ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**LÊ THỊ MINH NGUYỆT**

# TÊN ĐỀ TÀI
# SỰ TƯƠNG TỰ GIỮA SỐ VÀ HÀM
# VÀ ỨNG DỤNG TRONG TOÁN SƠ CẤP

CHUYÊN NGÀNH: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ: 60.46.40

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**Người hướng dẫn khoa học: GS. TSKH. HÀ HUY KHOÁI**

**THÁI NGUYÊN - 2010**

**Công trình được hoàn thành tại**
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**

**Người hướng dẫn khoa học: GS. TSKH. HÀ HUY KHOÁI**

Phản biện 1:..........................................................
..........................................................

Phản biện 2:..........................................................
..........................................................

Luận văn sẽ được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**
*Ngày .... tháng .... năm 2010*

**Có thể tìm hiểu tại**
**THƯ VIỆN ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**

# Mở đầu

Sự phát triển của số học, đặc biệt trong những năm gần đây, chịu ảnh hưởng rất lớn của sự tương tự giữa số nguyên và đa thức. Giữa số học và đa thức có sự tương tự rất lớn nên để nghiên cứu các tính chất nào đó của số nguyên người ta thử phát biểu tính chất này trên vành đa thức. Chẳng hạn định lý Fermat cho đa thức được chứng minh rất đơn giản dựa vào định lý Mason. Từ định lý Mason cho đa thức ta có giả thuyết abc cho các số nguyên, mà định lý cuối cùng của Fermat chỉ là hệ quả của giả thuyết này.

Mục đích chính của luận văn là tìm hiểu sự tương tự giữa số nguyên và đa thức trên trường số phức. Cụ thể ứng dụng định lý Mason trong nghiên cứu đa thức, tìm tòi những tương tự số học của định lý Mason và các hệ quả của nó. Ứng dụng sự tương tự đó đề xuất một số bài tập về đa thức và số học tương ứng. Đồng thời tìm hiểu sự mở rộng của định lý Mason.

Nội dung luận văn gồm 3 chương:

Chương 1: Trình bầy định lý Mason và một số hệ quả của định lý Mason, áp dụng định lý Mason đề đề xuất một số bài tập về đa thức.

Chương 2: Một số kết quả tương tự của số học cho định lý Mason như giả thuyết abc, một số hệ quả của giả thuyết abc, các kết quả tương tự của số học cho các định lý và bài tập ở chương 1.

Chương 3: Trình bầy định lý Mason mở rộng, áp dụng định lý Mason mở rộng vào nghiên cứu đa thức nhiều biến.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự chỉ bảo và hướng dẫn tận tình của GS.TS Hà Huy Khoái. Thầy đã dành nhiều thời gian hướng dẫn và giải đáp

các thắc mắc của tôi trong suốt quá trình làm luận văn. Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy.

Tôi xin cảm ơn Sở Nội vụ, Sở Giáo dục và Đào tạo Tuyên Quang, trường THPT Tân Trào, Tổ Toán trường THPT Tân Trào đã giúp đỡ tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học này.

Tôi xin gửi tới các thầy cô khoa Toán, phòng đào tạo sau đại học Trường Đại Học Khoa Học, Đại Học Thái Nguyên cũng như các Thầy cô đã tham gia giảng dạy khóa cao học 2008 - 2010, lời cảm ơn sâu sắc nhất về công lao dạy dỗ trong suốt quá trình giáo dục, đào tạo của Nhà trường.

Tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè và những người đã quan tâm, tạo điều kiện, động viên, cổ vũ để tôi có thể hoàn thành nhiệm vụ của mình.

Thái Nguyên, ngày 19 tháng 9 năm 2010

**Tác giả**

**Lê Thị Minh Nguyệt**

# Mục lục

# Chương 1
# Định lý Mason và ứng dụng của nó

## 1.1. Định lý Mason

Trước hết ta thấy rõ giữa tập hợp các số nguyên và tập hợp các đa thức có những tính chất rất giống nhau. Ta để ý đến sự tương tự giữa phân tích ra thừa số nguyên tố và đa thức bất khả quy. Nếu giả thiết $K$ là trường đóng đại số thì mỗi đa thức $f(x) \in K[x]$ có thể phân tích dạng:

$$f(x) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n},$$

trong đó $p_i(x) = (x - a_i), \ \ a_i \in K.$
Như vậy có thể nói rằng, trong sự phân tích bất khả quy và phân tích ra thừa số nguyên tố, các nghiệm của đa thức tương ứng với các thừa số nguyên tố của số nguyên. Do đó số các nghiệm phân biệt của đa thức có vai trò tương tự như số các ước nguyên tố của số nguyên.

Vào năm 1983, R.C.Mason đã cho một kết quả đánh giá quan hệ giữa bậc của các đa thức với số các nghiệm phân biệt của tích các đa thức đó.

