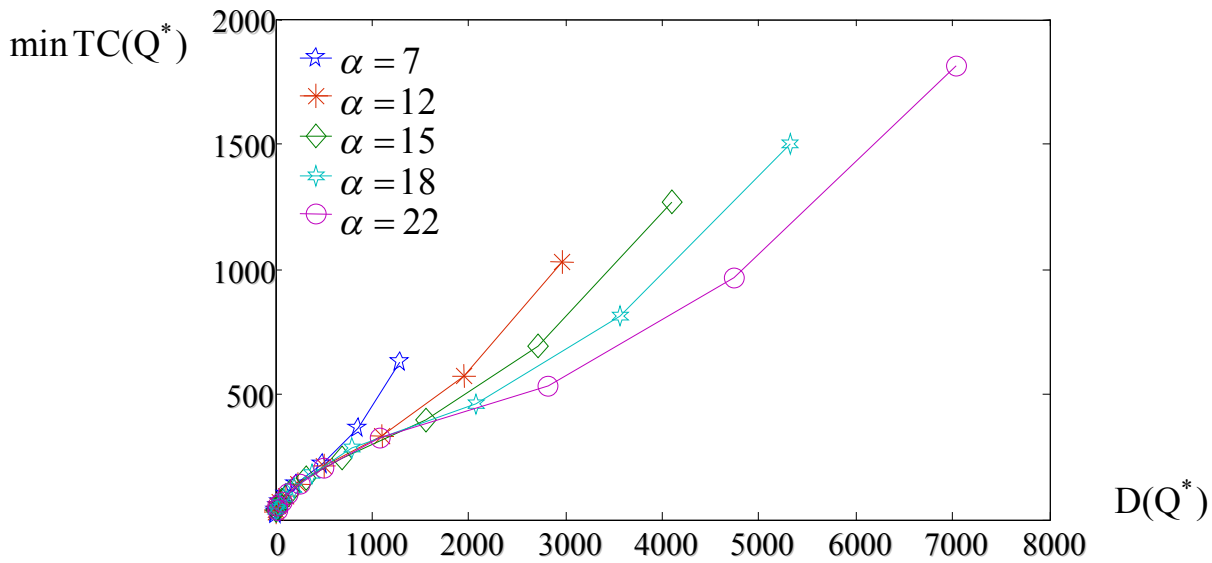
شكل (٣-٢) العلاقة بين T_c^* و β



شكل (٢-٤) العلاقة بين $\min TC(Q^*)$ و β



شكل (٢-٥) العلاقة بين T_c^* و $D(Q^*)$



شكل (٦-٢) العلاقة بين $\min TC(Q^*)$ و $D(Q^*)$

٣-٢-٢-٢ - الخلاصة :

من جدول (١-٢) نجد أن هناك علاقة طردية بين معدل الطلب الأمثل $D(Q^*)$ وقيمة β ويوضح هذه العلاقة شكل (٢-٢). أما العلاقة بين طول دورة المخزون المثلى T_c^* وبين قيمة β فهي علاقة عكسية موضحة بشكل (٣-٢)، أخيراً العلاقة بين تكلفة المخزون الكلية الصغرى $\min TC(Q^*)$ وبين قيمة β هي علاقة طردية كما بشكل (٤-٢). أما العلاقة بين معدل الطلب الأمثل $D(Q^*)$ وبين طول دورة المخزون المثلى T_c^* فهي عكسية موضحة بشكل (٥-٢)، ونلاحظ أيضاً أن العلاقة بين معدل الطلب الأمثل $D(Q^*)$ وبين تكلفة المخزون الكلية الصغرى $\min TC(Q^*)$ علاقة طردية يوضحها شكل (٦-٢).

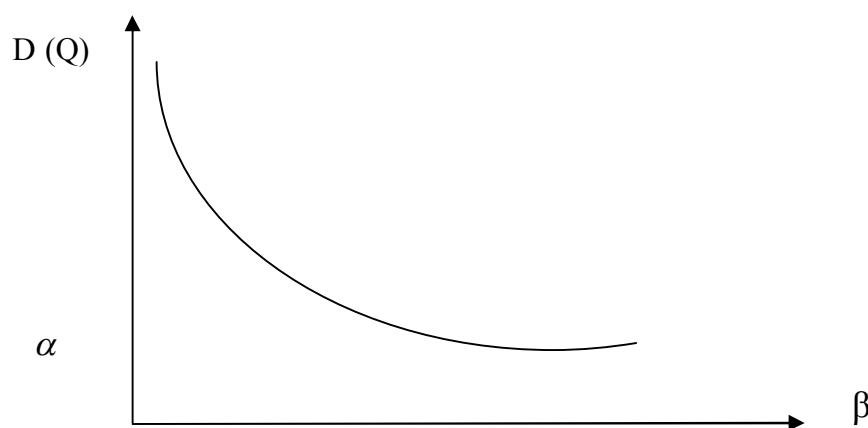
٢-٣- نموذج المخزون السلعي ذي الصنف الواحد من السلع مع معدل الطلب بحالة الاعتماد التناقصية بقيدتين أحدهما خطي والآخر غير خطي

Single-Item Inventory Model With Decreasing State-Dependent Demand Rate Under Linear and Non-Linear Constraints

في هذا النموذج نفترض معدل الطلب دالة متصلة تناقصية في كمية الطلب Q بالصيغة الآتية :

$$D(Q) = \alpha Q^{-\beta} \quad \alpha > 0, \quad \beta \geq 1 \quad (2.20)$$

ويمكن توضيح العلاقة بين $D(Q)$ مقابل β كما بالشكل التالي :



شكل (٢-٧) العلاقة بين $D(Q)$ و β

بإدخال دالة معدل الطلب على النموذج الذي تم معالجته سابقاً نحصل على :

$$\min TC(Q) = \alpha C_o Q^{-(\beta+1)} + \frac{1}{2} Q C_h \quad (2.21)$$

مع القيدتين :

$$\left. \begin{aligned} \frac{Q}{2 K_1} &\leq 1 \\ \frac{\alpha Q^{-(\beta+1)}}{K_2} &\leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

نستخدم أسلوب البرمجة الهندسية بنفس الطريقة التي استخدمت في نموذج (٢-٢) نحصل على النتائج الآتية :

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= \frac{1 + W_3 - (\beta + 1)W_4}{\beta + 2} \\ W_2 &= \frac{(\beta + 1)(1 + W_4) - W_3}{\beta + 2} \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

$$\left. \begin{aligned} W_3 &= \left(\frac{1}{2K_1} \right) \left(\frac{\alpha}{K_2 W_4 e^{\beta+2}} \right)^{\frac{1}{\beta+1}} \\ W_4 &= \left(\frac{1}{2K_1 W_3} \right)^{\beta+1} \left(\frac{\alpha}{K_2 e^{\beta+2}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

$$f_1(W_3) = W_3^{2\beta+4} + W_3^{2\beta+3} - [(\beta+1)A_3 - B_3] W_3^{\beta+2} - (\beta+1)B_3 W_3^{\beta+1} - (\beta+1)A_3 B_3 = 0 \quad (2.25)$$

and

$$f_2(W_4) = W_4^{\frac{2\beta+4}{\beta+1}} + W_4^{\frac{\beta+3}{\beta+1}} - \left[\frac{A_4}{(\beta+1)} - B_4 \right] W_4^{\frac{\beta+2}{\beta+1}} - \frac{B_4}{(\beta+1)} W_4^{\frac{1}{\beta+1}} - \frac{1}{(\beta+1)} A_4 B_4 = 0 \quad (2.26)$$

حيث :

$$A_3 = \left(\frac{1}{2K_1} \right)^{\beta+1} \left(\frac{\alpha}{K_2 e^{\beta+2}} \right) \quad , \quad A_4 = \left(\frac{1}{2K_1} \right) \left(\frac{\alpha}{K_2 e^{\beta+2}} \right)^{\frac{1}{\beta+1}}$$

$$B_3 = \left(\frac{2\alpha C_0}{C_h} \right) \left(\frac{1}{2K_1 e} \right)^{\beta+2} \quad , \quad B_4 = \left(\frac{C_h}{2\alpha C_0} \right) \left(\frac{\alpha}{K_2 e} \right)^{\frac{\beta+2}{\beta+1}}$$

الكمية المثلى لدورة المخزون :

$$Q^* = \left(\frac{2\alpha C_o W_2^*}{C_h W_1^*} \right)^{\frac{1}{\beta+2}} = \left(\frac{2\alpha C_o ((\beta+1)(1+W_4^*) - W_3^*)}{C_h (1+W_3^* - (\beta+1)W_4^*)} \right)^{\frac{1}{\beta+2}} \quad (2.27)$$

معدل الطلب الأمثل :

$$\begin{aligned} D(Q^*) &= \alpha Q^{*(-\beta)} = \alpha \left(\frac{2\alpha C_o W_2^*}{C_h W_1^*} \right)^{\frac{-\beta}{\beta+2}} \\ &= \alpha \left(\frac{2\alpha C_o ((\beta+1)(1+W_4^*) - W_3^*)}{C_h (1+W_3^* - (\beta+1)W_4^*)} \right)^{\frac{-\beta}{\beta+2}} \end{aligned} \quad (2.28)$$

طول دورة المخزون المثلى :

$$\begin{aligned} T_c^* &= \frac{Q^*}{D(Q)} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{2\alpha C_o W_2^*}{C_h W_1^*} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}} \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{2\alpha C_o ((\beta+1)(1+W_4^*) - W_3^*)}{C_h (1+W_3^* - (\beta+1)W_4^*)} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}} \end{aligned} \quad (2.29)$$

بالتعويض عن قيمة Q^* في $\min TC(Q^*)$ نحصل على تكلفة المخزون الكلية الصغرى :

$$\begin{aligned} \min TC(Q^*) &= \left(\frac{C_h (\alpha C_o)^{\frac{1}{1+\beta}} W_1^*}{2 W_2^*} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}} + \frac{C_h}{2} \left(\frac{2\alpha C_o W_2^*}{C_h W_1^*} \right)^{\frac{1}{\beta+2}} \\ &= \left(\frac{1}{2} C_h (\alpha C_o)^{\frac{1}{\beta+1}} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}} \left\{ \left(\frac{1+W_3^* - (\beta+1)W_4^*}{(\beta+1)(1+W_4^*) - W_3^*} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}} + \left(\frac{(\beta+1)(1+W_4^*) - W_3^*}{1+W_3^* - (\beta+1)W_4^*} \right)^{\frac{1}{\beta+2}} \right\} \end{aligned} \quad (2.30)$$

كحالة خاصة نفرض أن $W_3, W_4 \rightarrow 0 \Leftrightarrow K_1, K_2 \rightarrow \infty$ ، كما
 أن $D(Q) = \alpha$ $D \Leftrightarrow \beta = 0$ مقدار ثابت ، نحصل على النتائج التالية :

$$\min TC(Q) = \frac{D C_o}{Q} + \frac{1}{2} Q C_h$$

كمية الطلب المثلى :

$$Q^* = \sqrt{\frac{2D C_o}{C_h}}$$

طول دورة المخزون المثلى:

$$T_c^* = \frac{Q^*}{D} = \sqrt{\frac{2 C_o}{D C_h}}$$

وأيضاً تكلفة المخزون الكلية الصغرى :

$$\min TC(Q^*) = \sqrt{2 D C_o C_h}$$

وهي نفس نتائج النموذج الكلاسيكي لويلسون .

NUMERICAL EXAMPLE

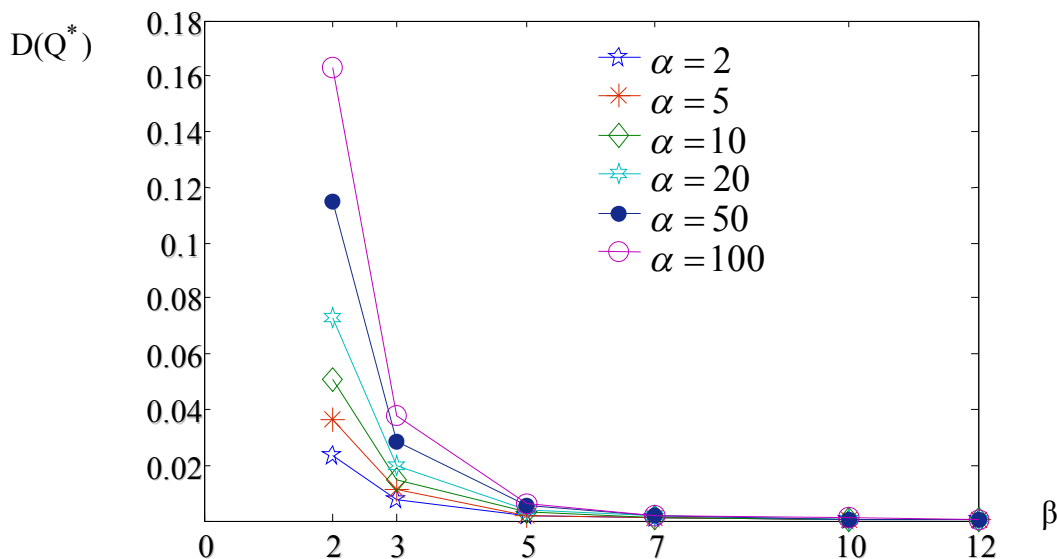
٢-٣-١ - مثال عددي (٢)

بتطبيق نفس بيانات المثال العددي (١) في الفقرة (٢-٢-٢) لقيم
 $\alpha = 2, 5, 10, 20, 50, 100$ وأيضاً لقيم $\beta = 2, 3, 5, 7, 10, 12$ نحصل على الجدول الآتي :

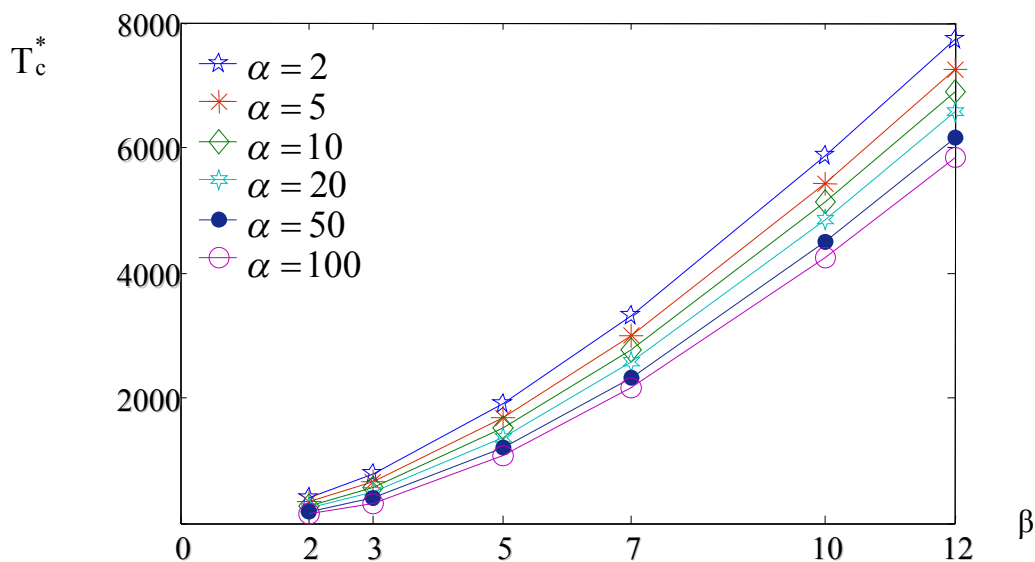
$\alpha \backslash \beta$	2			5			10			20			50			100		
	D*	T _c *	minTC	D*	T _c *	minTC	D*	T _c *	minTC	D*	T _c *	minTC	D*	T _c *	minTC	D*	T _c *	minTC
2	0.0231	402.619	1.488	0.0365	320.121	1.872	0.051	269.134	2.226	0.0731	226.259	2.647	0.115	179.867	3.329	0.163	151.195	3.959
3	0.0079	791.987	0.946	0.011	659.294	1.136	0.015	573.89	1.305	0.0200	499.541	1.5	0.0288	415.817	1.801	0.038	361.931	2.069
5	0.0020	1898.1	0.552	0.002	1665.13	0.630	0.003	1508.08	0.695	0.0040	1365.84	0.768	0.00521	1198.18	0.875	0.0063	1085.15	0.966
7	0.0009	3326.5	0.405	0.001	3004.41	0.449	0.0012	2781.64	0.485	0.0015	2575.38	0.524	0.00184	2326	0.580	0.0021	2153.52	0.626
10	0.0003	5864.96	0.306	0.0004	5433.7	0.331	0.0005	5128.66	0.350	0.00058	4840.74	0.371	0.00068	4484.78	0.401	0.00076	4233	0.425
12	0.0002	7735.57	0.271	0.0003	7245.4	0.289	0.0003	6895.34	0.304	0.00037	6562.19	0.319	0.00042	6146.36	0.341	0.00047	5849.38	0.358

