الوحدة الرابعة هندسة تاسع :-

الرموز

S_b : مساحة القاعدة

S_L : المساحة الجانبية

S_T : المساحة الكلية

P : محيط القاعدة

h : الارتفاع

V : الحجم

الموشور والاسطوانة:

المساحة الجانبية للموشور القائم أو للاسطوانة الدورانية =
محيط القاعدة × الارتفاع

المساحة الكلية =
المساحة الجانبية + ضعفي مساحة القاعدة

حجم الموشور أو الاسطوانة =
مساحة القاعدة × الارتفاع

حجم متوازي المستطيلات أبعاده x و y و z

$$V = x \cdot y \cdot z$$

حجم المكعب طول حرفه a :

$$V = a^3$$

حجم الهرم : $V = \frac{1}{3} S_b \cdot h$

المخروط الدوراني

مساحة الدائرة : $S = \pi r^2$

محيط الدائرة : $P = 2\pi r$

محيط المثلث - المستطيل - المربع ... = مجموع أطوال أضلاعه

المدرسة: مرح بشنك الرفاعي

Scanned by CamScanner

مثال 73 | اسطوانة دوران ارتفاعها 40 Cm ، طول نصف قطر قاعدتها 7.5 ، أوجد مساحتها الجانبية ثم مساحتها الكلية ثم حجمها.

الحل: لدينا فرضاً $r = 7.5$ ، $h = 40$

المساحة الجانبية:

$$S_L = \underbrace{P}_{\text{محيط الدائرة}} \times \underbrace{h}_{\text{ارتفاعها}}$$

محيط الدائرة $P = 2\pi r$

$$= 2\pi r \times h$$

$$= 2\pi (7.5) \times 40 = 600\pi \ C.m^2$$

المساحة الكلية:

$$\underbrace{S_T}_{\text{المساحة الكلية}} = \underbrace{S_L}_{\text{المساحة الجانبية}} + \underbrace{2 S_b}_{\text{ضعفي القاعدة}}$$

مساحة الدائرة $S_b = \pi r^2 =$

$$S_T = 600\pi + 2(\pi r^2)$$

$$= 600\pi + 2(\pi (7.5)^2) = 712.5\pi \ C.m^2$$

الحجم:

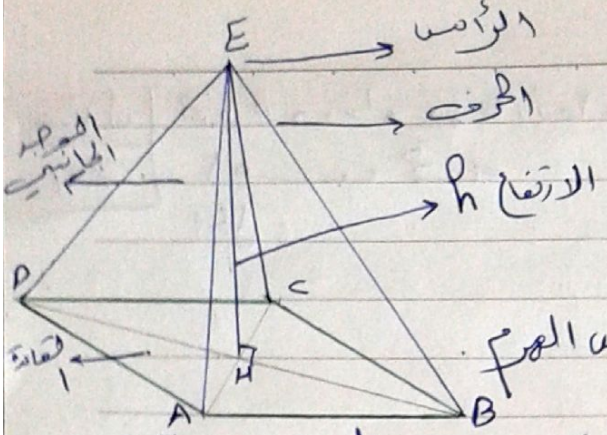
$$V = S_b \times h$$

$$= \pi r^2 \times h$$

$$= \pi (7.5)^2 \times 40 = 2250\pi \ Cm^3$$

المدرسة: مرح بشار الرفاعي

Scanned by CamScanner



الهرم: هو مجسم يميزه:

* مضلع يسمى قاعدة الهرم.

* نقطة E لا تنتمي إلى القاعدة تسمى رأس الهرم.

* مثلثات مشتركة بالرأس E وقواعدها هي أضلاع قاعدة الهرم ويسمى كل منها وجهاً جانبياً.

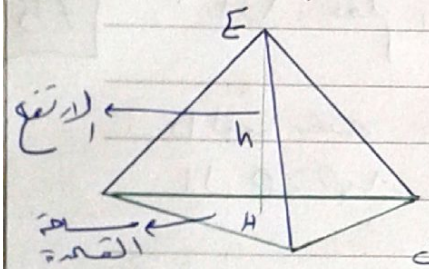
* السطح الجانبي وهو السطح المؤلف من مجموع الأوجه الجانبية.

* ارتفاع الهرم من رأسه E، هو العمود [EH] على مستوى قاعدته حيث H نقطة من القاعدة.

الهرم المنتظم: نقول إن هرماً رأسه E هو هرم منتظم إذا استوفى الشرطين:

① قاعدته مضلع مركزه O "مثلث متساوي الأضلاع أو مربع أو ..."