**1.1.1 Định lý Mason:**

*Giả sử $P$, $Q$, $R$ là các đa thức một biến với hệ số phức, nguyên tố cùng nhau từng cặp, thỏa mãn:*

$$P + Q = R.$$

*Khi đó nếu ta kí hiệu $n_0(f)$ là số nghiệm phân biệt của đa thức $f$ thì ta có:*

$$\max\{degP, degQ, degR\} \leq n_0(P.Q.R) - 1.$$

**1.2.2 Chứng minh định lý:** Từ giả thiết $P + Q = R$ ta suy ra

$$\frac{P}{R} + \frac{Q}{R} = 1.$$

Để tiện lợi trong tính toán ta đặt $f = \dfrac{P}{R}$ và $g = \dfrac{Q}{R}$. Khi đó, $f + g = 1$ nên $f^{'} + g^{'} = 0$ và thay $f^{'} = -g^{'}$ ta được

$$\frac{\frac{f^{'}}{f}}{\frac{g^{'}}{g}} = -\frac{g}{f} = -\frac{Q}{P}.$$

Giả sử ta có sự phân tích các hàm hữu tỉ theo các nghiệm của đa thức

$$P = m\prod(z - a_i)^{\alpha_i}; Q = n\prod(z - b_t)^{\beta_t}; R = l\prod(z - c_j)^{\gamma_j}.$$

Theo công thức đạo hàm của tích ta được

$$\frac{P^{'}}{P} = m\sum\frac{\alpha_i}{z - a_i}$$

$$\frac{Q^{'}}{Q} = n\sum\frac{\beta_t}{z - b_t}$$

$$\frac{R^{'}}{R} = l\sum\frac{\gamma_j}{z - c_j}.$$

Ta lại có

$$\frac{f^{'}}{f} = \frac{P^{'}}{P} - \frac{R^{'}}{R},$$

Tương tự cho

$$\frac{g^{'}}{g} = \frac{Q^{'}}{Q} - \frac{R^{'}}{R}.$$

Do đó

$$\frac{Q}{P} = -\frac{m\sum\frac{\alpha_i}{z - a_i} - l\sum\frac{\gamma_j}{z - c_j}}{n\sum\frac{\beta_t}{z - b_t} - l\sum\frac{\gamma_j}{z - c_j}}.$$

Ta kí hiệu

$$D(z) = \prod(z - a_i)\prod(z - b_t)\prod(z - c_j).$$

Hiển nhiên $D(z) = n_0(PQR)$ và

$$\frac{D(z)}{z - a_i} = n_0(PQR) - 1 = \frac{D(z)}{z - b_t} = \frac{D(z)}{z - c_j}. \qquad 1.1$$

Nhân cả tử số và mẫu số cho $D(t)$ ta được

$$\frac{Q}{P} = -\frac{m\sum\frac{\alpha_i}{z-a_i} - l\sum\frac{\gamma_j}{z-c_j}}{n\sum\frac{\beta_t}{z-b_t} - l\sum\frac{\gamma_j}{z-c_j}}.\frac{D(z)}{D(z)}. \qquad 1.2$$

Theo (1.1) thì cả tử và mẫu ở (1.2) đều có dạng tổng của các đa thức có bậc bằng $n_0(PQR)-1$. như vậy $\frac{Q}{P}$ là tỉ số của hai đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng $n_0(PQR)-1$.

Vì $P$ và $Q$ nguyên tố cùng nhau và từ (1.2) ta có

$$Q.(D.\frac{g^{'}}{g}) = -P.(D.\frac{f^{'}}{f}).$$

Do đó ta có cả $P$ và $Q$ đều có bậc nhỏ hơn hoặc bằng $n_0(PQR)-1$.

Ta lại có $R = P+Q$ nên $R$ cũng có bậc không vượt quá $n_0(PQR)-1$.

Vậy

$$\max\{degP, degQ, degR\} \leq n_0(PQR)-1.$$

Điều phải chứng minh.

## 1.2. Một số hệ quả của định lý Mason

Sử dụng định lý Mason, ta có cách chứng minh đơn giản của định lý Fermat cho đa thức.

**1.2.1 Định lý cuối cùng của Fermat cho đa thức:**

*Với $\forall n \geq 3$ không tồn tại các đa thức $P, Q, R$ khác hằng số, hệ số phức, nguyên tố cùng nhau thỏa mãn phương trình:*

$$P^n + Q^n = R^n.$$

**Chứng minh:**

Giả sử các đa thức $P, Q, R$ thỏa mãn phương trình trên: Rõ ràng số nghiệm phân biệt của đa thức $P^nQ^nR^n$ không vượt quá $degP + degQ + degR$. Áp dụng định lý Mason ta có:

$$\max\{degP^n, degQ^n, degR^n\} \leq n_0(P^nQ^nR^n)-1.$$

$$\Leftrightarrow \max\{n.degP, n.degQ, n.degR\} \leq n_0(P.Q.R) - 1$$

$$\leftrightarrow \max\{n.degP, n.degQ, n.degR\} \leq degP + degQ + degR - 1,$$

$$\Rightarrow n.degP \leq degP + degQ + degR - 1$$

$$n.degQ \leq degP + degQ + degR - 1$$

$$n.degR \leq degP + degQ + degR - 1.$$

Cộng lại từng vế ta được:

$$n(degP + degQ + degR) \leq 3(degP + degQ + degR) - 3.$$

(Vô lý với $n \geq 3$) $\Rightarrow$ Điều phải chứng minh.