جدول (٢-٢) تأثير القيم α , β على القيم الاقتصادية المثلى

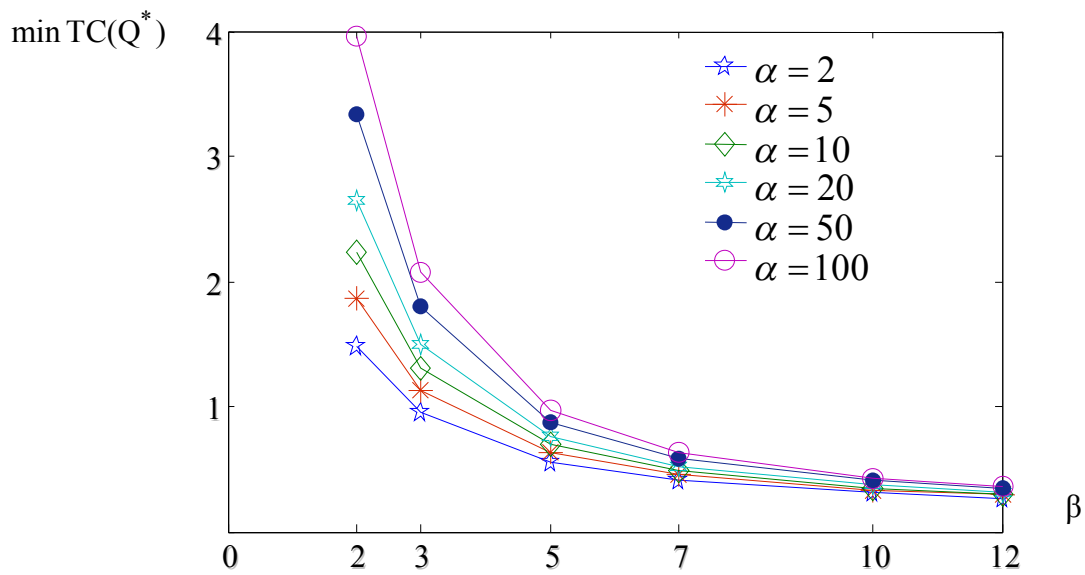
ويمكن توضيح الحل لهذا النموذج لتمثيل العلاقات بين $(\min TC(Q^*), T_c^*, D(Q^*))$ مقابل β . وأيضاً $(\min TC(Q^*), T_c^*)$ مقابل $D(Q^*)$ كما بالرسومات (٢-٨) — (٢-١٢) كما يلي :



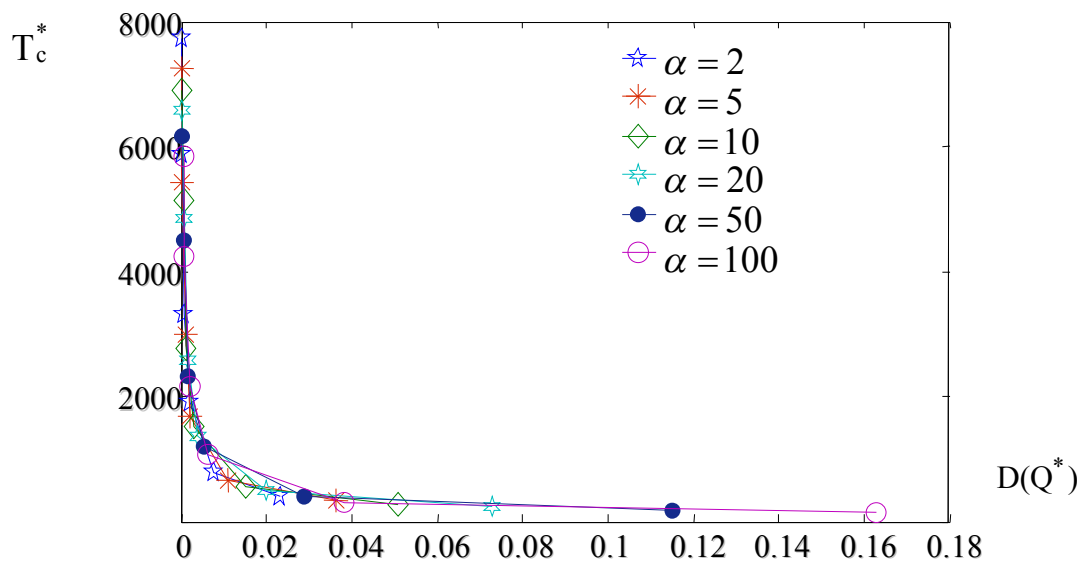
شكل (٢-٨) العلاقة بين $D(Q^*)$ و β



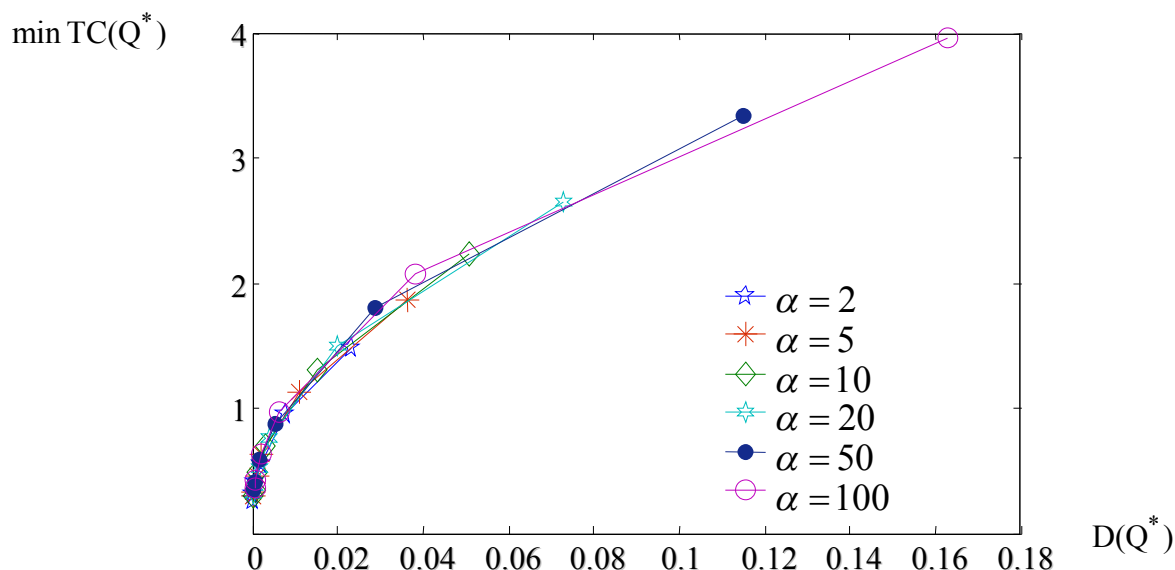
شكل (٢-٩) العلاقة بين T_c^* و β



شكل (١٠-٢) العلاقة بين $\min TC(Q^*)$ و β



شكل (١١-٢) العلاقة بين T_c^* و $D(Q^*)$



شكل (٢-١٢): العلاقة بين $\min TC(Q^*)$ و $D(Q^*)$

٢-٣-٢-٢: الخلاصة :

من جدول (٢-٢) نجد أن هناك علاقة عكسية بين معدل الطلب الأمثل $D(Q^*)$ وقيمة β ويوضح هذه العلاقة شكل (٢-٨). أما العلاقة بين طول دورة المخزون المثلى T_c^* وبين قيمة β فهي علاقة طردية موضحة بشكل (٢-٩)، أخيراً العلاقة بين تكلفة المخزون الكلية الصغرى $\min TC(Q^*)$ وبين قيمة β هي علاقة عكسية كما بشكل (٢-١٠).

أما العلاقة بين معدل الطلب الأمثل $D(Q^*)$ وبين طول دورة المخزون المثلى T_c^* فهي عكسية موضحة بشكل (٢-١١)، ونلاحظ أيضاً أن العلاقة بين معدل الطلب الأمثل $D(Q^*)$ وبين تكلفة المخزون الكلية الصغرى $\min TC(Q^*)$ علاقة طردية يوضحها الشكل (٢-١٢).

وفي النهاية نلاحظ أن عند المقارنة بين نوعين مختلفين من معدل الطلب كدالة في مستوى المخزون متغيرة تزايدياً في النموذج الأول وتغير تناقصياً في النموذج الثاني، نجد أن تزايد معدل الطلب يؤدي إلى تزايد التكلفة الكلية للمخزون، وكذلك تناقص معدل الطلب يؤدي إلى تناقص التكلفة الكلية للمخزون، كما أنه كلما ازداد معدل الطلب تناقص طول دورة المخزون، وأيضاً كلما تناقص معدل الطلب كلما ازدادت طول دورة المخزون. ويتضح ذلك من رسومات النموذج الأول عند مقارنتها برسومات النموذج الثاني الموضحة من حل المثالين العددين.

البَابُ الثَّالِثُ

نماذج المخزون السلعي الاحتمالية المقيدة ذي
الصنف الواحد من السلع بتغير تكلفة التجهيز وصفر
وقت الانتظار

**CONSTRAINED PROBABILISTIC SINGLE-ITEM
INVENTORY MODELS WITH VARYING ORDER
COST AND ZERO LEAD TIME**

الباب الثالث

نماذج المخزون السلعي الاحتمالية المقيدة ذي الصنف الواحد من السلع بتغير تكلفة التجهيز وصفر وقت الانتظار

CONSTRAINED PROBABILISTIC SINGLE-ITEM INVENTORY MODELS WITH VARYING ORDER COST AND ZERO LEAD TIME

INTRODUCTION

١-٣- مقدمة

نظام المخزون السلعي الاحتمالي بتكلفة الوحدة الثابتة بدون قيود درسها [8] **Fabrycky and Banks** ، حيث درسنا نظام المخزون ذي المصدر الواحد ويتعامل مع نوع واحد من السلع (*Single-Item , Single-Source SISS*) ، واستخدما الطريقة الكلاسيكية لتحقيق الأمثلية ، وكذلك استخدما طريقة **Monte Carlo** التحليلية في بعض الأنظمة الاحتمالية . ومشكلة المخزون السلعي الاحتمالي بثبات تكلفة الوحدات وبدون قيود عولجت من قبل [24] **Taha** . ونظام المخزون السلعي الاحتمالي المشروط ذي المصدر الواحد والذي يتعامل مع نوع واحد من السلع تم دراسته من قبل [9] **Fergany** ، مع فرض أن تكلفة التجهيز والعجز متغيرة ، ومعدل الطلب له دالة كثافة احتمال ، والزمن المسموح به يكون عشوائي ، وذلك للحصول على القيم المثلى لكل من كمية الطلب Q^* ، نقطة إعادة الطلب R^* ، والقيمة المتوقعة للتكلفة الكلية الصغرى $\min TC$. كما عالجت [7] **EL-Wakeel** نماذج المخزون الاحتمالية بتكاليف وحدات ثابتة ومتغيرة ذي الصنف الواحد من السلع وأيضاً متعدد الأصناف مستخدمة أسلوب البرمجة الهندسية . أيضاً تم مناقشة نظام متعدد السلع بقيود وقت الانتظار من قبل [26] **Wong and et al** . معدل الطلب المتغير بالنسبة لكمية الطلب والمتغير أيضاً بالنسبة للزمن نوقش من قبل كثير من الباحثين في الحالتين الاحتمالية وغير الاحتمالية ذي صنف واحد ومتعدد الأصناف أمثال [18] **Kun-Chan** وأيضاً [14] **Jinn -Tsair Teng and Hui-Ling Yang** ، [5] **Das et al** ، [20] **Mandal et al** ، [15] **Juneau and Eyter** ، وكذلك [22] **Niketa and Nita** بالطرق الكلاسيكية وأيضاً بأسلوب البرمجة الهندسية .

هذا الباب يناقش نموذجين من المخزون السلعي الاحتمالي ذي صنف واحد من السلع . تكلفة التجهيز تتغير تزايدياً في N في النموذج الأول مع فرض قيدين خطيين في N أحدهما تكلفة التخزين والآخر مساحة التخزين . أما النموذج الثاني فتكلفة التجهيز تتغير تناقصياً في N مع فرض قيدين أحدهما خطي وهو ميزانية التخزين والآخر غير خطي وهو تكلفة التجهيز المتغيرة تناقصياً في N .

هدف هذا الباب هو الحصول على كل من القيمة المتوقعة الصغرى للتكلفة الكلية للمخزون $\min \overline{TC}$ ، والقيمة المتوقعة لعدد الفترات لكل دورة مخزون N^* ، وكذلك أعلى مستوى للمخزون الأمثل Q_m^* بصورة رياضية صريحة وذلك لكل نموذج من النموذجين . كما سيتم دراسة الحالات الخاصة لكل نموذج . وفي نهاية كل نموذج يضاف مثال عددي محلول باستخدام برنامج Mathematica مع رسم المنحنيات التوضيحية لكل منهما باستخدام برنامج MATLAB . ويُستخدم أسلوب البرمجة الهندسية للمعالجة التحليلية لهذين النموذجين .

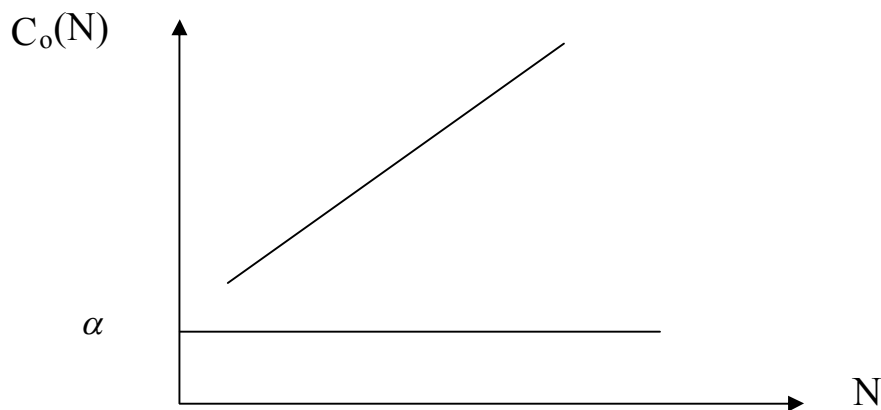
٢-٣- نموذج المخزون السلعي الاحتمالي ذي الصنف الواحد من السلع بتغير تكلفة التجهيز تزايدياً وصفر وقت الانتظار تحت قيدين خطيين

Probabilistic Single-Item Inventory Model With Varying Order cost and Zero Lead Time Under two linear Constraints

نفرض أن كمية التوريد تعود إلى أعلى مستوى تخزين Q_m لكل فترة زمنية N لكل دورة تخزين ، كما أن العجز غير مسموح به ، وتكلفة التجهيز تعتبر دالة تزايدية في N ، وتأخذ الصيغة الآتية :

$$C_o(N) = \alpha + \beta N \quad , \quad \alpha > 0 \quad , \quad \beta \geq 0 \quad (3.1)$$

حيث أن α ، β أعداد حقيقية . وتكون $C_o(N)$ ثابتة عندما $\beta = 0$. والرسم التالي يوضح العلاقة بين $C_o(N)$ مقابل N :



شكل (١-٣) العلاقة بين $C_o(N)$ و N

هدف النموذج هو تدنية التكاليف الكلية المتوقعة للمخزون والتي هي عبارة عن مجموع التكاليف المتوقعة لكل من (تكلفة الإنتاج المتوقعة وتكلفة التجهيز المتوقعة وتكلفة التخزين المتوقعة) لكل فترة والتي تأخذ الصورة التالية :

$$\overline{TC} = \overline{PC} + \overline{OC} + \overline{HC}$$

حيث $\overline{PC} = C_p \bar{D}$ هي القيمة المتوقعة للطلب مضروبة في تكلفة الإنتاج .

كما أن $\overline{OC} = \frac{C_o}{N}$ متوسط تكلفة التجهيز .

أيضاً $\nu > 0$ ، $\overline{HC} = \frac{C_h \bar{I}}{N} = \frac{C_h}{2} \bar{D} (N + 2\nu)$ هي تكلفة التخزين مضروبة في القيمة المتوقعة لمستوى التخزين مقسوماً على عدد الفترات الزمنية لكل دورة مخزون ([8] *Fabrycky and Banks*) . بالتالي فإن :

$$\overline{TC} = C_p \bar{D} + \frac{C_o}{N} + \frac{C_h}{2} \bar{D} (N + 2\nu) \quad (3.2)$$

والتي تخضع لقيدتين خطيتين أحدهما تكلفة التخزين والآخر مساحة التخزين على الترتيب كما يلي :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{C_h \bar{D} N}{2} \leq K_3 \\ S \bar{D} N \leq K_4 \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

حيث K_3 هو الحد الأقصى لتكلفة التخزين ويهدف للتحكم في هذه التكلفة الذي يؤدي ارتفاعها إلى ارتفاع التكلفة الكلية المتوقعة للمخزون ، و K_4 هو الحد الأقصى لمساحة التخزين ويهدف إلى التحكم في مساحة التخزين والحد من حاجة المنشأة إلى بناء أو إيجار مباني خاصة لغرض الاحتفاظ بالمخزون وما يتعلق بذلك من مصاريف مع مراعاة أن تكون الكمية المخزنة مناسبة للمساحة المتوفرة بالمخزن ، و S تمثل مساحة التخزين للسلعة بالمخزن .