② ارتفاعه هو القطعة المستقيمة [EO] "الواصلة بين رأس الهرم ومركز القاعدة"

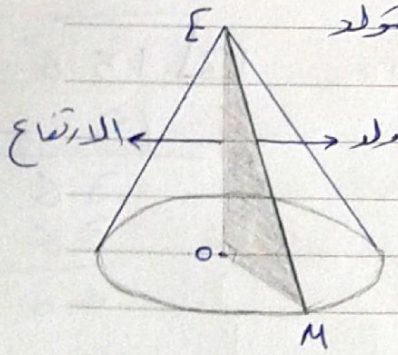


حجم الهرم:

$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h$$

المخروط الدوراني:

المخروط الدوراني الذي رأسه E هو المجسم المتولد من دوران مثلث EOM قائم في O، حول المستقيم (OE)، القرص المتولد من دوران [OM] هو قاعدة المخروط.



ارتفاع المخروط الدوراني الذي رأسه E ومركز قاعدته O، هو القطعة المستقيمة [EO] وهو أيضاً الطول EO المستقيم (EO) عمودي على مستوي القاعدة.

حجم مخروط دوراني، وليكن $V = \frac{1}{3} S_b \cdot h$

المدرسة: مرج مشنار الثانوية

Scanned by CamScanner

مثال 74 | مخروط دوراني ارتفاعه $h = 4$ ونصف قطر قاعدته $r = 1.5$
احسب حجمه

الحل:

$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h$$

$$= \frac{1}{3} (\pi r^2) \cdot h$$

$$= \frac{1}{3} \pi (1.5)^2 \cdot (4)$$

$$= 3\pi$$

5/75 | احسب المساحة الجانبية لموشور قائم قاعدته مثلث أطوال أضلاعه 12 و 10 و 8 وارتفاعه 14

$$S_L = P \times h = (8+10+12) \times 14 = 30 \times 14 = 420 \text{ cm}$$

حيث P محيط القاعدة والقاعدة هي مثلث فيكون محيطها مجموع أطوال الأضلاع.

7/75 | هرم ارتفاعه 36 m وحجمه $156\ m^3$ ما مساحة قاعدته؟

الحل: نعلم أن حجم الهرم $= \frac{1}{3} S_b \cdot h$

$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h$$

بالتعويض:

$$156 = \frac{1}{\cancel{3}} S_b \cdot (\cancel{36}^{12})$$

بالاختصار:

$$\frac{156}{12} = \frac{\cancel{12} S_b}{\cancel{12}}$$

نقسم على أمثال المجهول.

$$\boxed{13 = S_b}$$

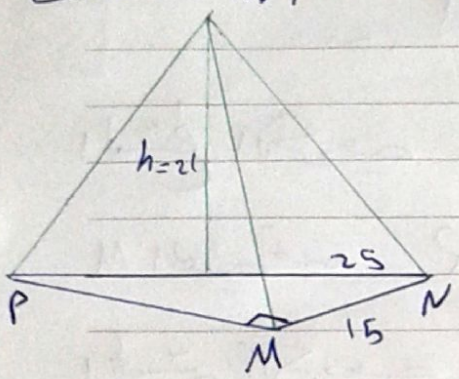
$$\begin{array}{r} 13 \\ 12 \overline{)156} \\ 12 \\ \hline 36 \\ 36 \\ \hline 00 \end{array}$$

المدرسة: مرح الشناء الرقماني

Scanned by CamScanner

10
75

احسب حجم هرم ارتفاعه 21 وقاعدته MNP مثلث قائم في M وفيه $MN = 15$ و $NP = 25$



الحل: نعلم أن مساحة المثلث القائم

$$= \frac{\text{جداء الضلعين القائمين}}{2} = \frac{MN \times MP}{2}$$

لكن لدينا فرضنا ضلع قائم ووتر، نحسب الضلع القائم الثاني نعلم حسب فيثاغورث

$$(\text{الوتر})^2 = (\text{الضلع القائمة الأولى})^2 + (\text{الضلع القائمة الثانية})^2$$

$$(NP)^2 = (MN)^2 + (MP)^2$$

$$(25)^2 = (15)^2 + (MP)^2$$

$$625 = 225 + (MP)^2$$

$$625 - 225 = (MP)^2$$

$$400 = (MP)^2 \Rightarrow \boxed{MP = 20}$$

$$V = \frac{1}{3} S_b \times h$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\overset{10}{\cancel{20}} \times \overset{5}{\cancel{15}}}{\cancel{2}}\right) \times 21$$ باختصار