### 1.2.2 Hệ quả của định lý Mason

*Không tồn tại đa thức khác hằng P, Q, R, nguyên tố cùng nhau từng đôi một thỏa mãn:*

$$P^{2008} + Q^{2009} = R^{2010}.$$

**Chứng minh:**

Áp dụng định lý trên ta có:

$$\max\{degP^{2008}, degQ^{2009}, degR^{2010}\} \leq n_0(P^{2008}.Q^{2009}.R^{2010}) - 1$$

$$\Leftrightarrow \max\{2008degP, 2009degQ, 2010degR\} \leq degP + degQ + degR - 1$$

$$\Rightarrow 2008degP \leq degP + degQ + degR - 1$$

$$2009degQ \leq degP + degQ + degR - 1$$

$$2010degR \leq degP + degQ + degR - 1$$

$$\Rightarrow 2008degP + 2009degQ + 2010degR \leq 3(degP + degQ + degR) - 3$$

$$\Leftrightarrow 2005degP + 2006degQ + 2007degR \leq -3.$$

(Vô lý)

$\Rightarrow$ Điều phải chứng minh

### 1.2.3 Định lý Fermat mở rộng cho đa thức

*Không tồn tại các đa thức P, Q, R, nguyên tố cùng nhau từng đôi một thoả mãn:*

$$P^m + Q^n = R^k,$$

*với* $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{k} < 1$.

**Chứng minh:** Áp dụng định lý Mason ta có :

$$\max\{degP^m, degQ^n, degR^k\} \le n_0(P^m.Q^n.R^k) - 1,$$

$$\Leftrightarrow \max\{mdegP, ndegQ, kdegR\} \le degP + degQ + degR - 1,$$

$$\Rightarrow mdegP \le degP + degQ + degR - 1,$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{m} \ge \frac{degP}{degP + degQ + degR - 1}.$$

Tương tự :

$$\frac{1}{n} \ge \frac{degQ}{degP + degQ + degR - 1},$$

$$\frac{1}{k} \ge \frac{degR}{degP + degQ + degR - 1}.$$

Cộng từng vế của bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} \ge \frac{degP + degQ + degR}{degP + degQ + degR - 1} > 1.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Ta được điều phải chứng minh.

**1.2.4 Định lý Davenport:**

*Giả sử P, và Q là hai đa thức khác hằng và* $P^2 \ne Q^3$*. Khi đó ta có :*

$$deg(P^2 - Q^3) \ge \frac{1}{2}deg(Q) + 1,$$

*hay*

$$deg(P^2 - Q^3) \ge \frac{1}{3}deg(P) + 1.$$

**Chứng minh:**

Đặt $R = P^2 - Q^3 \Leftrightarrow R + Q^3 = P^2$.

Áp dụng định lý Mason :

$$\max\{degR, degQ^3, degP^2\} \le n_0(P^2RQ^3) - 1$$

$$\Rightarrow degP^2 \leq n_0(P^2Q^3R) - 1$$

$$degQ^3 \leq n_0(P^2Q^3R) - 1$$

$$\Rightarrow 2degP \leq degP + degQ + degR - 1 \qquad 1.3$$

$$3degQ \leq degP + degQ + degR - 1 \qquad 1.4$$

$$\Rightarrow 2degP + 3degQ \leq 2(degP + degQ + degR - 1)$$

$$\Rightarrow degR \geq \frac{1}{2}degQ + 1$$

$$\Leftrightarrow deg(P^2 - Q^3) \geq \frac{1}{2}degQ + 1.$$

Tương tự từ công thức (1.3) ta có

$$4degP \leq 2degP + 2degQ + 2degR - 2 \qquad 1.5$$

Cộng (1.4) và (1.5) lại ta được:

$$degP \leq 3degR - 3$$

$$\Rightarrow degR \geq \frac{1}{3}degP + 1$$

$$\Rightarrow deg(P^2 - Q^3) \geq \frac{1}{3}degP + 1.$$

(Điều phải chứng minh).

**1.2.5 Định lý Davenport tổng quát:**

*Cho m, n là các số nguyên dương lớn hơn 1. Giả sử P, Q là các đa thức phức, khác hằng sao cho $P^m \neq Q^n$. Khi đó, ta có:*

$$deg(P^m - Q^n) \geq \frac{m.n - n - m}{n}.deg(P) + 1, \qquad 1.6$$

*và*

$$deg(P^m - Q^n) \geq \frac{m.n - m - n}{m}.deg(Q) + 1. \qquad 1.7$$

Từ công thức (1.6) và (1.7), ta suy ra được một họ các bài toán:

**Bài toán:** Cho P và Q là là các đa thức với hệ số nguyên, khác hằng, sao cho $P^3 \neq Q^4$. Khi đó ta có:

$$deg(P^3 - Q^4) \geq \frac{5}{3}.deg(P) + 1,$$

và

$$deg(P^3 - Q^4) \geq \frac{5}{4}.deg(Q).$$

**Bài toán:** Cho P và Q là là các đa thức với hệ số nguyên, khác hằng, sao cho $P^7 \neq Q^5$. Khi đó ta có:

$$deg(P^7 - Q^5) \geq \frac{23}{7}.deg(Q) + 1,$$

và

$$deg(P^7 - Q^5) \geq \frac{23}{5}.deg(P).$$

Việc áp dụng trực tiếp định lý Mason hoặc các hệ quả của nó, giúp chúng ta sáng tác được các bài toán về sự tồn tại đa thức thỏa mãn một số quan hệ về bậc, các bài toán về nghiệm trong C[t]. Đa số các bài toán này đều giải được dựa vào phương pháp phản chứng.

## 1.3. Ứng dụng của định lý Mason và đề xuất một số bài toán về đa thức

### 1.3.1 Các bài toán về nghiệm trong C[t]:

**Bài toán 1.1:**

Chứng minh phương trình $X^4 + Y^4 = Z^2$ chỉ có nghiệm tầm thường trong C[t] .