لحل دالة الهدف الأولية التي تجعل مشكلة البرمجة مقعرة ، والتي يمكن كتابتها في الصورة التالية
بعد التعويض من المعادلة (3.1) في (3.2) :

$$\min \overline{TC} = C_p \overline{D} + \beta + C_h \overline{D} v + \frac{\alpha}{N} + \frac{C_h \overline{D} N}{2} \quad (3.4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{C_h \overline{D} N}{2 K_3} \leq 1 \\ \frac{S \overline{D} N}{K_4} \leq 1 \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

ولكن المقدار $(C_p \overline{D} + \beta + C_h \overline{D} v)$ لا يعتمد على N فيمكن تجاهله ، نحصل على الصورة التالية للعلاقة (3.4) :

$$\min \overline{TC} = \frac{\alpha}{N} + \frac{C_h \overline{D} N}{2} \quad (3.6)$$

التي تخضع للقيدين :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{C_h \overline{D} N}{2 K_3} \leq 1 \\ \frac{S \overline{D} N}{K_4} \leq 1 \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

بتطبيق أسلوب البرمجة الهندسية لـ [6] *Duffin et al* على المعادلتين (3.6) ، (3.7) نحصل على دالة الهدف للمشكلة البديلة كالآتي :

$$\begin{aligned} G(\underline{W}) &= \left(\frac{\alpha}{W_1 N} \right)^{W_1} \left(\frac{C_h \overline{D} N}{2 W_2} \right)^{W_2} \left(\frac{C_h \overline{D} N}{2 K_3 W_3} \right)^{W_3} \left(\frac{S \overline{D} N}{K_4 W_4} \right)^{W_4} \\ &= \left(\frac{\alpha}{W_1} \right)^{W_1} \left(\frac{C_h \overline{D}}{2 W_2} \right)^{W_2} \left(\frac{C_h \overline{D}}{2 K_3 W_3} \right)^{W_3} \left(\frac{S \overline{D}}{K_4 W_4} \right)^{W_4} \times N^{-W_1+W_2+W_3+W_4} \end{aligned} \quad (3.8)$$

حيث $\underline{W} = W_j$ لكل $j = 1, 2, 3, 4$ تسمى الأوزان (Weight) وتحقق $0 \leq W_j < 1$ ، وكذلك تحقق شرط السوية Normality Condition ، وشرط التعامد Orthogonality Condition كما يلي :

$$W_1 + W_2 = 1$$

$$-W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = 0$$

وهما معادلتين خطيتين في أربعة مجاهيل بجهل معاً نحصل على :

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= \frac{(1 + W_3 + W_4)}{2} \\ W_2 &= \frac{(1 - W_3 - W_4)}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

بالتعويض عن قيمة W_1, W_2 من العلاقة (3.9) في العلاقة (3.8) نحصل على الدالة البديلة (Dual Function) كما يلي :

$$g(W_3, W_4) = \left(\frac{2\alpha}{(1 + W_3 + W_4)} \right)^{\frac{(1 + W_3 + W_4)}{2}} \left(\frac{C_h \bar{D}}{(1 - W_3 - W_4)} \right)^{\frac{(1 - W_3 - W_4)}{2}} \left(\frac{C_h \bar{D}}{2K_3 W_3} \right)^{W_3} \left(\frac{S \bar{D}}{K_4 W_4} \right)^{W_4} \quad (3.10)$$

لإيجاد W_3, W_4 التي تجعل $g(W_3, W_4)$ أكبر ما يمكن نأخذ لوغاريتم طرفي المعادلة (3.10) لنحصل على :

$$\begin{aligned} \ln g(W_3, W_4) &= \frac{1}{2} (1 + W_3 + W_4) \{ \ln 2\alpha - \ln (1 + W_3 + W_4) \} \\ &+ \frac{1}{2} (1 - W_3 - W_4) \{ \ln C_h \bar{D} - \ln (1 - W_3 - W_4) \} \\ &+ W_3 \left\{ \ln \frac{C_h \bar{D}}{2K_3} - \ln W_3 \right\} + W_4 \left\{ \ln \frac{S \bar{D}}{K_4} - \ln W_4 \right\} \end{aligned}$$

باشتقاق $\ln g(W_3, W_4)$ بالنسبة لـ W_3 ، W_4 على الترتيب ومساواتهما بالصفر نحصل على :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln g(W_3, W_4)}{\partial W_3} &= \frac{1}{2} \{ \ln 2\alpha - \ln(1 + W_3 + W_4) \} - \frac{1}{2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \{ \ln C_h \bar{D} - \ln(1 - W_3 - W_4) \} + \frac{1}{2} \\ &\quad + \left\{ \ln \frac{C_h \bar{D}}{2K_3} - \ln W_3 \right\} - 1 = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

and

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln g(W_3, W_4)}{\partial W_4} &= \frac{1}{2} \{ \ln 2\alpha - \ln(1 + W_3 + W_4) \} - \frac{1}{2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \{ \ln C_h \bar{D} - \ln(1 - W_3 - W_4) \} + \frac{1}{2} \\ &\quad + \left\{ \ln \frac{S \bar{D}}{K_4} - \ln W_4 \right\} - 1 = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

بتبسيط العلاقتين (3.11) ، (3.12) نجد أن :

$$\left(\frac{2\alpha}{C_h \bar{D}} \right) \left(\frac{1 - W_3 - W_4}{1 + W_3 + W_4} \right) \left(\frac{C_h \bar{D}}{2K_3 W_3 e} \right)^2 = 1 \quad (3.13)$$

and

$$\left(\frac{2\alpha}{C_h \bar{D}} \right) \left(\frac{1 - W_3 - W_4}{1 + W_3 + W_4} \right) \left(\frac{S \bar{D}}{K_4 W_4 e} \right)^2 = 1 \quad (3.14)$$

بقسمة العلاقتين (3.13) ، (3.14) نحصل على :

$$\left(\frac{C_h \bar{D}}{2K_3 W_3} \right) \left(\frac{K_4 W_4}{S \bar{D}} \right) = 1$$

وبالتالي فإن :

$$\frac{W_4}{W_3} = \frac{2K_3 S}{K_4 C_h} \quad (3.15)$$

بالتعويض عن قيمة W_3 ، W_4 من العلاقة (3.15) في العلاقتين (3.14) ، (3.13) على الترتيب نحصل على :

$$f_i(W_j) = W_j^3 + C_i W_j^2 + B_i W_j - B_i C_i = 0 \quad j=3,4 \quad , \quad i=1,2 \quad (3.16)$$

حيث :

$$B_1 = \left(\frac{2\alpha}{C_h \bar{D}} \right) \left(\frac{C_h \bar{D}}{2 K_3 e} \right)^2 , \quad B_2 = \left(\frac{2\alpha}{C_h \bar{D}} \right) \left(\frac{S \bar{D}}{K_4 e} \right)^2$$

$$C_1 = \frac{C_h K_4}{C_h K_4 + 2S K_3} , \quad C_2 = \frac{2S K_3}{C_h K_4 + 2S K_3}$$

نلاحظ أن :

$$f_i(0) = - B_i C_i < 0 \quad i=1,2$$

كما أن :

$$f_i(1) = 1 + C_i + B_i(1 - C_i) > 0 \quad i=1,2$$

أي أن هناك جذرين $W_j \in (0,1)$ لكل $j=3,4$ ، وللتأكد من أن الجذرين $W_j \in (0,1)$ المحسوبين من العلاقة (3.16) يعظمان دالة الهدف للمشكلة البديلة $g(W_3, W_4)$ ، نوجد المشتقة الثانية لـ $\ln g(W_3, W_4)$ بالنسبة لـ W_3 ، W_4 على الترتيب كما يلي :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln g(W_3, W_4)}{\partial W_3^2} &= \left[\frac{1}{2} \frac{-1}{(1+W_3+W_4)} - \frac{1}{2} \frac{1}{(1-W_3-W_4)} - \frac{1}{W_3} \right], \\ &= - \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{W_1 W_2} \right) + \frac{1}{W_3} \right] < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln g(W_3, W_4)}{\partial W_4^2} &= \left[\frac{1}{2} \frac{-1}{(1+W_3+W_4)} - \frac{1}{2} \frac{1}{(1-W_3-W_4)} - \frac{1}{W_4} \right], \\ &= - \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{W_1 W_2} \right) + \frac{1}{W_4} \right] < 0 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ln g(W_3, W_4)}{\partial W_3 \partial W_4} &= \left[\frac{1}{2} \frac{-1}{(1+W_3+W_4)} - \frac{1}{2} \frac{1}{(1-W_3-W_4)} \right] \\ &= - \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{W_1 W_2} \right) \right] < 0\end{aligned}$$

وبالتالي فإن :

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(\frac{\partial^2 \ln g(W_3, W_4)}{\partial W_3 \partial W_4} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 \ln g(W_3, W_4)}{\partial W_3^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \ln g(W_3, W_4)}{\partial W_4^2} \right) \\ &= \left[\left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{1}{W_1 W_2} \right)^2 \right\} - \left\{ \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{W_1 W_2} \right) + \frac{1}{W_3} \right) \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{W_1 W_2} \right) + \frac{1}{W_4} \right) \right\} \right] < 0\end{aligned}$$

مما يثبت أن الجذرين المحسوبين من العلاقة (3.16) يعظمان دالة الهدف للمشكلة البديلة $g(W_3, W_4)$ ، وعليه فإن W_3^* ، W_4^* يمثلان الحل الأمثل للعلاقين (3.16) . ويتم الحصول على قيم W_1^* ، W_2^* بالتعويض عن W_3^* ، W_4^* في العلاقة (3.9) .

لإيجاد العدد المتوقع المثالي للفترات الزمنية لكل دورة مخزون N^* نستخدم نتائج نظرية البرمجة الهندسية [6] *Duffin et al* كما يلي :

$$\frac{\alpha}{N^*} = W_1^* g(W_3^*, W_4^*)$$

and

$$\frac{C_h \overline{D} N^*}{2} = W_2^* g(W_3^*, W_4^*)$$

من خلال هاتين العلاقتين نحصل على عدد الفترات المثلى لكل دورة مخزون وهي :

$$N^* = \sqrt{\frac{2\alpha W_2^*}{C_h \overline{D} W_1^*}} = \sqrt{\frac{2\alpha (1-W_3^*-W_4^*)}{C_h \overline{D} (1+W_3^*+W_4^*)}} \quad (3.17)$$

حيث أن أعلى مستوى أمثل للمخزون:

$$\begin{aligned}
 Q_m^* &= \bar{D} (N^* + \nu) \\
 &= \bar{D} \nu + \bar{D} \sqrt{\frac{2\alpha \bar{W}_2^*}{C_h \bar{D} \bar{W}_1^*}} \\
 &= \bar{D} \nu + \sqrt{\frac{2\alpha \bar{D} (1 - W_3^* - W_4^*)}{C_h (1 + W_3^* + W_4^*)}} \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

بالتعويض عن قيمة N^* في العلاقة (3.4) نحصل على التكلفة الكلية الصغرى المتوقعة للمخزون كما يلي :

$$\begin{aligned}
 \min \overline{TC} &= C_p \bar{D} + \beta + C_h \bar{D} \nu + \frac{\alpha}{\sqrt{\frac{2\alpha \bar{W}_2^*}{C_h \bar{D} \bar{W}_1^*}}} + \frac{C_h \bar{D}}{2} \sqrt{\frac{2\alpha \bar{W}_2^*}{C_h \bar{D} \bar{W}_1^*}} \\
 &= C_p \bar{D} + \beta + C_h \bar{D} \nu + \sqrt{\frac{\alpha C_h \bar{D}}{2 \bar{W}_1^* \bar{W}_2^*}} \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

SPECIAL CASES

٣-٢-١ حالات خاصة :

يمكن استنتاج بعض نماذج المخزون السلعي الاحتمالي كحالات خاصة كما يلي :

الحالة (١) :

نفرض أن $W_4 \rightarrow 0 \Leftarrow K_4 \rightarrow \infty$, (B_2 and $C_2 \rightarrow 0$) , نحصل على نموذج المخزون السلعي الاحتمالي ذي صنف واحد من السلع بتغير تكلفة التجهيز تزايدياً تحت قيد خطي واحد وهو تكلفة التخزين ، وعليه فإن المعادلات (3.6) ، (3.7) و (3.19) \rightarrow (3.16) تأخذ الصيغ التالية :

$$\min \overline{TC} = \frac{\alpha}{N} + \frac{C_h \bar{D} N}{2}$$

$$s . t . \quad \frac{C_h \bar{D} N}{2K_3} \leq 1$$

كما أن :

$$f(W_3) = W_3^3 + W_3^2 + B_1 W_3 - B_1 = 0$$

حيث :

$$B_1 = \left(\frac{2\alpha}{C_h \bar{D}} \right) \left(\frac{C_h \bar{D}}{2K_3 e} \right)^2$$

عدد الفترات الزمنية المثلى لكل دورة مخزون :

$$N^* = \sqrt{\frac{2\alpha (1 - W_3^*)}{C_h \bar{D}(1 + W_3^*)}}$$

كما أن أعلى مستوى أمثل للمخزون:

$$Q_m^* = \bar{D} \nu + \sqrt{\frac{2\alpha \bar{D}(1 - W_3^*)}{C_h(1 + W_3^*)}}$$

وأيضاً التكلفة الكلية الصغرى المتوقعة للمخزون :

$$\min \overline{TC} = C_p \bar{D} + \beta + C_h \bar{D} \nu + \sqrt{\frac{2\alpha C_h \bar{D}}{(1 - W_3^{*2})}}$$

الحالة (٢) :

نفرض أن $W_3 \rightarrow 0 \Leftarrow K_3 \rightarrow \infty$, $(B_1 \text{ and } C_1 \rightarrow 0)$ ، نحصل على نموذج المخزون السلعي الاحتمالي ذي صنف واحد من السلع بتغير تكلفة التجهيز تزايدياً تحت قيد خطي واحد وهو مساحة التخزين ، وعليه فإن المعادلات (3.6) ، (3.7) و (3.19) \rightarrow (3.16) تأخذ الصيغ التالية :

$$\min \overline{TC} = \frac{\alpha}{N} + \frac{C_h \bar{D} N}{2}$$

$$s . t . \quad \frac{S \bar{D} N}{K_4} \leq 1$$

كما أن :

$$f(W_4) = W_4^3 + W_4^2 + B_2 W_4 - B_2 = 0$$

حيث :

$$B_2 = \left(\frac{2\alpha}{C_h \bar{D}} \right) \left(\frac{S \bar{D}}{K_4 e} \right)^2$$

عدد الفترات الزمنية المثلى لكل دورة مخزون :

$$N^* = \sqrt{\frac{2\alpha (1 - W_4^*)}{C_h \bar{D} (1 + W_4^*)}}$$

كما أن أعلى مستوى أمثل للمخزون:

$$Q_m^* = \bar{D} \nu + \sqrt{\frac{2\alpha \bar{D} (1 - W_4^*)}{C_h (1 + W_4^*)}}$$

وأيضاً التكلفة الكلية الصغرى المتوقعة للمخزون :

$$\min \overline{TC} = C_p \bar{D} + \beta + C_h \bar{D} \nu + \sqrt{\frac{2\alpha C_h \bar{D}}{(1 - W_4^{*2})}}$$

الحالة (٣) :

نفرض أن $(W_3 \text{ and } W_4 \rightarrow 0) \Leftarrow K_3, K_4 \rightarrow \infty$, $(B_1 = B_2 \rightarrow 0, C_1 = C_2 \rightarrow 0)$ ، نحصل على نموذج المخزون السلعي الاحتمالي ذي صنف واحد من السلع بتغير تكلفة التجهيز بدون قيود وعليه فإن المعادلات (3.6) ، (3.7) و (3.19) \rightarrow (3.16) تأخذ الصيغ التالية :

$$\min \overline{TC} = \frac{\alpha}{N} + \frac{C_h \bar{D} N}{2}$$

عدد الفترات الزمنية المثلى لكل دورة مخزون :

$$N^* = \sqrt{\frac{2\alpha}{C_h \bar{D}}}$$

كما أن أعلى مستوى أمثل للمخزون:

$$Q_m^* = \bar{D} \nu + \sqrt{\frac{2\alpha \bar{D}}{C_h}}$$

وأيضاً التكلفة الكلية الصغرى المتوقعة للمخزون :

$$\min \overline{TC} = C_p \bar{D} + \beta + C_h \bar{D} \nu + \sqrt{2\alpha C_h \bar{D}}$$

ويمكن الحصول على نفس النتائج السابقة باستخدام الطريقة التقليدية ، وذلك باشتقاق $\min \overline{TC}$ بالنسبة إلى N عندما $N = N^*$ ومساواتها بالصفر كما يلي :

$$\left. \frac{\partial \min \overline{TC}}{\partial N} \right|_{N = N^*} = \left. \frac{-\alpha}{N^2} + \frac{C_h \bar{D}}{2} \right|_{N = N^*} = 0$$

وعليه فإن عدد الفترات الزمنية المثلى لكل دورة مخزون :

$$N^* = \left(\frac{2\alpha}{C_h \bar{D}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

كما أن أعلى مستوى أمثل للمخزون:

$$Q_m^* = \bar{D} \nu + \sqrt{\frac{2\alpha \bar{D}}{C_h}}$$

التكلفة الكلية الصغرى المتوقعة للمخزون:

$$\min \overline{TC} = C_p \bar{D} + \beta + C_h \bar{D} \nu + \sqrt{2\alpha C_h \bar{D}}$$

الحالة (٤) :

نفرض أن $\beta=0 \Leftarrow \alpha=C_0(N)=C_0$ مقدار ثابت ، نحصل على نموذج المخزون السلعي الاحتمالي ذي صنف واحد من السلع بثبات تكلفة التجهيز تحت قيدين خطيين أحدهما تكلفة التخزين والآخر مساحة التخزين ، وعليه فإن المعادلات (3.6) ، (3.7) و (3.19) \rightarrow (3.16) تأخذ الصيغ التالية :

$$\min \overline{TC} = \frac{C_0}{N} + \frac{C_h \bar{D} N}{2}$$

$$s . t . \quad \frac{C_h \bar{D} N}{2K_3} \leq 1$$

$$\frac{S \bar{D} N}{K_4} \leq 1$$

كما أن :

$$f_i(W_j) = W_j^3 + C_i W_j^2 + B_i' W_j - B_i' C_i = 0 \quad j=3,4 \quad , \quad i=1,2$$

حيث :

$$B_1' = \left(\frac{2C_0}{C_h \bar{D}} \right) \left(\frac{C_h \bar{D}}{2K_3 e} \right)^2 , \quad B_2' = \left(\frac{2C_0}{C_h \bar{D}} \right) \left(\frac{S \bar{D}}{K_4 e} \right)^2$$

$$C_1 = \frac{C_h K_4}{C_h K_4 + 2S K_3} , \quad C_2 = \frac{2S K_3}{C_h K_4 + 2S K_3}$$