$$= 10 \times 5 \times 21 = 50 \times 21 = 1050 \ cm^3$$

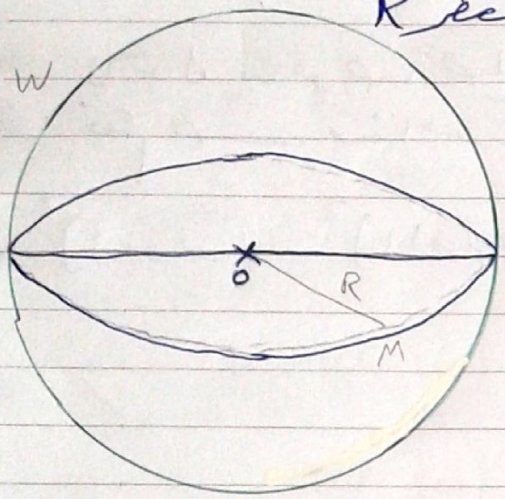
المدرسة: مرح مشنك الزعبي

Scanned by CamScanner

الكرة :-

السطح الكروي : ذو المركز O ونصف القطر R هو مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق $OM = R$

المجسم الكروي : ذات المركز O ونصف القطر R هي مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق $OM \leq R$



لحساب مساحة سطح كرة بدلالة نصف قطرها

$$S = 4\pi R^2$$

لحساب حجم الكرة بدلالة نصف قطرها R

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

قطر الكرة W هو قطعة مستقيمة منتصفها مركز الكرة O وطرفاها نقطتان من الكرة

الدائرة الكبرى : هي دائرة واقعة على الكرة وقطرها = قطر الكرة

مثال 77

كرة قطرها 60، احسب مساحة سطحها :

الحل : لدينا القطر $2R = 60$ ، نحسب نصف القطر $R = 30$

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi (30)^2 = 4\pi (900) = 3600\pi \ cm^2$$

مثال 78

علبة بشكل متوازي مستطيلات، أبعادها 4, 4, 8 ، تحوي هذه العلبة كرتين متماستين نصف قطر كل منهما 2 سنتمتر أوجد العلبة، احسب حجم الفراغ المحصور بين الكرتين والعلبة.

الحل :

نعلم أن حجم متوازي المستطيلات = $x.y.z$

المدرسة: مرج سشنا الثانوي

فلو رمزنا إلى حجم العلبة بـ V كان:

$$V = 4 \times 4 \times 8 = 128\ cm^3$$

نرمز لحجم إحدى الكرتين بالرمز V'، وحسب دستور حجم الكرة

$$V' = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi (2)^3 = \frac{4}{3}\pi (8) = \frac{32}{3}\pi\ cm^3$$

فيكون حجم الفراغ المحصور بين الكرتين والعلبة هو $V - 2V' =$

$$= 128 - \frac{64}{3}\pi\ cm^3$$

مقاطع مجسمات:-

مقطع متوازي مستطيلات بمستوٍ يوازي أحد أوجهه هو مستطيل يطابق ذلك الوجه

مقطع متوازي مستطيلات بمستوٍ يوازي أحد أحرفه هو مستطيل أحد بعديه يساوي ذلك الحرف

مقطع اسطوانة دورانية بمستوٍ يوازي قاعدتها أو يعامد محورها هو دائرة تطابق القاعدة

مقطع اسطوانة دورانية بمستوٍ يوازي محورها هو مستطيل أحد بعديه يساوي ارتفاع الاسطوانة

مقطع مخروط دوراني بمستوٍ يوازي قاعدته هو دائرة مصغرة عن الدائرة القاعدة

مقطع هرم بمستوٍ يوازي قاعدته هو تصغير للقاعدة

مقطع كرة بمستوٍ هو دائرة

" مجسم كروي بمستوٍ هو قرص دائري

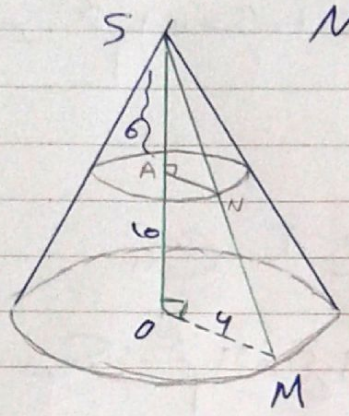
المدرسة: مرح بشار الزماعي

Scanned by CamScanner

مثال 84

مخروط دوراني رأسه S وقاعدته قرص دائري مركزه O وارتفاعه المخروط $SO = 10$ ونصف قطر قاعدته $OM = 4$ ، A نقطة من SO تحقق $SA = 6$ ، المستوي P المار بالنقطة A موازياً قاعدة المخروط يقطع أحد مولداته SM في النقطة N