Hiển nhiên $X = Y = Z = 0$ là nghiệm của phương trình. Giả sử phương trình trên có nghiệm không tầm thường. Theo định lý Mason, ta có:

$$\max\{deg(X^4), deg(Y^4), deg(Z^2)\} \leq n_0(X^4Y^4Z^2) - 1.$$

Ta suy ra được:

$$deg(X^4) \leq n_0(X.Y.Z) - 1$$

$$\Leftrightarrow 4deg(X) \leq deg(X) + deg(Y) + deg(Z) - 1 \qquad 1.8.$$

Tương tự ta có:

$$4deg(Y) \leq deg(X) + deg(Y) + deg(Z) - 1, \qquad 1.9$$

$$2deg(Z) \leq deg(X) + deg(Y) + deg(Z) - 1. \qquad 1.10$$

Từ (1.10) suy ra

$$deg(Z) \leq deg(X) + deg(Y) - 1. \qquad 1.11$$

Cộng (1.8) và (1.9) vế theo vế ta được

$$2[deg(X) + deg(Y)] \leq 2deg(Z) - 2. \qquad 1.12$$

Thay (1.11) vào (1.12) ta được

$$2[deg(X) + deg(Y)] \leq 2[deg(X) + deg(Y) - 1] - 2,$$

$$\Longleftrightarrow 0 \leq -4.$$

Điều này vô lý vậy phương trình đã cho chỉ có nghiệm tầm thường.

Chúng ta xét đến phương trình có dạng $X^p + Y^q = Z^r$.

Trường hợp $p = q = r \geq 3$ thì đây là phương trình Fermat cho đa thức và kết quả là bài toán vô nghiệm.

Trường hợp p, q, r là các số nguyên dương bất kỳ lớn hơn 2 thì kết quả vẫn đúng.

**Bài toán 1.2:**

Cho p, q, r là các số nguyên dương lớn hơn hoặc bằng 3. Khi đó, phương trình Fermat tổng quát

$$X^p + Y^q = Z^r.$$

Không có nghiệm không tầm thường trong C[t] .

Thật vậy, giả sử tồn tại các nghiệm khác 0 thỏa mãn phương trình. Khi đó, áp dụng định lý Mason ta được

$$pdeg(X) \leq deg(X) + deg(Y) + deg(Z) - 1,$$

$$qdeg(Y) \leq deg(X) + deg(Y) + deg(Z) - 1,$$

$$rdeg(Z) \leq deg(X) + deg(Y) + deg(Z) - 1.$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được

$$(p-3)deg(X) + (q-3)deg(Y) + (r-3)deg(Z) \leq -3.$$

Điều này mâu thuẫn với $p, q, r \geq 3$.

Bài toán 1.2 có thể phát biểu theo dạng nghiệm hữu tỉ như sau: Cho $n \geq 3$, chứng minh phương trình $x^n + y^n = 1$ không có nghiệm hữu tỉ khác hằng số x, y trong C[t].

Bài toán 1.1 và bài toán 1.2 chỉ là những trường hợp riêng của bài toán tổng quát sau. Do đó việc giải bài toán sau cho ta cách giải khác đối hai bài toán trên.

**Bài toán 1.3:**

Cho p, q, r là các số nguyên dương. Nếu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq 1$ thì phương trình $X^p + Y^q = Z^r$ chỉ có nghiệm tầm thường trong C[t].

Thật vậy, giả sử tồn tại các đa thức khác không và là nghiệm của phương trình trên. Khi đó, từ chứng minh phần (1.2.3) ta thấy điều mâu thuẫn. Vậy bài toán được chứng minh.

Bây giờ ta xét đến trường hợp riêng của bài toán trên, là phương trình Catalan cho đa thức.

**Bài toán 1.4:**

Cho p, q là các số dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng phương trình $X^p - Y^q = 1$ không có nghiệm là các đa thức khác hằng, nguyên tố cùng nhau trong C[t].

Thật vậy, giả sử tồn tại hai đa thức một biến với hệ số phức nguyên tố cùng nhau $X(t), Y(t)$ thỏa mãn hệ thức $X^p - Y^q = 1$.

Theo định lý Mason ta có:

$$\max\{deg(X^p), deg(Y^q)\} \leq n_0(X^p.Y^q) - 1.$$

Từ đó, ta suy ra

$$p.deg(X) \leq deg(X) + deg(Y) - 1, \qquad 1.13$$

và

$$q.deg(Y) \leq deg(X) + deg(Y) - 1. \qquad 1.14$$

Cộng vế theo vế (1.13) và (1.14) ta được

$$(p-2)deg(X) + (q-2)deg(Y) \leq -2. \qquad 1.15$$

Vì $p, q \geq 2$ nên $(p-2)deg(X) + (q-2)deg(Y) \geq 0$. Do đó (1.15) không xảy ra ( Điều phải chứng minh).

**Bài toán 1.5**

Cho p, q, r là các số nguyên dương thỏa $2 \leq p \leq q \leq r$ và giả sử $X(t), Y(t), Z(t)$ là các đa thức thuộc C[t], nguyên tố cùng nhau từng cặp, không đồng thời là hằng số và thỏa mãn phương trình
$X^p + Y^q = Z^r$. Khi đó,

$a)(p, q, r) = (2, 2, r)$ với $r \geq 2$ hoặc

$b)(p, q, r) = (2, 3, r)$ với $3 \leq r \leq 5$.