عدد الفترات الزمنية المثلى لكل دورة مخزون :

$$N^* = \sqrt{\frac{2C_0(1-W_3^*-W_4^*)}{C_h \bar{D} (1+W_3^*+W_4^*)}}$$

أعلى مستوى أمثل للمخزون:

$$Q_m^* = \bar{D} \nu + \sqrt{\frac{2C_0 \bar{D} (1-W_3^*-W_4^*)}{C_h (1+W_3^*+W_4^*)}}$$

التكلفة الكلية المتوقعة للمخزون الصغرى :

$$\min \overline{TC} = C_p \bar{D} + C_h \bar{D} \nu + \sqrt{\frac{2C_0 C_h \bar{D}}{(1+W_3^*+W_4^*)(1-W_3^*-W_4^*)}}$$

الحالة (٥) :

نفرض أن $K_3 \rightarrow 0 \Leftarrow K_4 \rightarrow \infty$ ، W_3 ، $W_4 \rightarrow 0$ ، كما أن $\alpha = C_0 \Leftarrow \beta = 0$ ، $C_0(N) = \alpha = C_0$ ،
مقدار ثابت ، نحصل على الحالة الكلاسيكية لـ [8] **Fabrycky and Banks** كالتالي:

$$\min \overline{TC} = \frac{C_0}{N} + \frac{C_h \overline{D} N}{2}$$

عدد الفترات الزمنية المثلى لكل دورة مخزون :

$$N^* = \sqrt{\frac{2C_0}{C_h \overline{D}}}$$

كما أن أعلى مستوى للمخزون الأمثل :

$$Q_m^* = \overline{D} \nu + \sqrt{\frac{2C_0 \overline{D}}{C_h}}$$

التكلفة الكلية الصغرى المتوقعة للمخزون :

$$\min \overline{TC} = C_p \overline{D} + C_h \overline{D} \nu + \sqrt{2C_0 C_h \overline{D}}$$

NUMERICAL EXAMPLE

٣-٢-٢- مثال عددي (١)

المطلوب إيجاد العدد المتوقع المثالي للفترات لكل دورة مخزون N^* ، وأعلى مستوى للمخزون الأمثل Q_m^* لمشكلة التخزين لصنف واحد من السلع لقيم α ، β المختلفة . نفرض أن القيم التالية لمعلم النموذج كما يلي :

$$C_0 = 11 \text{ unit} , C_h = 0.05 \text{ unit} , C_p = 25 \text{ unit} , \overline{D} = 2 \text{ unit} \\ \nu = 3 \text{ unit} , S = 50 \text{ unit} , K_3 = 1000 \text{ unit} , K_4 = 200 \text{ ft}^2$$

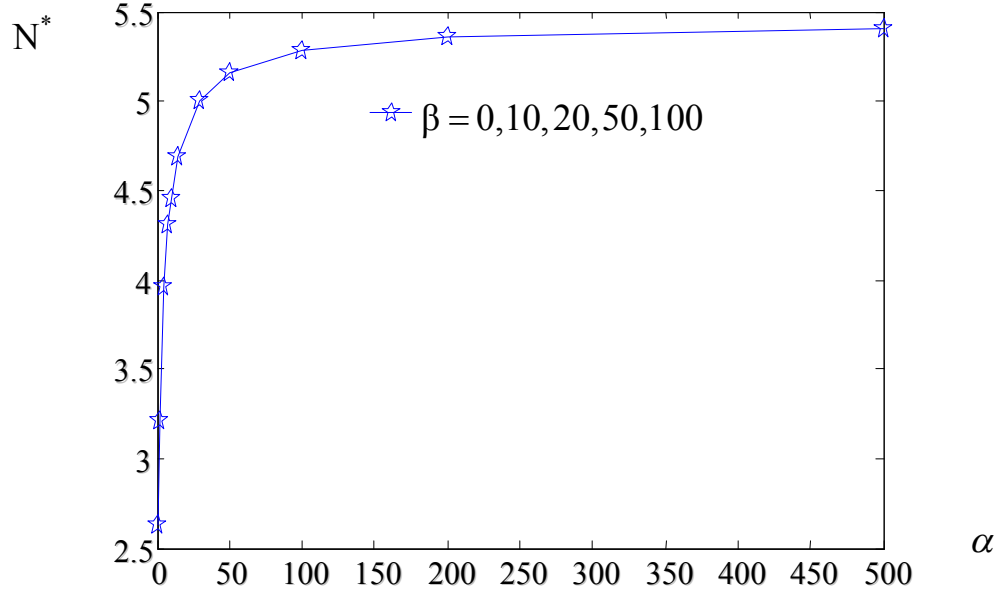
حيث K_3 هو الحد الأقصى لتكلفة التخزين ، K_4 هو الحد الأقصى لمساحة التخزين .

بالتعويض عن قيم α ، β المختلفة ، نستخدم العلاقات (3.16) لإيجاد W_3^* ، W_4^* ، وذلك للحصول على قيم W_1^* ، W_2^* من العلاقة (3.9) . وبالتالي فإن القيم المثلى لـ $(\min \overline{TC} , Q_m^* , N^*)$ يمكن الحصول عليها كما بالجدول (٣-١) .

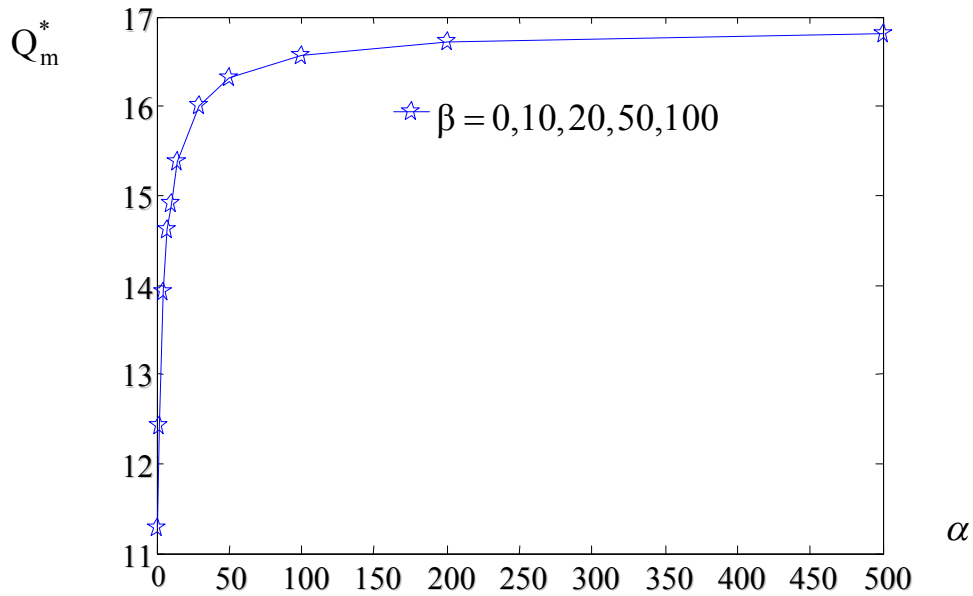
$\beta \backslash \alpha$	$C_o(N^*)$					$\min \overline{TC}$					N^*	Q_m^*
	0	10	20	50	100	0	10	20	50	100		
1	1	27.347	53.694	132.737	264.473	50.811	60.811	70.811	100.811	150.811	2.634	11.269
2	2	34.095	66.190	162.477	322.954	51.083	61.083	71.083	101.083	151.083	3.209	12.419
5	5	44.613	84.227	203.068	401.135	51.760	61.760	71.760	101.760	151.760	3.961	13.922
8	8	51.066	94.133	223.332	438.665	52.372	62.372	72.372	102.372	152.373	4.306	14.613
10	10	54.546	99.093	232.733	455.466	52.767	62.767	72.767	102.768	152.768	4.454	14.909
15	15	61.925	108.853	249.629	484.257	53.731	63.731	73.731	103.731	153.731	4.692	15.385
30	30	80.009	130.02	280.049	530.098	56.548	66.548	76.548	106.549	156.549	5.0009	16.002
50	50	101.546	153.092	307.731	565.462	60.258	70.257	80.257	110.258	160.258	5.154	16.309
100	100	152.862	205.724	364.31	628.621	69.481	79.481	89.481	119.481	169.481	5.286	16.572
200	200	253.585	307.171	467.927	735.853	87.891	97.891	107.892	137.892	187.892	5.358	16.717
500	500	554.044	608.087	770.218	1040.44	143.088	153.088	163.088	193.088	243.088	5.404	16.808

جدول (١-٣) تأثير قيم α , β على القيم الاقتصادية المثلى

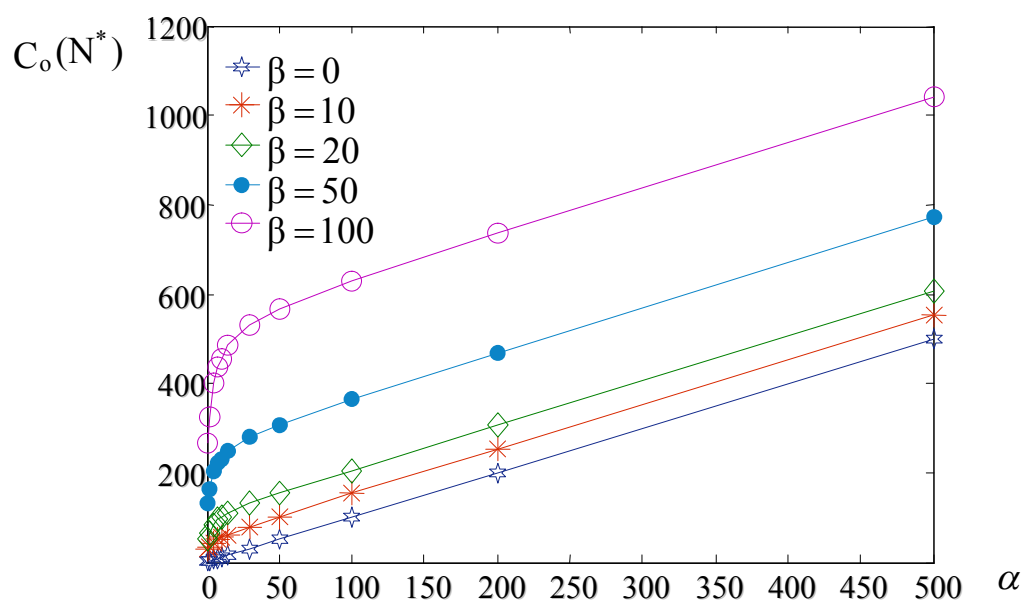
ويمكن توضيح حل هذا النموذج العددي لتمثيل العلاقة بين $(N^*, Q_m^*, \min \overline{TC})$ مقابل α .
 وأيضاً $(Q_m^*, \min \overline{TC})$ مقابل N^* كما بالرسومات (٢-٣) – (٦-٣) :



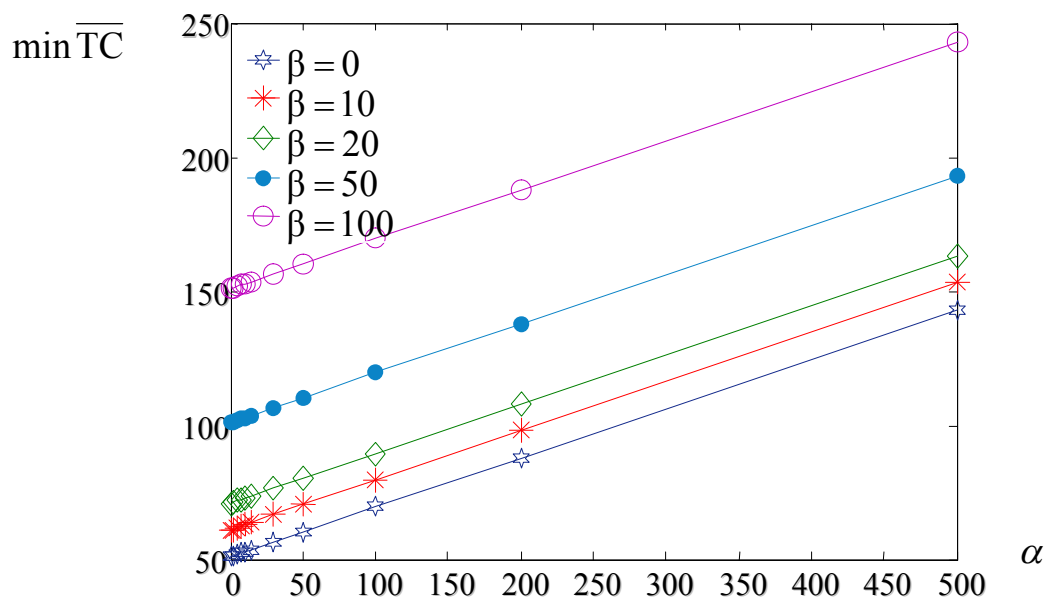
شكل (٢-٣) العلاقة بين N^* و α



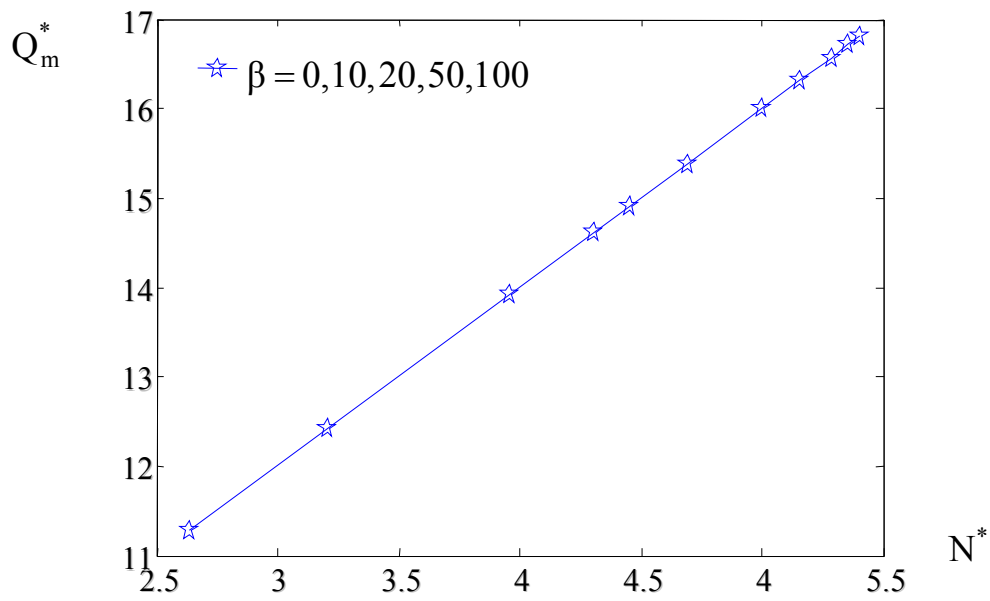
شكل (٣-٣) العلاقة بين Q_m^* و α



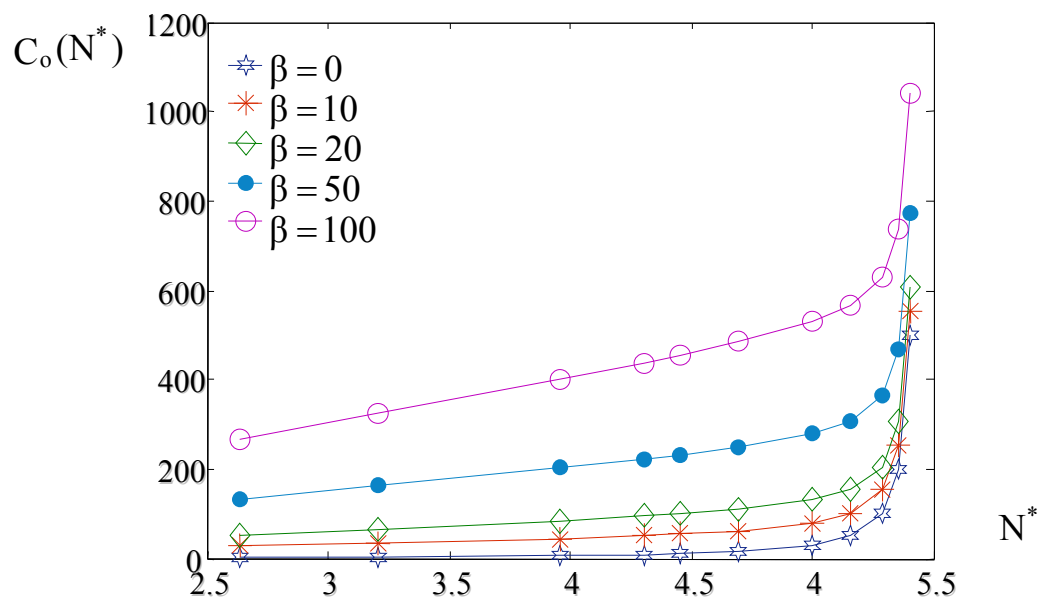
شكل (٤-٣) العلاقة بين $C_o(N^*)$ و α



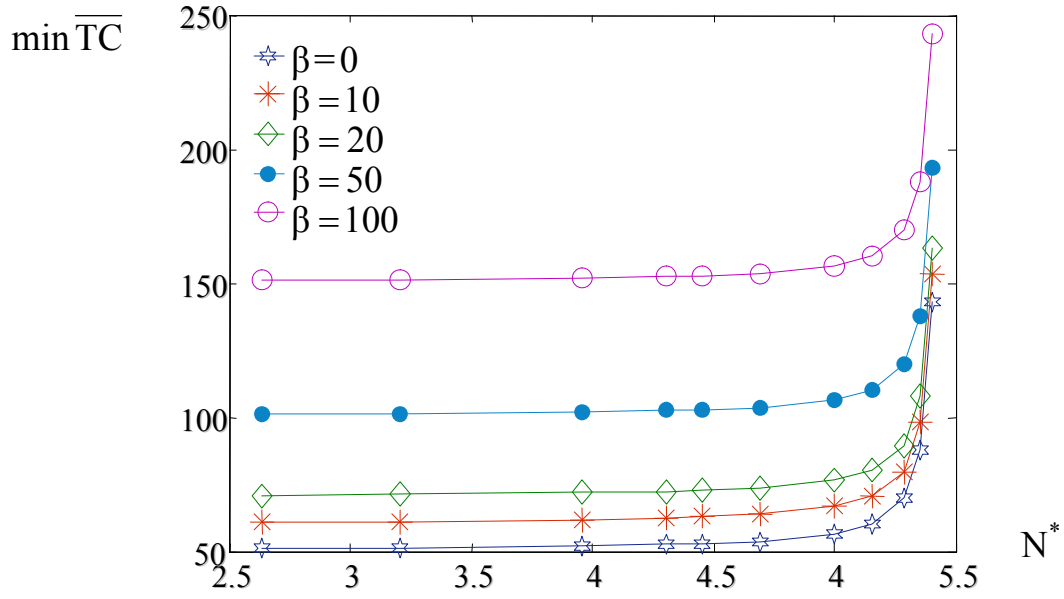
شكل (٥-٣) العلاقة بين $\min \overline{TC}$ و α



شكل (٦-٣) العلاقة بين Q_m^* و N^*



شكل (٧-٣) العلاقة بين $C_o(N^*)$ و N^*



شكل (٨-٣) العلاقة بين N^* و Q_m^*

٣-٢-٣-٣ الخلاصة :

من الجدول نجد أنه يوجد علاقة طردية بين عدد الفترات المثلى لكل دورة مخزون N^* ، وبين قيمة α ، ويوضح هذه العلاقة شكل (٣-٢) ، أما العلاقة بين أعلى مستوى أمثل للمخزون Q_m^* ، وقيمة α فهي علاقة طردية الموضحة بشكل (٣-٣) . وأيضاً العلاقة بين تكلفة التجهيز $C_0(N^*)$ وبين قيمة α علاقة طردية كما بالشكل (٣-٤) . أخيراً العلاقة بين تكلفة الكلية المتوقعة الصغرى للمخزون $\min \overline{TC}$ وبين قيمة α علاقة طردية الموضحة بالشكل (٣-٥) .