احسب مساحة مقطع المخروط بالمستوي P



الحل:

المقطع هو تصغير لقاعدة المخروط ونسبة التصغير:

$$K = \frac{SA}{SO} = \frac{6}{10} = 0.6$$

نرمز إلى مساحة المخروط بالرمز S و

" " " مقطع " " S' فتكون $S' = (0.6)^2 S$

$$S' = (0.36)(\pi r^2)$$

$r = OM = 4$

$$= (0.36)(\pi)(4)^2 = 5.76\,\pi \ cm^2$$

مثال 85

SABCD هرم منتظم رأسه S وقاعدته ABCD مربع طول ضلعه 6 ، ارتفاع الهرم $SO = 12$ ، G نقطة من ارتفاعه [SO] تحقق $SG = 9$ ، مقطع الهرم بالمستوي المار بالنقطة G موازياً مستوي قاعدة الهرم هو المربع A'B'C'D'

① احسب V_1 حجم الهرم SABCD

② " " V_2 " SA'B'C'D' ثم استنتج V حجم جذع الهرم ABCD - A'B'C'D'

③ تحقق من حسابك باستعمال الدستور

$$V = \frac{1}{3} h \left(S + S' + \sqrt{S \times S'} \right)$$

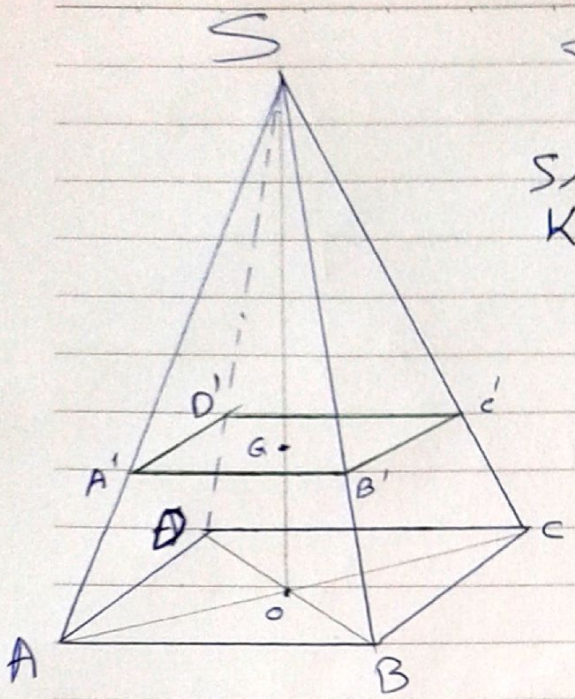
الحل:

$$V_1 = \frac{1}{3} S_{b_1} \cdot h_1 \qquad : h_1 = SO = 12$$

القاعدة مربع ومساحته الضلع × الضلع

$$= \frac{1}{3} (6 \times 6) \times 12 = 144 \ cm^3$$

المدرسة: مرج ستار الزمامي



$V_2 = \frac{1}{3} S_{b_2} \times h_2$

لكن الهرم $SA'B'C'D'$ تصغير للهرم $SABCD$ بنسبة

$K = \frac{SG}{SO} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

فيكون حجمه

$V_2 = K^3 \times V_1$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times 144 = 60.75 \ Cm^3$

حجم جذع الهرم هو فرق الحجمين

$V = V_1 - V_2 = 144 - 60.75$

$= 83.25 \ Cm^3$

ارتفاع جذع الهرم هو $h = GO = SO - SG = 12 - 9 = 3 \ Cm$

$S' = K^2 \times S = \frac{9}{16} \times 36 = 20.25 \ Cm^2$, $S = 36 \ Cm^2$

بالتعويض:

$V = \frac{1}{3} \times h \left(S + S' + \sqrt{S \times S'}\right)$

$= \frac{1}{3} \times 3 \times \left(36 + 20.25 + \sqrt{36 \times 20.25}\right)$

$= 56.25 + 6 \times 4.5 = 56.25 + 27 = 83.75 \ Cm^3$

المدرسة: نوح مشار الرفاعي

Scanned by CamScanner