Thật vậy, giả sử $X(t), Y(t), Z(t)$ là các đa thức thuộc C[t] có bậc lần lượt là a, b, c. Theo định lý Mason, ta có

$$\max\{deg(X^p), deg(Y^q), deg(Z^r)\} \leq n_0(X^p.Y^q.Z^r) - 1.$$

Từ đó, ta suy ra

$$pdeg(X) \leq deg(X) + deg(Y) + deg(Z) - 1,$$

$$\Leftrightarrow p.a \leq a + b + c - 1.$$

Tương tự

$$q.b \leq a + b + c - 1,$$

$$r.c \leq a + b + c - 1.$$

Cộng vế theo vế ta được:

$$p.a + q.b + r.c \leq 3(a + b + c - 1). \qquad 1.16$$

Vì $p \leq q \leq r$ nên

$$p(a + b + c) \leq p.a + q.b + r.c. \qquad 1.17$$

Từ ( 1.16) và (1.17) ta được

$$p(a+b+c) \leq 3(a+b+c) - 3.$$

Từ đây ta suy ra được $p < 3$ mà $p \geq 2$ nên $p = 2$. Do đó

$$p.a \leq a+b+c-1.$$

Suy ra

$$2.a \leq a+b+c-1.$$

Tức là

$$a \leq b+c-1.$$

Kết hợp với

$$q.b \leq a+b+c-1.$$

Ta dược

$$q.b \leq 2b+2c-2. \qquad 1.18$$

a) Nếu $q = 2$ thì

$$(p, q, r) = (2, 2, r); r \geq 2$$

b) Xét $q \geq 3$.

Từ $q \leq r$, kết hợp với (1.17) ta suy ra

$$q(b+c) \leq q.b + r.c \leq 2(a+b+c-1) \leq 4(b+c-1) \leq 4(b+c) - 4.$$

Như vậy

$$(q-4)(b+c) \leq -4.$$

Suy ra $q \leq 3$. Khi $q = 3$, từ (1.18) ta có

$$b \leq 2c - 2. \qquad 1.19$$

Do đó kết hợp (1.17) và (1.19) ta được

$$r.c \leq a+b+c-1 \leq 2(b+c-1) \leq 6(c-6).$$

Suy ra $r < 6$.

Mà $3 = q \leq r$ nên ta có $(p, q, r) = (2, 3, r)$ với $3 \leq r \leq 5$.

### 1.3.2 Các bài toán về tồn tại đa thức:

**Bài toán 1.6:**

Cho a là một số phức khác không. Khi đó, nếu tồn tại các đa thức một biến với hệ số phức $f(t), g(t)$ thỏa mãn phương trình
$f^2(t) = g^3(t) + a$ thì $f$ và $g$ là các đa thức hằng.

Giả sử các đa thức $f$ và $g$ không là đa thức hằng.
Theo giả thiết $f^2(t) = g^3(t) + a$ nên $f^2 - g^3 = a \neq 0$. Khi đó, áp dụng định lý Mason hoặc định lý Davenport tổng quát ta kết luận được bài toán.
Thật vậy, theo công thức (1.6), ứng với $m = 2, n = 3$ ta được

$$deg(f^2 - g^3) \geq \frac{1}{3}.deg(f) + 1,$$

$$\Leftrightarrow deg(a) \geq \frac{1}{3}.deg(f) + 1.$$

Do $deg(a) = 0$ và $deg(f).0$ nên bất đẳng thức trên không xảy ra. Vậy $f$ và $g$ là các đa thức hằng.

Lập luận tương tự thì bài toán trên vẫn còn đúng khi m và n là các số nguyên bất kỳ.

**Bài toán 1.7:** Cho a là một số phức khác 0. Khi đó, nếu tồn tại các đa thức một biến với hệ số phức $f(t), g(t)$ thỏa mãn phương trình $f^m(t) = g^n(t) + a$, với $m, n \geq 2$ là các số nguyên dương tùy ý, thì $f$ và $g$ là các đa thức hằng.

Thật vậy, giả sử các đa thức $f$ và $g$ không là đa thức khác hằng.
Theo định lý Davenport tổng quát ta có

$$deg(f^m - g^n) \geq \frac{m.n - m - n}{m}.deg(g) + 1. \qquad 1.20$$

Vì $m, n \geq 2$ nên $(m-2)(n-2) \geq 0$.
Khai triển ta được $m.n - (m+n) + 4 - (m+n) \geq 0$.
Do đó $m.n - (m+n) \geq 0$ ( do $4 - (m+n) \leq 0$).
Như vậy, $\frac{m.n - m - n}{m}.deg(g) + 1 \geq 1$ mà $deg(f^m - g^n) = deg(a) = 0$. Bất đẳng thức (1.20) không xảy ra.
Vì vậy, các đa thức $f$ và $g$ đều là các đa thức hằng.

**Bài toán 1.8**

Không tồn tại các đa thức $f(t)$ và $g(t)$ nguyên tố cùng nhau trong C[t] thỏa mãn phương trình

$$(f+g)^3 + g^4 = f^5.$$

Thật vậy, theo giả thiết $(f,g) = 1$, ta suy ra $gcd(f,g,f+g) = 1$. Do đó áp dụng định lý Mason hoặc bài toán (1.2) cho $p = 3, q = 4, f = 5$ thì phương trình trên vô nghiệm.