أما العلاقة بين مستوى أمثل المخزون Q_m^* وبين عدد الفترات المثلى لكل دورة مخزون N^* فهي علاقة طردية كما بالشكل (٣-٦) . وأيضاً العلاقة بين تكلفة التجهيز $C_0(N^*)$ وبين عدد الفترات المثلى لكل دورة مخزون N^* علاقة طردية الموضحة بالشكل (٣-٧) . أخيراً العلاقة بين التكلفة الكلية الصغرى المتوقعة للمخزون $\min \overline{TC}$ وبين عدد الفترات المثلى لكل دورة مخزون N^* علاقة طردية الذي يوضحها الشكل (٣-٨) .

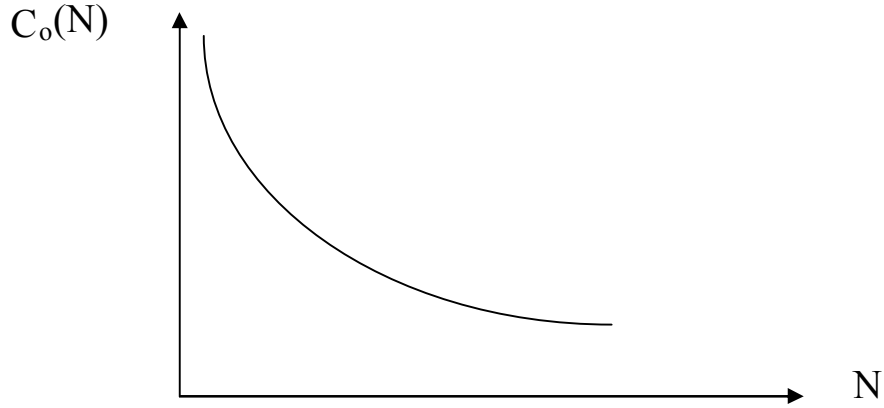
٣-٣- نموذج المخزون السلعي الاحتمالي ذي الصنف الواحد من السلع بتغير تكلفة التجهيز تناقصياً و صفر وقت الانتظار تحت قيدين أحدهما غير خطي والآخر خطي

Probabilistic Single-Item Inventory Models With Decreasing Varying Order cost and Zero Lead Time Under linear and Non-Linear Constraints

استناداً للفرضيات السابقة في النموذج (٣-٢) ، مع فرض أن تكلفة التجهيز دالة تناقصية في N ، والتي تأخذ الصيغة التالية :

$$C_o(N) = C_o N^{-\beta} \quad C_o > 0, \quad \beta \geq 1 \quad (3.20)$$

حيث $C_o > 0, \beta \geq 1$ أعداد حقيقية . من الواضح أنه كلما زادت قيمة β كلما تناقصت قيمة تكلفة التجهيز . والرسم التالي يوضح العلاقة بين C_o مقابل N :



شكل (٣-٩) العلاقة بين $C_o(N)$ و N

المهدف الأساسي للنموذج هو تدنية دالة التكلفة المذكورة في النموذج (٣-٢) ولكن مع اختلاف في القيدين ألا وهما :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{C_o(N)}{N} \leq K_5 \\ C_b \bar{D} N \leq K_6 \end{array} \right\} \quad (3.21)$$

حيث K_5 هو الحد الأقصى لتكلفة التجهيز ويهدف إلى التحكم في تكلفة التجهيز التي تتزايد بتزايد عدد الطلبات وهو قيد غير خطي في N ، و K_6 الحد الأقصى لتكلفة ميزانية التخزين وتهدف للتحكم في تكلفة ميزانية السلع المخزنة أو إنتاجها وهو قيد خطي في N .

لحل دالة الهدف الأولية التي تقعر مشكلة البرمجة والتي يمكن كتابتها على الصورة التالية بعد التعويض من (3.21) في (3.1) و (3.22) :

$$\min \overline{TC} = C_p \overline{D} + C_h \overline{D} \nu + C_o N^{-(\beta+1)} + \frac{C_h \overline{D} N}{2} \quad (3.22)$$

$$\left. \begin{array}{l} C_o N^{-(\beta+1)} \leq K_5 \\ C_b \overline{D} N \leq K_6 \end{array} \right\} \quad (3.23)$$

حيث أن المقدار $(C_p \overline{D} + C_h \overline{D} \nu)$ لا يعتمد على N فيمكن تجاهله ، نجد أن المشكلة (3.22) و (3.23) تكتب كالاتي :

$$\min \overline{TC} = C_o N^{-(\beta+1)} + \frac{C_h \overline{D} N}{2} \quad (3.24)$$

$$\text{s.t.} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{C_o N^{-(\beta+1)}}{K_5} \leq 1 \\ \frac{C_b \overline{D} N}{K_6} \leq 1 \end{array} \right\} \quad (3.25)$$

بتطبيق أسلوب البرمجة الهندسية لـ [6] *Duffin et al* على العادلتين (3.24) ، (3.25) نحصل على دالة الأولية لدالة الهدف (Primal Function) كما يلي :

$$\begin{aligned}
G(\underline{W}) &= \left(\frac{C_0 N^{-(\beta+1)}}{W_1} \right)^{W_1} \left(\frac{C_h \bar{D} N}{2 W_2} \right)^{W_2} \left(\frac{C_0 N^{-(\beta+1)}}{K_5 W_3} \right)^{W_3} \left(\frac{C_b \bar{D} N}{K_6 W_4} \right)^{W_4} \\
&= \left(\frac{C_0}{W_1} \right)^{W_1} \left(\frac{C_h \bar{D}}{2 W_2} \right)^{W_2} \left(\frac{C_0}{K_5 W_3} \right)^{W_3} \left(\frac{C_b \bar{D}}{K_6 W_4} \right)^{W_4} \times N^{-(\beta+1) W_1 + W_2 - (\beta+1) W_3 + W_4} \quad (3.26)
\end{aligned}$$

حيث $\underline{W} = W_j$ لكل $j = 1, 2, 3, 4$ تسمى الأوزان (Weight) وتحقق $0 \leq W_j < 1$ ، وكذلك تحقق شرط السوية Normality Condition ، وشرط التعامد Orthogonality Condition كما يلي :

$$\begin{aligned}
W_1 + W_2 &= 1 \\
-(\beta+1) W_1 + W_2 - (\beta+1) W_3 + W_4 &= 0
\end{aligned}$$

وهما معادلتين خطيتين في أربعة مجاهيل بجلهما معاً نحصل على :

$$\left. \begin{aligned}
W_1 &= \frac{1 - (\beta+1) W_3 + W_4}{\beta+2} \\
W_2 &= \frac{(\beta+1)(1 + W_3) - W_4}{\beta+2}
\end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

بالتعويض عن قيمة W_1, W_2 من (3.27) في العلاقة (3.26) نحصل على الدالة البديلة (Dual Function) كالآتي :

$$\begin{aligned}
g(W_3, W_4) &= \left(\frac{C_0(\beta+2)}{\{1 - (\beta+1)W_3 + W_4\}} \right)^{\frac{1 - (\beta+1)W_3 + W_4}{\beta+2}} \left(\frac{C_h \bar{D}(\beta+2)}{2 \{(\beta+1)(1 + W_3) - W_4\}} \right)^{\frac{(\beta+1)(1 + W_3) - W_4}{\beta+2}} \\
&\quad \left(\frac{C_0}{K_5 W_3} \right)^{W_3} \left(\frac{C_b \bar{D}}{K_6 W_4} \right)^{W_4} \quad (3.28)
\end{aligned}$$

لإيجاد W_3, W_4 التي تجعل $g(W_3, W_4)$ أكبر ما يمكن نأخذ اللوغاريتم لطرفي العلاقة (3.28) كما يلي :

$$\begin{aligned} \ln g(W_3, W_4) = & \frac{1-(\beta+1)W_3+W_4}{\beta+2} \left(\ln(\beta+2)C_o - \ln\{1-(\beta+1)W_3+W_4\} \right) \\ & + \frac{(\beta+1)(1+W_3)-W_4}{\beta+2} \left(\ln\left(\frac{\beta+2}{2}\right)C_h\bar{D} - \ln\{(\beta+1)(1+W_3)-W_4\} \right) \\ & + W_3 \left(\ln\frac{C_o}{K_5} - \ln W_3 \right) + W_4 \left(\ln\frac{C_b\bar{D}}{K_6} - \ln W_4 \right) \end{aligned}$$

باشتقاق $\ln g(W_3, W_4)$ بالنسبة لـ W_3, W_4 على الترتيب ومساواتهما بالصفر نحصل على :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln g(W_3, W_4)}{\partial W_3} = & \frac{-(\beta+1)}{\beta+2} \left(\ln(\beta+2)C_o - \ln\{1-(\beta+1)W_3+W_4\} \right) + \frac{\beta+1}{\beta+2} \\ & + \frac{(\beta+1)}{\beta+2} \left(\ln\left(\frac{\beta+2}{2}\right)C_h\bar{D} - \ln\{(\beta+1)(1+W_3)-W_4\} \right) - \frac{\beta+1}{\beta+2} \\ & + \left(\ln\frac{C_o}{K_5} - \ln W_3 \right) - 1 = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

and

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln g(W_3, W_4)}{\partial W_4} = & \frac{1}{\beta+2} \left(\ln(\beta+2)C_o - \ln\{1-(\beta+1)W_3+W_4\} \right) - \frac{1}{\beta+2} \\ & - \frac{1}{\beta+2} \left(\ln\left(\frac{\beta+2}{2}\right)C_h\bar{D} - \ln\{(\beta+1)(1+W_3)-W_4\} \right) + \frac{1}{\beta+2} \\ & + \left(\ln\frac{C_b\bar{D}}{K_6} - \ln W_4 \right) - 1 = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

بتبسيط العلاقتين (3.29) ، (3.30) نحصل على :

$$\left(\frac{C_h\bar{D}}{2C_o} \right) \left(\frac{1-(\beta+1)W_3+W_4}{(\beta+1)(1+W_3)-W_4} \right) \left(\frac{C_o}{K_5 W_3} \right)^{\frac{\beta+2}{\beta+1}} = e^{\frac{\beta+2}{\beta+1}} \quad (3.31)$$

and

$$\left(\frac{2C_o}{C_h\bar{D}} \right) \left(\frac{(\beta+1)(1+W_3)-W_4}{1-(\beta+1)W_3+W_4} \right) \left(\frac{C_b\bar{D}}{K_6 W_4} \right)^{\beta+2} = e^{\beta+2} \quad (3.32)$$

بضرب العلاقتين (3.31) ، (3.32) في بعضهما نجد أن :

$$\left(\frac{C_o}{K_5 W_3} \right)^{\frac{1}{\beta+1}} \left(\frac{C_b \bar{D}}{K_6 W_4} \right) = e^{\frac{\beta+2}{\beta+1}}$$

وبالتالي فإن

$$W_3 = \left(\frac{C_o}{K_5 e^{\beta+2}} \right) \left(\frac{C_b \bar{D}}{K_6 W_4} \right)^{\beta+1} \quad (3.33)$$

and

$$W_4 = \left(\frac{C_o}{K_5 W_3 e^{\beta+2}} \right)^{\frac{1}{\beta+1}} \left(\frac{C_b \bar{D}}{K_6} \right) \quad (3.34)$$

بالتعويض عن قيمة كل من W_3 ، W_4 من (3.34) و (3.33) في (3.32) ، (3.31) نجد أن :

$$f_1(W_3) = W_3^{\frac{2\beta+4}{\beta+1}} + W_3^{\frac{\beta+3}{\beta+1}} + (B_3 - \frac{A_1}{(\beta+1)}) W_3^{\frac{\beta+2}{\beta+1}} - \frac{B_3}{(\beta+1)} W_3^{\frac{1}{\beta+1}} - \frac{B_3 A_1}{(\beta+1)} = 0 \quad (3.35)$$

and

$$f_2(W_4) = W_4^{2\beta+4} + W_4^{2\beta+3} + (B_4 - (\beta+1) A_2) W_4^{\beta+2} - (\beta+1) B_4 W_4^{\beta+1} - (\beta+1) A_2 B_4 = 0 \quad (3.36)$$

حيث :

$$A_1 = \left(\frac{C_o}{K_5 e^{\beta+2}} \right)^{\frac{1}{\beta+1}} \left(\frac{C_b \bar{D}}{K_6} \right) , \quad A_2 = \left(\frac{C_o}{K_5 e^{\beta+2}} \right) \left(\frac{C_b \bar{D}}{K_6} \right)^{\beta+1}$$

$$B_3 = \left(\frac{C_h \bar{D}}{2 C_o} \right) \left(\frac{C_o}{K_5 e} \right)^{\frac{\beta+2}{\beta+1}} , \quad B_4 = \left(\frac{2 C_o}{C_h \bar{D}} \right) \left(\frac{C_b \bar{D}}{K_6 e} \right)^{\beta+2}$$

من العلاقتين (3.35) و (3.36) نلاحظ أن :

$$f_1(0) = -\frac{A_1 B_3}{(\beta+1)} < 0$$

and

$$f_2(0) = -(\beta+1)A_2 B_4 < 0$$

كما أن :

$$f_1(1) = 2 + B_3 - \frac{A_1}{(\beta+1)} - \frac{B_3}{(\beta+1)} - \frac{A_1 B_3}{(\beta+1)} > 0$$

and

$$f_2(1) = 2 + B_4 - (\beta+1)A_2 - (\beta+1)B_4(1+A_2) > 0$$

أي أنه يوجد جذرين $W_j \in (0,1)$ لكل $j=3,4$ ، للتأكد من أن الجذرين المحسوبين من المعادلتين (3.36) ، (3.35) يعطمان دالة الهدف للمشكلة البديلة $g(W_3, W_4)$ ، نوجد المشتقة الثانية لـ $\ln g(W_3, W_4)$ بالنسبة لـ W_3, W_4 على الترتيب كما يلي :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln g(W_3, W_4)}{\partial W_3^2} &= \left[\frac{-(\beta+1)}{\beta+2} \frac{\beta+1}{(1-(\beta+1)W_3+W_4)} + \frac{(\beta+1)}{\beta+2} \frac{-(\beta+1)}{(\beta+1)(1+W_3)-W_4} - \frac{1}{W_3} \right], \\ &= - \left[\left(\frac{\beta+1}{\beta+2} \right)^2 \left[\frac{1}{W_1 W_2} \right] + \frac{1}{W_3} \right] < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln g(W_3, W_4)}{\partial W_4^2} &= \left[\frac{1}{\beta+2} \frac{-1}{(1-(\beta+1)W_3+W_4)} - \frac{1}{\beta+2} \frac{1}{((\beta+1)(1+W_3)-W_4)} - \frac{1}{W_4} \right], \\ &= - \left[\left(\frac{1}{\beta+2} \right)^2 \left[\frac{1}{W_1 W_2} \right] + \frac{1}{W_4} \right] < 0 \end{aligned}$$

وأيضاً

$$\frac{\partial^2 \ln g(W_3, W_4)}{\partial W_3 \partial W_4} = \left[\frac{-(\beta+1)}{\beta+2} \frac{-1}{(1-(\beta+1)W_3+W_4)} + \frac{(\beta+1)}{\beta+2} \frac{1}{((\beta+1)(1+W_3)-W_4)} \right],$$

$$= \frac{(\beta+1)}{(\beta+2)^2} \left[\frac{1}{W_1 W_2} \right] > 0$$

and

$$\frac{\partial^2 \ln g(W_3, W_4)}{\partial W_4 \partial W_3} = \left[\frac{1}{\beta+2} \frac{(\beta+1)}{(1-(\beta+1)W_3+W_4)} - \frac{1}{\beta+2} \frac{-(\beta+1)}{((\beta+1)(1+W_3)-W_4)} \right],$$

$$= \frac{(\beta+1)}{(\beta+2)^2} \left[\frac{1}{W_1 W_2} \right] > 0$$

وبالتالي فإن :

$$\Delta \left(\frac{\partial^2 \ln g(W_3, W_4)}{\partial W_3 \partial W_4} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 \ln g(W_3, W_4)}{\partial W_3^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \ln g(W_3, W_4)}{\partial W_4^2} \right) < 0$$

$$= \left[\left(\frac{(\beta+1)}{(\beta+2)^2} \frac{1}{W_1 W_2} \right)^2 - \left\{ \left(\frac{(\beta+1)}{(\beta+2)} \frac{1}{W_1 W_2} + \frac{1}{W_3} \right) \left(\frac{1}{(\beta+2)} \frac{1}{W_1 W_2} + \frac{1}{W_4} \right) \right\} \right] < 0$$

مما يثبت أن الجذرين المحسوبين من العلاقتين (3.36)، (3.35) يعظمان دالة الهدف للمشكلة البديلة $g(W_3, W_4)$. وعليه فإن W_3^* , W_4^* يمثلان الحل الأمثل للعلاقتين (3.36) ، (3.35) على الترتيب. ويتم الحصول على قيم W_1^* , W_2^* بالتعويض عن W_3^* , W_4^* في المعادلة (3.27) .

لإيجاد العدد المتوقع المثالي للفترات الزمنية N^* لكل دورة ، نستخدم نتائج نظرية البرمجة الهندسية لـ [6] *Duffin et al* كما يلي :

$$C_0 N^{*-(\beta+1)} = W_1^* g(W_3^*, W_4^*)$$

and

$$\frac{C_h \bar{D} N^*}{2} = W_2^* g(W_3^*, W_4^*)$$

بقسمة العلاقتين السابقتين نحصل على عدد الفترات المثلى لكل دورة مخزون كما يلي :

$$\begin{aligned}
N^* &= \left(\frac{2C_o W_2^*}{C_h \bar{D} W_1^*} \right)^{\frac{1}{\beta+2}} \\
&= \left(\frac{2C_o ((\beta+1)(1+W_3^*)-W_4^*)}{C_h \bar{D} (1-(\beta+1)W_3^*+W_4^*)} \right)^{\frac{1}{\beta+2}}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

أعلى مستوى أمثل للمخزون :

$$\begin{aligned}
Q_m^* &= \bar{D} (N^* + \nu) = \bar{D} \nu + \left(\frac{2C_o (\bar{D})^{\beta+1} W_2^*}{C_h W_1^*} \right)^{\frac{1}{\beta+2}} \\
&= \bar{D} \nu + \left(\frac{2C_o (\bar{D})^{\beta+1} ((\beta+1)(1+W_3^*)-W_4^*)}{C_h (1-(\beta+1)W_3^*+W_4^*)} \right)^{\frac{1}{\beta+2}}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

وأيضاً التكلفة الكلية الصغرى المتوقعة للمخزون :

$$\begin{aligned}
\min \bar{TC} &= C_p \bar{D} + C_h \bar{D} \nu + C_o \left(\frac{2C_o W_2^*}{C_h \bar{D} W_1^*} \right)^{\frac{-(\beta+1)}{\beta+2}} + \frac{C_h \bar{D}}{2} \left(\frac{2C_o W_2^*}{C_h \bar{D} W_1^*} \right)^{\frac{1}{\beta+2}} \\
&= C_p \bar{D} + C_h \bar{D} \nu + \left(\frac{1}{2} C_o^{\frac{1}{(\beta+1)}} C_h \bar{D} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}} \left(\left(\frac{W_1^*}{W_2^*} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}} + \left(\frac{W_2^*}{W_1^*} \right)^{\frac{1}{\beta+2}} \right) \\
&= C_p \bar{D} + C_h \bar{D} \nu + \left(\frac{1}{2} C_o^{\frac{1}{(\beta+1)}} C_h \bar{D} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}} \left(\left(\frac{1-(\beta+1)W_3^*+W_4^*}{(\beta+1)(1+W_3^*)-W_4^*} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}} + \left(\frac{(\beta+1)(1+W_3^*)-W_4^*}{1-(\beta+1)W_3^*+W_4^*} \right)^{\frac{1}{\beta+2}} \right)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

SPECIAL CASES

٣-١-٣ حالات خاصة :

يمكن استنتاج بعض نماذج المخزون السلعي الاحتمالي كحالات خاصة كما يلي :

الحالة (١) :

نفرض أن $W_4 \rightarrow 0 \Leftarrow K_6 \rightarrow \infty$, $(B_4 \text{ and } A_2 \rightarrow 0)$, نحصل على نموذج المخزون السلعي الاحتمالي ذي صنف واحد من السلع بتغير تكلفة التجهيز تناقصياً N تحت قيد غير خطي واحد وهو تكلفة التجهيز المتغيرة تناقصياً في N , وعليه فإن المعادلات (3.24) , (3.25) و (3.39) \rightarrow (3.35) تأخذ الصيغ التالية :

$$\min \overline{TC} = C_0 N^{-(\beta+1)} + \frac{C_h \bar{D} N}{2}$$

$$s . t . \quad \frac{C_0 N^{-(\beta+1)}}{K_5} \leq 1$$

كما أن :

$$f(W_3) = W_3^{\frac{2\beta+3}{\beta+1}} + W_3^{\frac{\beta+2}{\beta+1}} + B_3 W_3 - \frac{B_3}{(\beta+1)} = 0$$

حيث :

$$B_3 = \left(\frac{C_h \bar{D}}{2C_0} \right) \left(\frac{C_0}{K_5 e} \right)^{\frac{\beta+2}{\beta+1}}$$

عدد الفترات الزمنية المثلى لكل دورة مخزون :

$$N^* = \left(\frac{2C_0 ((\beta+1)(1+W_3^*))}{C_h \bar{D} (1-(\beta+1) W_3^*)} \right)^{\frac{1}{\beta+2}}$$

كما أن أعلى مستوى أمثل للمخزون:

$$Q_m^* = \bar{D} v + \left(\frac{2C_0 (\bar{D})^{\beta+1} ((\beta+1)(1+W_3^*))}{C_h (1-(\beta+1) W_3^*)} \right)^{\frac{1}{\beta+2}}$$

أيضاً التكلفة الكلية الصغرى المتوقعة للمخزون :

$$\min \overline{TC} = C_p \bar{D} + C_h \bar{D} v + \left(\frac{1}{2} C_0^{(\beta+1)} C_h \bar{D} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}} \left(\left(\frac{(1-(\beta+1)W_3^*)}{(\beta+1)(1+W_3^*)} \right)^{\frac{(\beta+1)}{\beta+2}} + \left(\frac{(\beta+1)(1+W_3^*)}{(1-(\beta+1)W_3^*)} \right)^{\frac{1}{\beta+2}} \right)$$

الحالة (٢) :

نفرض أن $W_3 \rightarrow 0$, $K_5 \rightarrow \infty$, B_3 and $A_1 \rightarrow 0$, نحصل على نموذج المخزون السلعي الاحتمالي ذي صنف واحد من السلع بتغير تكلفة التجهيز تناقصياً تحت قيد خطي واحد وهو ميزانية التخزين ، وعليه فإن المعادلات (3.24) ، (3.25) و (3.39) \rightarrow (3.35) تأخذ الصيغ التالية :

$$\min \overline{TC} = C_o N^{-(\beta+1)} + \frac{C_h \bar{D} N}{2}$$

$$s . t . \quad \frac{C_b \bar{D} N}{K_6} \leq 1$$

كما أن :

$$f(W_4) = W_4^{\beta+3} + W_4^{\beta+2} + B_4 W_4 - (\beta+1)B_4 = 0$$

حيث :

$$B_4 = \left(\frac{2C_o}{C_h \bar{D}} \right) \left(\frac{C_b \bar{D}}{K_6 e} \right)^{\beta+2}$$

عدد الفترات الزمنية المثلى لكل دورة مخزون :

$$N^* = \left(\frac{2C_o (\beta+1 - W_4^*)}{C_h \bar{D} (1 + W_4^*)} \right)^{\frac{1}{\beta+2}}$$

أعلى مستوى أمثل للمخزون :

$$Q_m^* = \bar{D} \nu + \left(\frac{2C_o (\bar{D})^{\beta+1} (\beta+1 - W_4^*)}{C_h (1 + W_4^*)} \right)^{\frac{1}{\beta+2}}$$

وكذلك التكلفة الكلية الصغرى المتوقعة للمخزون :

$$\min \overline{TC} = C_p \bar{D} + C_h \bar{D} \nu + \left(\frac{1}{2} C_o^{\frac{1}{\beta+1}} C_h \bar{D} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}} \left(\left(\frac{(1 + W_4^*)}{(\beta+1 - W_4^*)} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}} + \left(\frac{(\beta+1 - W_4^*)}{(1 + W_4^*)} \right)^{\frac{1}{\beta+2}} \right)$$

الحالة (٣) :

نفرض أن $(A_1 = A_2 \rightarrow 0, B_3 = B_4 \rightarrow 0)$, W_3 and $W_4 \rightarrow 0 \Leftrightarrow K_5, K_6 \rightarrow \infty$
 نحصل على نموذج المخزون السلعي الاحتمالي ذي صنف واحد من السلع بتغير تكلفة التجهيز بدون قيود وعليه فإن المعادلات (3.24), (3.25), و (3.39) \rightarrow (3.35) تأخذ الصيغ التالية :

$$\min \overline{TC} = C_o N^{-(\beta+1)} + \frac{C_h \overline{D} N}{2}$$

عدد الفترات الزمنية المثلى لكل دورة مخزون :

$$N^* = \left(\frac{2 C_o (\beta + 1)}{C_h \overline{D}} \right)^{\frac{1}{\beta+2}}$$

أعلى مستوى أمثل للمخزون:

$$Q_m^* = \overline{D} v + \left(\frac{2 C_o \overline{D}^{\beta+1} (\beta+1)}{C_h} \right)^{\frac{1}{\beta+2}}$$

التكلفة الكلية المتوقعة الصغرى للمخزون :

$$\min \overline{TC} = C_p \overline{D} + C_h \overline{D} v + \left(\frac{1}{2} C_o^{\frac{1}{\beta+1}} C_h \overline{D} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}} \left(\left(\frac{1}{(\beta+1)} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}} + (\beta+1)^{\frac{1}{\beta+2}} \right)$$

ويمكن الحصول على نفس النتائج السابقة باستخدام الطريقة التقليدية وذلك باشتقاق $\min \overline{TC}$ بالنسبة لـ N عندما $N = N^*$ ومساواتها بالصفر كما يلي :

$$\left. \frac{\partial \min \overline{TC}}{\partial N} \right|_{N = N^*} = -(\beta+1) C_o N^{-(\beta+2)} + \frac{C_h \overline{D}}{2} \Big|_{N = N^*} = 0$$

عدد الفترات الزمنية المثلى لكل دورة مخزون :

$$N^* = \left(\frac{2 C_o (\beta + 1)}{C_h \overline{D}} \right)^{\frac{1}{\beta+2}}$$

أعلى مستوى أمثل للمخزون:

$$Q_m^* = \bar{D} \nu + \left(\frac{2C_o \bar{D}^{\beta+1} (\beta+1)}{C_h} \right)^{\frac{1}{\beta+2}}$$

أيضاً التكلفة الكلية الصغرى المتوقعة للمخزون :

$$\min \overline{TC} = C_p \bar{D} + C_h \bar{D} \nu + \left(\frac{1}{2} C_o^{\frac{1}{\beta+1}} C_h \bar{D} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}} \left(\left(\frac{1}{(\beta+1)} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}} + (\beta+1)^{\frac{1}{\beta+2}} \right)$$

الحالة (٤) :

نفرض أن $0 \leq \beta \leq \alpha$ $C_o(N) = C_o$ مقدار ثابت ، نحصل على نموذج المخزون السلعي الاحتمالي ذي صنف واحد من السلع بثبات تكلفة التجهيز تحت قيدين أحدهما غير خطي هو تكلفة التجهيز والآخر خطي هو ميزانية التخزين ، وعليه فإن المعادلات (3.24) ، (3.25) و (3.39) \rightarrow (3.35) تأخذ الصيغ التالية :

$$\min \overline{TC} = \frac{C_o}{N} + \frac{C_h \bar{D} N}{2}$$

$$s . t . \quad \frac{C_o}{NK_5} \leq 1$$

$$\frac{C_b \bar{D} N}{K_6} \leq 1$$

كما أن :

$$f_1(W_3) = W_3^4 + W_3^3 + (B_3' - A)W_3^2 - B_3'W_3 - B_3'A = 0$$

and

$$f_2(W_4) = W_4^4 + W_4^3 + (B_4' - A)W_4^2 - B_4'W_4 - B_4'A = 0$$

حيث :

$$B_3' = \left(\frac{C_h \bar{D}}{2C_o} \right) \left(\frac{C_o}{K_5 e} \right)^2 , \quad B_4' = \left(\frac{2C_o}{C_h \bar{D}} \right) \left(\frac{C_b \bar{D}}{K_6 e} \right)^2 , \quad A = \frac{C_o C_b \bar{D}}{K_5 K_6 e^2}$$

عدد الفترات الزمنية المثلى لكل دورة مخزون :

$$N^* = \sqrt{\frac{2C_o(1+W_3^*-W_4^*)}{C_h \bar{D}(1-W_3^*+W_4^*)}}$$

كما أن أعلى مستوى أمثل للمخزون :

$$Q_m^* = \bar{D} \nu + \sqrt{\frac{2C_o \bar{D}(1+W_3^*-W_4^*)}{C_h(1-W_3^*+W_4^*)}}$$

التكلفة الكلية الصغرى المتوقعة للمخزون :

$$\min \overline{TC} = C_p \bar{D} + C_h \bar{D} \nu + \sqrt{\frac{2C_o C_h \bar{D}}{(1-W_3^*+W_4^*)(1+W_3^*-W_4^*)}}$$

الحالة (٥) :

نفرض أن $K_5, K_6 \rightarrow \infty$ ، $W_3, W_4 \rightarrow 0$ ، وأيضاً $\alpha \rightarrow 0$ ، $\beta = 0$ ، $C_o \rightarrow \infty$

مقدار ثابت ، نحصل على الحالة الكلاسيكية [8] **Fabrycky and Banks** كالتالي :

$$\min \overline{TC} = \frac{C_o}{N} + \frac{C_h \bar{D} N}{2}$$

عدد الفترات الزمنية المثلى لكل دورة مخزون :

$$N^* = \sqrt{\frac{2C_o}{C_h \bar{D}}}$$

كما أن أعلى مستوى أمثل للمخزون:

$$Q_m^* = \bar{D} \nu + \sqrt{\frac{2C_o \bar{D}}{C_h}}$$

و أيضاً التكلفة الكلية الصغرى المتوقعة للمخزون :

$$\min \overline{TC} = C_p \bar{D} + C_h \bar{D} \nu + \sqrt{2C_o C_h \bar{D}}$$

٣-٢-٢ - مثال عددي (٢)

NUMERICAL EXAMPLE

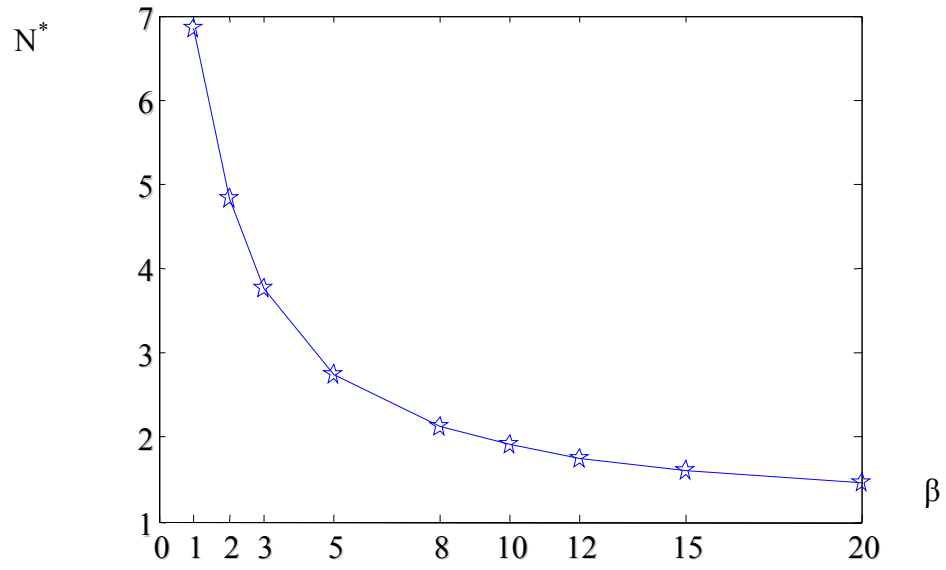
بتطبيق نفس بيانات المثال العددي (١) في الفقرة (٣-٢-٢) بافتراض أن تكلفة ميزانية التخزين هي $C_b = 80 \text{ unit}$ ، و الحد الأقصى لتكلفة التجهيز و الحد الأقصى لتكلفة ميزانية التخزين هما $K_5 = 1200 \text{ unit}$ ، $K_6 = 1800 \text{ unit}$ على التوالي لقيم $\beta = 1, 2, 3, 5, 8, 10, 12, 15, 20$ نحصل على الجدول الآتي :

بالتعويض عن قيم β المختلفة ، نستخدم العلاقات (3.36)، (3.35) لإيجاد W_3^* ، W_4^* ، وذلك للحصول على قيم W_1^* ، W_2^* من العلاقة (3.27) . وبالتالي فإن القيم المثلى لـ $(\min \overline{TC} , Q_m^* , N^*)$ يمكن الحصول عليها كما بالجدول (٣-٢).