**Bài toán 1.9:**

Không tồn tại các đa thức $f(t)$ và $g(t)$ nguyên tố cùng nhau trong C[t] thỏa mãn phương trình

$$(f+g)^3 = g^3 + f^3.$$

Ta có thể giải bài toán theo hằng đẳng thức sau:

$$(f+g)^3 = g^3 + f^3.$$

$$\Leftrightarrow 3f^2.g + 3f.g^2 = 0,$$

$$\Leftrightarrow 3.f.g(f+g) = 0.$$

Tuy nhiên, việc giải bài toán cho số mũ tổng quát rất khó khăn nếu dùng hằng đẳng thức.

**Bài toán 1.10:**

Cho n là số nguyên lớn hơn hoặc bằng 3. Tìm các đa thức một biến với hệ số phức $f(t)$ và $g(t)$ trong C[t] thỏa mãn phương trình

$$(f+g)^n = g^n + f^n. \qquad 1.21$$

Xét trường hợp n là lẻ.

Giả sử $(f,g) = 1$ thì $gcd(f,g,f+g) = 1$. Khi đó, áp dụng định lý Mason hoặc định lý Fermat cho đa thức, ta suy ra được không tồn tại hai đa thức $f(t)$ và $g(t)$ trong C[t] thỏa mãn phương trình

$(f+g)^n = g^n + f^n$.

Ta thấy rằng, $f(t) = -g(t)$ hoặc ít nhất $f$ và $g$ là hai đa thức 0 thỏa mãn phương trình (1.21).

Trường hợp $(f,g) = h, h \neq 0, h \neq f$. Khi đó, tồn tại các đa thức $u, v$ sao cho $f = h.u, g = h.v$. phương trình $(f+g)^n = g^n + f^n$

$$\Leftrightarrow (u+v)^n = v^n + v^n. \tag{1.22}$$

Hiển nhiên $(u, v) = 1$ nên theo định lý Fermat cho đa thức ta suy ra phương trình (1.22) vô nghiệm.

Như vậy, khi n là số lẻ thì phương trình đã cho chỉ có nghiệm $f(t) = -g(t)$ hoặc ít nhất $f$ và $g$ là đa thức 0.

Xét trường hợp n là số chẵn.

Giả sử $(f,g) = 1$ thì $gcd(f, g, f+g) = 1$. Khi đó, áp dụng định lý Mason hoặc định lý Fermat cho đa thức, ta suy ra được không tồn tại hai đa thức $f(t)$ và $g(t)$ trong C[t] thỏa mãn phương trình

$$(f+g)^n = g^n + f^n.$$

Ta thấy rằng, ít nhất $f$ và $g$ là đa thức 0 thỏa mãn phương trình (1.21). Trường hợp $(f,g) = h, h \neq 0$. Khi đó, tồn tại các đa thức $u, v$ sao cho $f = h.u, g = h.v$. Phương trình $(f+g)^n = g^n + f^n$

$$\Leftrightarrow (u+v)^n = u^n + v^n.$$

Hiển nhiên $(u, v) = 1$ nên theo định lý Fermat cho đa thức ta suy ra phương trình vô nghiệm.

Như vậy, khi n là số chẵn thì phương trình đã cho chỉ có nghiệm khi ít nhất $f$ và $g$ là đa thức 0.

**Bài toán 1.11:**

Tìm các số ngiệm nguyên x của phương trình

$$(2^x - 4)^3 + (4^x - 2)^3 = (4^x + 2^x - 6)^3.$$

Theo bài toán (1.9) ta kết luận được $2^x - 4 = 0$ hoặc $4^x - 2 = 0$ hoặc $4^x + 2^x - 6 = 0$. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên là $x = 2$ và $x = 1$.

**Bài toán 1.12:**

Tồn tại hay không đa thức với hệ số thực P sao cho mọi nghiệm thực của P và P+1 đều là nghiệm bội.

Ta dễ dàng chỉ ra được bài toán có nghiệm, chẳng hạn đa thức
$P(t) = (1 - t^2)^3 - 1$.
Rõ ràng, nghiệm thực của $P(t)$ là $t = 0$ bội 3 và nghiệm thực của
$P(t) + 1 = (1 - t^2)^3$ là $t = 1$ và $t = -1$ đều bội 3.

Khi chúng ta phát biểu bài toán (1.12) trên trường số phức và nghiệm phức thì kết quả sẽ như thế nào? Rõ ràng, đây là bài toán khó nếu ta không áp dụng định lý Mason.

**Bài toán 1.13:**

Tồn tại hay không đa thức với hệ số phức P sao cho mọi nghiệm phức của P và $P + 1$ đều là nghiệm bội.

Giả sử tồn tại đa thức P với hệ số phức sao cho mọi nghiệm phức của P và $P + 1$ đều là nghiệm bội.

Do nghiệm bội nhỏ nhất của một số phức là bội 2 và mọi nghiệm của P đều là nghiệm bội nên $n_0(P) \leq \frac{1}{2}.deg(P)$.
Tương tự mọi nghiệm của $P + 1$ đều là nghiệm bội nên ta cũng có
$n_0(P + 1) \leq \frac{1}{2}.deg(P + 1)$.
Từ đó, ta suy ra $n_0(P) + n_0(P + 1) \leq \frac{1}{2}.[deg(P) + deg(p + 1)]$.
Hay ta có

$$deg(P) + deg(P + 1) \geq 2[n_0(P) + n_0(P + 1)]. \qquad 1.23$$

Ta có sự phân tích $(P+1) - P = 1$, và $(P, P+1) = 1$, vì nếu ngược lại thì tồn tại đa thức h là ước chung lớn nhất của P và P+1, gọi a là một nghiệm phức của đa thức h, khi đó a cũng là nghiệm của P và P +1. Khi đó
$P(a) = 0, P(a) + 1 = 0$, điều này suy ra được $1 = 0$ (vô lý).