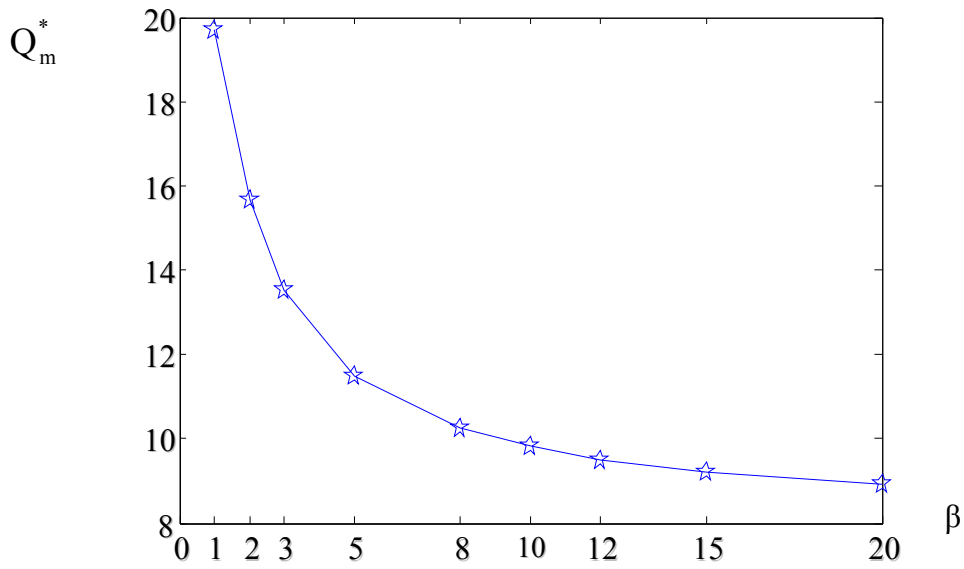
β	N^*	Q_m^*	$C_o(N^*)$	$\min \overline{TC}$
1	6.835	19.671	1.609	50.877
2	4.821	15.642	0.473	50.639
3	3.767	13.535	0.205	50.543
5	2.751	11.502	0.0697	50.462
8	2.120	10.240	0.0269	50.418
10	1.903	9.807	0.017	50.404
12	1.757	9.515	0.012	50.395
15	1.611	9.222	0.0083	50.385
20	1.464	8.928	0.0053	50.376

جدول (٣-٢) تأثير القيمة β على القيم الاقتصادية المثلى

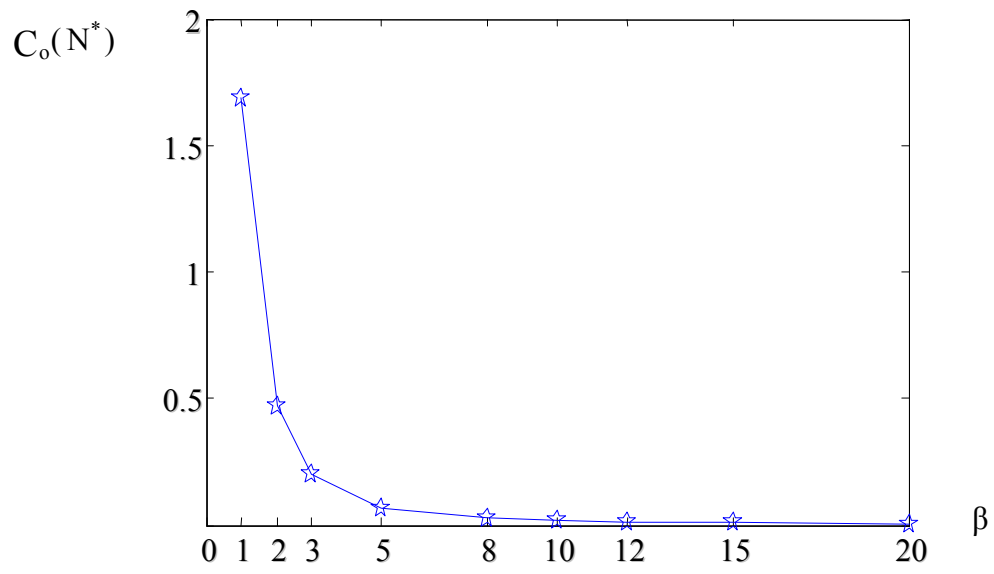
ويمكن توضيح حل هذا النموذج العددي لتمثيل العلاقة بين $(\min \overline{TC} , Q_m^* , N^*)$ مقابل β . وأيضاً $(\min \overline{TC} , Q_m^* , N^*)$ مقابل N^* كما بالرسومات (٣-١٠) — (٣-١٦) التالية :



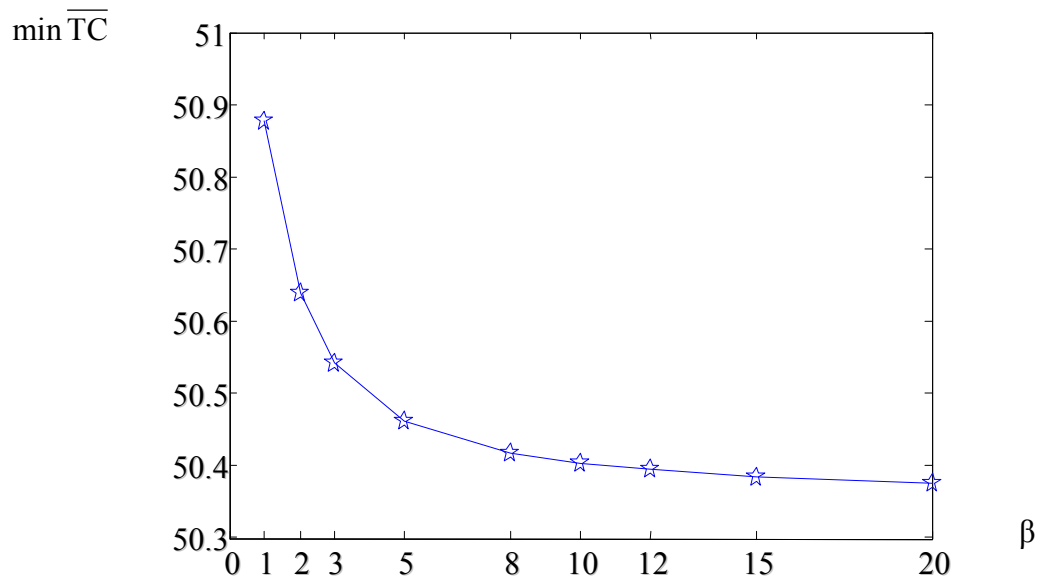
شكل (٣-١٠) العلاقة بين N^* و β



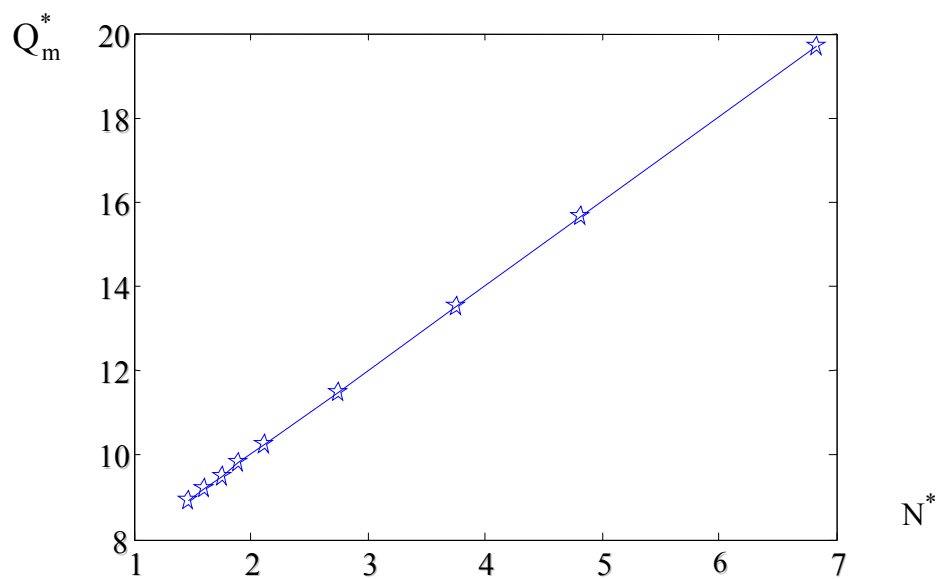
شكل (٣-١١) العلاقة بين Q_m^* و β



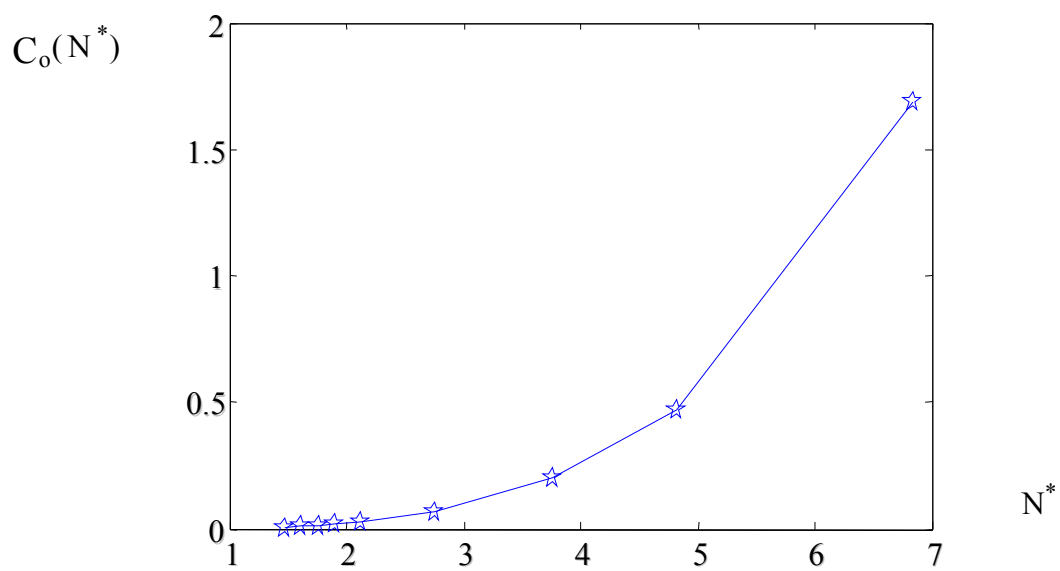
شكل (١٢-٣) العلاقة بين $C_o(N^*)$ و β



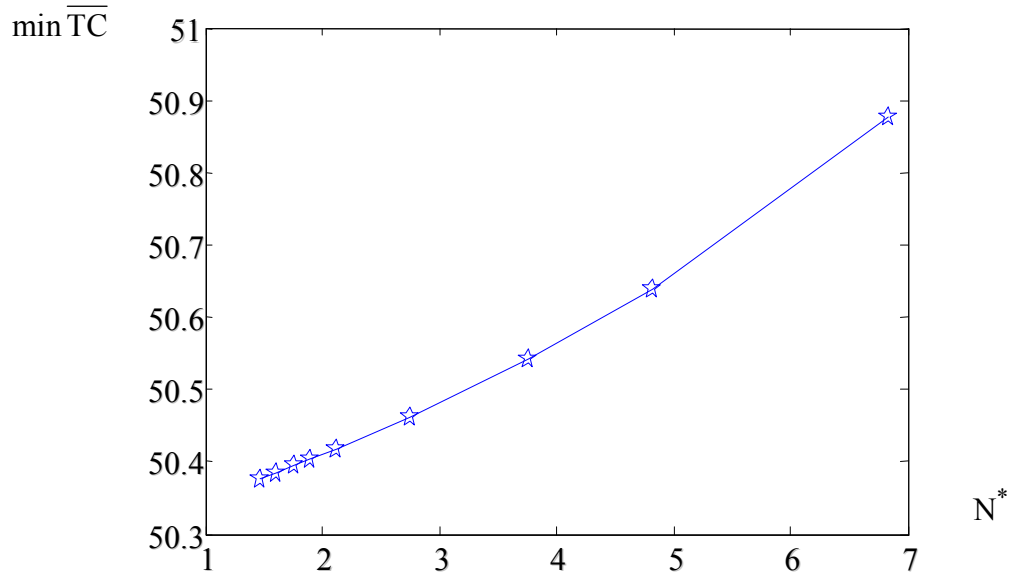
شكل (١٣-٣) العلاقة بين $\min \overline{TC}$ و β



شكل (٣-١٤) العلاقة بين Q_m^* و N^*



شكل (٣-١٥) العلاقة بين $C_o(N^*)$ و N^*



شكل (٣-١٦) العلاقة بين $\min \overline{TC}$ و N^*

٣-٣-٣-٣-٣ الخلاصة :

من الجدول (٣-٢) نجد أن هناك علاقة عكسية بين عدد الفترات المثلى لكل دورة مخزون N^* وقيمة β ، ويوضح هذه العلاقة شكل (٣-١٠) ، أما العلاقة بين أعلى مستوى أمثل للمخزون Q_m^* وقيمة β فهي علاقة عكسية موضحة بشكل (٣-١١) . وأيضاً العلاقة بين تكلفة التجهيز $C_o(N^*)$ وبين قيمة β فهي علاقة عكسية كما بالشكل (٣-١٢) . أخيراً العلاقة بين تكلفة الكلية الصغرى المتوقعة للمخزون $\min \overline{TC}$ وبين قيمة β فهي عكسية موضحة بشكل (٣-١٣) .

ونلاحظ أن العلاقة بين مستوى أمثل المخزون Q_m^* وبين عدد الفترات المثلى لكل دورة مخزون N^* علاقة طردية كما بالشكل (٣-١٤) ، وأيضاً العلاقة بين تكلفة التجهيز $C_o(N^*)$ وبين عدد الفترات المثلى لكل دورة مخزون N^* فهي علاقة طردية موضحة بشكل (٣-١٥) ، أخيراً العلاقة بين تكلفة الكلية الصغرى المتوقعة للمخزون $\min \overline{TC}$ وبين عدد الفترات المثلى لكل دورة مخزون N^* نلاحظ أنهما علاقة طردية يوضحها شكل (٣-١٦) .

المراجع

REFERENCES

المراجع

REFERENCES

المرجع العربي :

- [1] الخطيب ، أحمد شفيق (٢٠٠٢م) : قاموس الجيب في الاقتصاد والتجارة . إنجليزي - عربي ، عربي - إنجليزي ، مكتبة لبنان ، بيروت ، لبنان - الطبعة الأولى .

المراجع الأجنبية :

- [2] Abou-EL-Ata , M.O. and Kotb , K. A. M. , (1997) : " Multi-item EOQ Inventory Model With Varying Holding Cost Under Two Restrictions : A Geometric Programming Approach " . *Production Planning & control* . Vol .8 , No. 6 , pp. 608 – 611 .
- [3] Berman , O. and Perry , D. , (2006): " An EOQ Model with State-Dependent Demand Rate " . *European Journal of Operational Research* ,Vol. 171 , No. 1 , pp. 255-272.
- [4] Cheng , T. C. E. , (1989) : " An Economic Order Quantity Model with Demand-Dependent Unit Cost " . *European Journal of Operational Research* ,Vol .40 , pp. 252-256 ..
- [5] Das , K. , Roy , T.K. and Maiti , M. , (2000) : " Multi-Item Inventory With Quantity – Dependent Inventory Costs And Demand-Dependent Unit Cost Under Imprecise Objective and Restrictions : A Geometric Programming Approach " . *Production Planning & Control* ,Vol 11 , No. 8 , pp. 781-788 .
- [6] Duffin , R. J. , Peterson , E. L. And Zener , C. M. , (1967) : "Geometric Programming" . Wiley , New York .
- [7] EL- Wakeel , M . F., (2001) : "Probabilistic Inventory Models With Constant and Varying Units Cost" . Msc. Dissertation , Faculty .of Science , Tanta University .
- [8] Fabrycky , W. J. , and Banks , J. ,(1967) : " Procurement and Inventory System : Theory and Analysis " , Reinhold Publishing Corporation , U. S. A.
- [9] Fergany , H. A. , (1999) : " Inventory Models With Demand-Dependent Units Cost" . Ph. D. Dissertation , Faculty .of Science , Tanta University .
- [10] Goyal . S.K. , Girib B.C , (2003) : " A Simple Rule For Determining Replenishment Interval Of An Inventory Item With Linear Decreasing Demand Rate" *International Journal Of Production Economics* , Vol. 83 , No 2 , pp. 139-142 .
- [11] Hariri , A. M. A. , Abou-El-Ata , M. O. and Goyal , S. K. , (1995) : " The Resource Constrained Multi-Item Problem with Price Discount : A Geometric Programming Approach " . *Production Planning & Control* , Vol. 6 , No . 4 , pp. 374-377 .
- [12] Hoon Jung and Cerry M . Klein. , (2001) : " Optimal Inventory Policies Under Decreasing Functions Via Geometric Programming " *European Journal Of Operational Research* , Vol. 132 , No . 3 , pp. 628-642 .

- [13] Ibrahim AL-Harkan and Moncer Harige , (2007) : " A Simulation Optimization Solution The Inventory Continuous Review Problem With Lot Size Dependent Lead Time" *The Arabian Journal for Science & Engineering* ,Vol. 32 , No. 2B , pp. 327-338 .
- [14] Jinn –Tsair Teng , and Hui-Ling Yang , (2007) : " Deterministic Inventory Lot – Size Models with Time-Varying Demand and Cost Under Generalized Holding Costs " . *Information and Management Sciences* ,Vol. 18 , No. 2 , pp. 113-125
- [15] Juneau , J., and Eyler , R. D . , (2001) : " An Economic Order Quantity Model For Time-Varying Demand " .*The International Journal of Modern Engineering* ,Vol . 1 , No. 2 .pp. 1-10 .
- [16] Khouja , M. and Goyal , S., (2006) : " Single-Item Optimal Lot Sizing under Continuous Unit Cost Decrease " . *International Journal of Production Economics* , Vol.102 , No. 1 , pp. 87-94 .
- [17] Kotb , K. A. M. , (1998) : " The Resource Constrained single-Item Inventory Problem with Demand–Dependent Unit Cost . *Production Planning and Control* , Vol.9 , No. 7 , pp. 700-704 .
- [18] Kun-Chan , W.U . , (2002) : "Deterministic Inventory Model For Item With Time Varying Demand ,Weible Distribution And Shortage " . *Yugoslav Journal of Operational Research* ,Vol. 12 , No. 1 , pp. 61-71 .
- [19] Kurt , M. B. , Bala , S. , Siddhartha , S. and Robert , J. V. , (2006) : "Production and Inventory Management under Multiple Resource Constraints " . *Mathematical and Computer Modelling* , Vol. 44 , No. 1 , pp. 85-95 .
- [20] Maloney , B. M. , (1992) : " The Multi-Product Inventory System Under Constraint" . *Ph. D. Dissertation , University of Missouri-Columbia* .
- [21] Mandal , N.K , Roy, T.K and Maiti , M., (2006) : " Multi-Item Fuzzy Inventory Problem With Space Constraint Via Geometric Programming Method" . *Yugoslav Journal of Operational Research* ,Vol. 16 , No. 1 , pp. 55-66 .
- [22] Niketa , J .Mehte ,and Nita, H. Shah , (2005) : " Time Varying Increasing Demand Inventory Model For Deteriorating Items " . *Revista Investigacion Operacional* , Vol. 26 , No. 1 pp. 3-9 .
- [23] Sahidul Islam and Tapan Roy (2007) : " Fuzzy Multi – Item Economic Production Quantity Model Under Space Constraint : A Geometric Programming Approach " . *Applied Mathematics and Computation* . Vol .184 , pp. 326 – 335 .
- [24] Taha , H. A. (1976) : " Operations Research " . New York , Macmillan publishing Co. , Inc.
- [25] Wang Sheng–Pen ,(2002) : "On Inventory Replenishment With Non-Linear Increasing Demand " .*Computers & Operations Research* , Vol .29 , No. 13 , pp. 1819 -1825.
- [26] Wong , H. , Van Houtum, G. J. , Cattrysse , D. and Van Oudheusden , D. (2006) : " Multi-Item Spare Parts Systems with Lateral Transshipments and Waiting Time Constraints " . *European Journal of Operational Research* ,Vol. 171 , No. 3 , pp. 1071-1093
- [27] WU Kun-Shan , (2002) : "Deterministic Inventory Model For Item With Time Varying Demand , Weibull Distribution Deterioration And Shortages" . *Yugoslav Journal of Operational Research* , Vol .12 , No. 1 , pp. 61-72 .

الملاحق

APPENDICES



المصطلحات

TERMINOLOGY

(أ)

Decision Making	اتخاذ القرارات
Total cost (Gross cost)	التكلفة الكلية (إجمالي التكلفة)
Order	التوريد
Probability	احتمالي
Provisional	احتياطي
Depreciation	احتياطي الاستهلاك
Production Management	إدارة الإنتاج
Order Blank	استمارة الطلب
Stability (Static)	استقرار (ثبات)
Stability Demand	استقرار الطلب
Economic Stability	استقرار اقتصادي
Receipt of Goods (R.O.G)	استلام البضائع
Consumption	استهلاك
Production Depreciation	استهلاك الإنتاج
Capital Consumption	استهلاك رأس المال
Approach	أسلوب
Period Inventory System	أسلوب الجرد الدوري
Perpetual Inventory System	أسلوب الجرد المستمر
Geometric Programming Approach	أسلوب البرمجة الهندسية
A derive of Receipt (A.R)	أشعار الاستلام
Maximum Inventory Level	أعلى مستوى للمخزون

Re-Ordering Quantity (R.O.Q)	الكمية لإعادة الطلب
Optimal	أمثل
Time Horizon	المدى الزمني
Speculative	المضاربة
Production	إنتاج
Stockout	النفاد

(ب)

Operation Research	بحوث العمليات
Geometric Programming	برمجة الهندسية
Non Constrained	بدون قيود
Goods	بضائع (سلع)
Spoiled Goods	بضائع تالفة
Goods In Stock	بضائع في المستودع
Perishable Goods	بضائع قابلة للتلف

(ت)

Re-Production	تجديد الإنتاج (إعادة الإنتاج)
On Order	تحت الطلب
Total Costing	تحديد تكلفة الكلية
Optimalization	تحقيق الأمثلية
Minimization	تحقيق الحد الأدنى
Maximization	تحقيق الحد الأعلى
Storage (Warehousing)	تخزين
Production Planning	تخطيط الإنتاج
Spot Delivery	تسليم مباشر
Ex Warehouse	تسليم المخزن
Immediate Delivery	تسليم فوري
Reduction Of Cost	تخفيض التكاليف
Cost-Push	تضخم التكلفة

Change In Stock	تغيرات في المخزون
Change In Demand	تغيرات الطلب
Setup cost	تكلفة التجهيز
Holding Cost	تكلفة التخزين
Production Cost	تكلفة الإنتاج
Budget Cost	تكلفة الميزانية
Product Differentiation	تنوع المنتج

(ح)

Economic Lot Size (E.L.S)	حجم الكمية الاقتصادية
Run Size	حجم المخزون
Static Case	حالة ساكنة
State Dependent	حالة الاعتماد
Dynamic Case	حالة ديناميكية

(د)

Primal Function	دالة أولية
Dual Function	دالة بديلة
Posynomial Function	دالة بواسونية
Concave Function	دالة مقعرة
Objective Function	دالة الهدف
One - Shot	دفعة واحدة
Inventory Cycle	دورة المخزون
Optimal Inventory Cycle	دورة المخزون المثلى

(ر)

Order Number	رقم الطلب
--------------	-----------

(ز)

Lead Time (Time Lag)	زمن التسليم (زمن التأخير)
Increase In Demand	زيادة الطلب

(س)

Price	سعر
Cost Price	سعر التكلفة
Demand Price	سعر الطلب
Economic Good	سلعة اقتصادية
Single-Item	سلعة واحدة
Multi-Item	سلع متعددة
Capital Good	سلع إنتاجية
year (time unit)	سنه (وحدة الزمن)

(ش)

Buying	شراء
--------	------

(ص)

Net Costs	صافي التكاليف
Zero Lead Time	صفر وقت الانتظار

(ض)

Constrained Control	ضبط القيود
---------------------	------------

(ط)

Economic Method	طريقة اقتصادية
Lagrangion Method	طريقة لاجرانج
Algorithmic Method	طريقة الخوارزمية
Heuristic Methods	طرق المساعدة في اكتشاف الحل
Demand	طلب
Increasing Demand	طلب تزايدى
Decreasing Demand	طلب تناقصى
Length Of Inventory Cycle	طول دورة المخزون
Optimal length of Inventory Cycle	طول دورة المخزون المثلى

(ع)

Number Of Period Per Cycle	عدد الفترات لدورة المخزون
Optimal Number Of Period Per Cycle	عدد الفترات المثلى لدورة المخزون
Backlogging	عدم الوفاء

(غ)

Deterministic	غير احتمالي
Un restricted	غير مقيد

(ف)

Budget Surplus	فائض الميزانية
----------------	----------------

(ق)

Low Demand	قانون الطلب
Decision	قرار
Constrained- Restricted	قيود
Linear Constrained	قيد خطي
Non Linear Constrained	قيد غير خطي

(ك)

Production Run	كمية التوريد
Economic Order Quantity	كمية الطلب الاقتصادية
Optimal Order Quantity	كمية الطلب المثلى
Re-Order Quantity (R.O.Q)	كمية لإعادة الطلب

(م)

Level	مستوى
Average Inventory Level	متوسط مستوى المخزون
Stock	مخزون
Safety Stock	مخزون الأمان

Inventory	مخزون سلعي
Re-Ordering Level (R.O.L)	مستوى لإعادة الطلب
Single –Source	مصدر واحد
Multi –Source	مصادر متعددة
Stock Control	مراقبة المخزون السلعي
Demand Rate	معدل الطلب
Optimal Demand rate	معدل الطلب الأمثل
Probability Demand Rate	معدل طلب احتمالي
Static Demand Rate	معدل طلب ساكن
Demand Curve	منحنى الطلب
Cost Curve	منحنى التكاليف

(ن)

Decision Theory	نظرية اتخاذ القرارات
Economic Theory	نظرية اقتصادية
Demand pattern	نمط الطلب
Model	نموذج
Probabilistic Model	نموذج احتمالي
Deterministic Model	نموذج غير احتمالي
Inventory Model	نموذج المخزون
Static Model	نماذج ساكنة

(و)

Storage Unit	وحدة تخزين
Weight	وزن
Time Of Delivery	وقت تسليم
Lead Time	وقت الانتظار
Replenishment	وطول الطلبية

﴿ ملحق (ب) ﴾

مثال تطبيقي

APPLICATION EXAMPLE

حرصاً على التعاون مع المجتمع وإسهاماً منا في البحوث التي توفر الحلول المناسبة لمشكلات المجتمع من خلال المشاركة الايجابية مع الهيئات الحكومية بالملكة . تم التنسيق مع إدارة شركة تبوك للتنمية الزراعية (تادكو) في تحليل بيانات نموذج المخزون السلعي غير الاحتمالي ، وأيضاً النموذج الاحتمالي ذي صنف واحد من السلع (سماد اليوريا - فاكهة الخوخ) بقيود مع معدل الطلب بحالة الاعتماد التزايدية و التناقصية . جمعت البيانات الآتية :

$$C_o = 102 \text{ S.R} , \quad C_h = 2.4 \text{ S.R} , \quad \alpha = 3950 \text{ M/T}$$

$$K_1 = 2000 \text{ M/T} , \quad K_2 = 4000 \text{ unit}$$

حيث K_1 الحد الأقصى لمتوسط مستوى التخزين ، K_2 الحد الأقصى لعدد الطلبات خلال (٢٠٠٦ م) . بعد تحليل بيانات النموذجين حصلنا على النتائج التالية :

β	$D(Q) = \alpha Q^\beta$			β	$D(Q) = \alpha Q^{-\beta}$		
	$D(Q^*)$	T_c^*	minTC		$D(Q^*)$	T_c^*	minTC
0	3950	0.139	1392.4	2	3.943	8.026	50.688
0.1	7674.43	0.0998	1941.06	3	0.832	20.193	25.217
0.2	15502.7	0.0600	2815.33	5	0.124	64.070	11.135
0.3	35124.3	0.0414	4207.49	8	0.025	171.972	5.928
0.4	75374.8	0.0211	6742.18	10	0.013	265.086	4.615
0.5	218780	0.0140	10955.5	20	0.0023	871.511	2.574
0.6	416877	0.0056	20869.2	25	0.0014	1279.18	2.252
0.7	854684	0.00253	42816.8	50	0.00043	3146.5	1.685
0.8	1728288	0.00115	90494.6	60	0.00033	3951.59	1.600
0.9	2325467	0.000514	199784	80	0.00022	5587.15	1.469

جدول (م-١) تأثير قيمة α , β على القيم الاقتصادية المثلى

من الجدول نلاحظ أنه عندما يزداد معدل الطلب في الحالة الأولى تزداد التكلفة الكلية للمخزون ، والعكس صحيح . كما أن تزايد معدل الطلب يؤدي إلى تناقص طول دورة المخزون ، والعكس صحيح . و هذا يؤكد النتائج التي حصلنا عليها في الباب الثاني .

وبالمثل عند تحليل بيانات نموذج المخزون السلعي احتمالي المقيد ذو الصنف الواحد من السلع وهو (فاكهة الخوخ) في حال تغير تكلفة التجهيز تزايدياً وتناقصياً في N جمعت البيانات التالية :

$$\begin{aligned} C_o &= 12.86 \text{ SR /MT} , & C_h &= 9.65 \% \text{ SR/MT} , & C_b &= 80 \text{ SR/MT} \\ C_p &= 1780.87 \text{ SR/MT} , & S &= 50 \text{ ft}^2 , & \bar{D} &= 25 \text{ Unit / Unit Time} \\ K_1 &= 188.98 \text{ SR/MT} , & K_2 &= 27.0 \% \text{ SR/MT} \\ K_3 &= 14.15 \text{ SR /MT} , & K_4 &= 1913.59 \text{ SR/MT} \end{aligned}$$

حيث K_1 هو الحد الأقصى لتكلفة التخزين ، و K_2 هو الحد الأقصى لمساحة التخزين ، و K_3 هو الحد الأقصى لتكلفة التجهيز ، و K_4 الحد الأقصى لميزانية التخزين . كما أن تكلفة التجهيز تعطى بالصورة التالية :

$$C_o = \alpha + \beta N \quad \alpha > 0 , \quad \beta \geq 0$$

القيم المثلى لـ $(\min TC , Q_m^* , N^*)$ كما في الجدول (م-٢) ، حيث يوجد علاقة طردية بين كل من (عدد الفترات المثلى لدورة المخزون - أعلى مستوى أمثل للمخزون - تكلفة التجهيز - تكلفة المخزون الكلية المتوقعة) ، وقيمة α .

نلاحظ أيضاً وجود علاقة طردية بين (أعلى مستوى أمثل للمخزون وعدد الفترات المثلى لدورة المخزون) ، وأيضاً بين (تكلفة التجهيز وعدد الفترات المثلى لدورة المخزون) وأخيراً (تكلفة المخزون الكلية المتوقعة وعدد الفترات المثلى لدورة المخزون) . وهي نفس العلاقات التي حصلنا عليها في النموذج الأول من الباب الثالث .

$\alpha \backslash \beta$	$C_o (N^*)$				$\min \overline{TC}$				N^*	Q_m^*
	0	10	50	100	0	10	50	100		
1	1	1.395	2.976	4.953	45275.6	45285.6	45325.6	45375.6	0.0395	75.988
2	2	2.452	4.260	6.520	45295.2	45305.2	45345.2	45395.2	0.0452	76.130
3	3	3.480	5.403	7.806	45313.7	45323.7	45363.7	45413.7	0.0480	76.201
5	5	5.510	7.553	10.106	45349.6	45359.6	45399.6	45449.6	0.0510	76.276
8	8	8.531	10.659	13.317	45402.3	45412.3	45452.3	45502.3	0.0531	76.329
10	10	10.539	12.699	15.398	45437.3	45447.3	45487.3	45537.3	0.0539	76.349
15	15	15.551	17.757	20.515	45524.1	45534.1	45574.1	45624.1	0.0551	76.378
30	30	30.564	32.822	35.645	45783.7	45793.7	45833.7	45883.7	0.0564	76.411
50	50	50.570	52.850	55.701	46129.3	46139.3	46179.3	46229.3	0.0570	76.425
120	120	120.575	122.87	125.75	47338.2	47348.2	47388.2	47438.2	0.0575	76.438

جدول (م-٢) تأثير قيم α , β على القيم الاقتصادية المثلى

وفي حال أن تكلفة التجهيز تأخذ الصورة التالية :

$$C_o = C_o N^{-\beta} \quad C_o > 0, \beta \geq 1$$

وباستخدام نفس البيانات السابقة نجد أن :

β	N^*	Q_m^*	$C_o(N^*)$	$\min \overline{TC}$
1	1.963	124.094	6.548	44534.7
3	1.832	120.81	2.0902	44532.3
5	1.6607	116.663	1.018	44531.6
8	1.5065	112.663	0.484	44531.1
10	1.434	110.853	0.349	4531
12	1.379	109.496	0.269	44530.8
15	1.320	108.024	0.197	44530.7
25	1.213	105.335	0.102	44530.5

جدول (م-٣) تأثير قيمة β على القيم الاقتصادية المثلى

من الجدول (م-٣) حصلنا على القيم المثلى لـ $(N^*, Q_m^*, \min \overline{TC})$ ، ونستنتج وجود علاقة عكسية بين كل من (عدد الفترات المثلى لدورة المخزون - أعلى مستوى أمثل للمخزون - تكلفة التجهيز - تكلفة المخزون الكلية المتوقعة) وقيمة β .

كما نلاحظ أن هناك علاقة طردية بين كل من (أعلى مستوى أمثل للمخزون - تكلفة التجهيز - التكلفة الكلية الصغرى المتوقعة المخزون) وبين عدد الفترات المثلى لدورة المخزون . وهذا ينطبق مع ما تم الحصول عليه من علاقات في النموذج الثاني من الباب الثالث.

Kingdom of Saudi Arabia
Ministry of Higher Education
Umm Al-Qura University
Makkah AL-Mukkaramah
Girl College Of Education \ Science Departments
Department Of Mathematics



*CONSTRAINED DETERMINISTIC AND
PROBABILISTIC INVENTORY MODELS
USING GEOMETRIC PROGRAMMING
APPROACH*

A THESIS

Submitted to Department of Mathematics for Partial Fulfillment
of The Degree of Master of Science

In
(*Mathematical Statistics*)

By
HUDA MOHAMMED HAMED AL-SHANBARI
B.Sc. In Mathematics

Supervisor
Dr . KOTB ABD-EL-HAMIED MAHMOUD KOTB

Assist . Professor Of Mathematical Statistics
And Head of Mathematics Department
Taif Teachers College - Taif University

م 2008 / ١٤٢٩ هـ