Như vậy, $(P, P + 1) = 1$ áp dụng định lý Mason cho đa thức P, 1 và $P + 1$ ta có

$$\max\{deg(P), deg(P + 1)\} \leq n_0(P.(P + 1)) - 1.$$

Từ đó suy ra

$$deg(P) \leq n_0(P) + n_0(P + 1) - 1,$$

$$deg(P+1) \leq n_0(P) + n_0(P+1) - 1.$$

Cộng vế theo vế ta được

$$deg(P) + deg(P+1) \leq 2[n_0(P) + n_0(P+1)] - 2. \qquad 1.24$$

Kết hợp (1.23) và (1.24), ta được

$$2[n_0(P) + n_0(P+1)] \leq deg(P) + deg(P+1) \leq 2[n_0(P) + n_0(P+1)] - 2.$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq -2(\text{vô lý}).$$

Vậy không thể tìm được đa thức P thỏa yêu cầu bài toán.

Vào năm 1956 William Lowell đã đưa ra bài toán về đa thức sau và bài toán được trình bày theo định lý Masson như sau.

**Bài toán 1.14:**

Cho hai đa thức một biến với hệ số phức P và Q có chung tập hợp nghiệm nhưng có thể khác về số bội của nghiệm, và hai đa thức P +1 và Q +1 cũng có tập hợp nghiệm nhưng có thể khác về số bội của nghiệm. Chứng minh rằng hai đa thức P và Q trùng nhau.

Thật vậy, giả sử $\alpha_1, \alpha_2, .....\alpha_n$ là n nghiệm phân biệt của P và hiển nhiên đây cũng là các nghiệm của Q.

$\beta_1, \beta_2, .....\beta_m$ là m nghiệm phân biệt của P + 1 và hiển nhiên đây cũng là các nghiệm của Q +1.

Vai trò về bậc của các đa thức P và Q như nhau nên ta có thể giả sử rằng $deg(P) \geq deg(Q)$.

Ta có sự phân tích $(P+1) - P = 1$ và $(P, P+1) = 1$.

Theo định lý Masson cho đa thức P, 1 và P +1 ta có

$$\max\{deg(P), deg(P+1)\} \leq n_0(P.(P+1)) - 1.$$

Từ đó, ta suy ra

$$deg(P) \leq n_0(P) + n_0(P+1) - 1.$$

$$\Leftrightarrow m + n \geq deg(P) + 1 \geq deg(P-Q) + 1. \qquad 1.25$$

Mặt khác, $(P+1)-(Q+1)=P-Q$ nên mỗi nghiệm của P hoặc $P+1$ đều là nghiệm của $P-Q$. Do đó $m+n \leq deg(P)$.

Ta thấy rằng, một đa thức nếu có số nghiệm phân biệt lớn hơn bậc của đa thức thì đa thức đó bằng 0.

Vì vậy, theo ( 1.25) ta suy ra $P-Q$ chỉ có thể là đa thức 0. Tức là, hai đa thức P và Q trùng nhau.

# Chương 2
# Sự tương tự số học của định lý Mason và ứng dụng giả thuyết abc trong nghiên cứu số học

Từ thủa xưa, các nhà toán học đã biết chuyển các kết quả số học sang giải quyết trên đa thức và từ các bài toán và giả thuyết cho đa thức, người ta phát biểu tương tự cho số học. Trong những năm gần đây, sự phát triển của số học chịu ảnh hưởng nhiều từ sự tương tự giữa số nguyên và đa thức. Tức là, khi chứng minh một kết quả nào đó cho số học, người ta thử phát biểu và chứng minh xem kết quả này có đúng cho đa thức hay không. Việc giải quyết các bài toán trên đa thức đơn giản hơn do đa thức có phép tính đạo hàm. Điều này hoàn toàn hợp lý, bởi tập hợp số nguyên và tập hợp các đa thức có sự tương tự rất lớn. Cả hai tập hợp đều có các quy tắc cộng, trừ, nhân, chia như nhau. Đối với số nguyên ta có số nguyên tố đối với đa thức ta có đa thức bất khả quy. Hai số nguyên bất kỳ hoặc hai đa thức bất kỳ ta có thể định nghĩa ước chung lớn nhất và tìm được bằng thuật toán Euclid. Mỗi số nguyên đều phân tích thành tích các thừa số nguyên tố, mỗi đa thức có phân tích thành tích các đa thức bất khả quy. Các số hữu tỷ tương ứng với các hàm hữu tỷ, ta biết $deg(P.Q) = deg(P) + deg(Q)$ và $\log(a.b) = \log(a) + \log(b)$, do đó bậc của đa thức tích tương tự như logarit của hai số nguyên dương.

Bây giờ, chúng ta quan tâm đến sự tương tự trong phân tích ra thừa số nguyên tố cho số nguyên và phân tích bất khả quy cho đa thức. Tức là từ khái niệm số các nghiệm phân biệt của đa thức P kí hiệu là $n_0(P)$ và $n_0(P.Q) \le n_0(P) + n_0(Q)$, ta được khái niệm tương tự cho số nguyên a là $rad(ab)$ và $rad(ab) \le rad(a).rad(b)$. Vì vậy, định lý Mason cho đa thức được

phát biểu tương tự cho số nguyên là giả thuyết abc. Giả thuyết này được phát biểu vào năm 1985 bởi J.Oesterle' trong một kết quả về đường cong Elliptic của bộ môn hình học đại số, ngay sau đó D.R.Masser phát biểu dựa vào sự tương tự của số nguyên và đa thức.

## 2.1. Giả thuyết abc

### 2.1.1 Giả thuyết abc

*Giả sử a, b, c là các số nguyên nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn hệ thức* $a+b=c$. *Khi đó với* $\forall\epsilon>0$ *tồn tại hằng số* $C(\epsilon)$ *sao cho:*

$$\max\{|\ a\ |, |\ b\ |, |\ c\ |\} \leq C(\epsilon) r(abc)^{1+\epsilon}.$$

Ta thấy nếu bộ ba $(a, b, c)$ các số nguyên dương thỏa mãn: $a+b=c$ và $(a,b)=1$, thì tích $abc$ được lập nên từ các số nguyên tố khác nhau, với phần lớn các số mũ tương đối bé. Ta đặt

$$C(\epsilon) = \inf_{(a,b,c)\in I} \frac{c}{(r(abc))^{1+\epsilon}}, \tag{2.1}$$

với $i = \{(a,b,c) \in N^3 \quad : (a,b)=1; \quad a+b=c\}$.

Mệnh đề sau đây chỉ ra rằng không thể chọn $\epsilon = 0$

**2.1.2 Mệnh đề:**

*Với* $\epsilon>0$, *giả sử* $C(\epsilon)$ *là hằng số xác định trong ( *) thỏa mãn bất đẳng thức của giả thiết abc khi đó:*

$$\lim_{\epsilon\to 0} C(\epsilon) = +\infty. \tag{$*$}$$

**Chứng minh:**

Ta định nghĩa $x_n$ và $y_n$ bởi quan hệ sau:

$x_n + y_n\sqrt{2} = (3+2.\sqrt{2})^n$.

Khi $n \geq 1; 1+2.y_n^2 = x_n^2$ nếu $n = 2^m$ (dễ dàng thử lại bằng truy hồi)

Áp dụng giả thuyết abc cho quan hệ: $x_n^2 = 1+2.y_n^2$ đối với $n=2^m$ ta nhận được:

$$x_n^2 \leq C(\epsilon).(r(x_n, y_n))^{1+\epsilon},$$

$$\leq C(\epsilon).(r(x_n y_n)/2^m)^{1+\epsilon},$$
$$\leq C(\epsilon) x_n^{2(1+\epsilon)}/2^{m(1+\epsilon)}.$$

Khi đó $C(\epsilon) \geq 2^{m(1+\epsilon)}/x_n^{2\epsilon}$ và

$$\lim_{\epsilon \to 0} C(\epsilon) \geq 2^m.$$

Điều này chỉ ra rằng:

$$\lim_{\epsilon \to 0} C(\epsilon) = +\infty. \qquad \text{đpcm}$$

Từ sau khi phát biểu năm 1985 có rất ít kết quả về giả thuyết abc. Ở đây chúng tôi phát biểu 2 định lý cho ước lượng của hằng số $C(\epsilon)$ (có thể tìm thấy chứng minh ở mục [3].)

**2.1.3 Định lý:**

*Tồn tại hằng số tính được $k > 0$ sao cho với mọi bộ ba $(a, b, c)$ và các số nguyên dương thỏa mãn $a + b = c$ và $(a, b) = 1$ ta có:*

$$c < \exp\{k(r(abc))^{15}\}.$$

**2.1.4 Định lý:**

*Tồn tại hằng số tính được $k > 0$ sao cho với mọi bộ ba số $(a, b, c)$ và các số nguyên dương thỏa mãn $a + b = c$ và $(a, b) = 1$ ta có:*

$$c < \exp\{k(r(abc))^{2/3+k/\log.\log r(abc)}\}.$$

Nhận xét rằng các bất đẳng thức của hai định lý trên là hàm mũ của $rad(abc)$ trong khi bất đẳng thức của giả thuyết abc là đa thức

## 2.2. Một số hệ quả của giả thuyết abc

### 2.2.1 Định lý cuối cùng của Fermat.

*Phương trình $x^n + y^n = z^n$ không có nghiệm nguyên khác 0, với mọi số nguyên dương $n \geq 3$.*

Dựa vào giả thuyết abc ta sẽ chứng minh được tồn tại một số nguyên dương $n_0$ sao cho phương trình Fermat vô nghiệm với mọi $n \geq n_0$.

Thật vậy, ta xét trường hợp $gcd(x, y, z) = 1$ và giả sử các số x, y, z đều dương, nếu ngược lại thì ta lấy các giá trị tuyệt đối, sao cho $x^n + y^n = z^n$.

Theo giả thuyết abc ta có:

$$\max\{x^n, y^n, z^n\} \leq C_\epsilon.[rad(x^n y^n z^n)]^{1+\epsilon}. \qquad 2.2$$

Chọn $\epsilon = 1, k = \max\{1, C_1\}$, ta được

$$\max\{x^n, y^n, z^n\} \leq k.[rad(x^n y^n z^n)]^2. \qquad 2.3$$

Do các số x,y, z đều dương nên $rad(x^n y^n z^n) = rad(x.y.z) \leq x.y.z < z^3$.

Do đó $z^n < k.z^6$, hay $z^{n-6} < k$, do $gcd(x, y, z) = 1$ nên $z \geq 3$. Ta suy ra $3^{n-6} \leq k$. Lấy logarit cơ số 3 hai vế ta được $n < log_3 k + 6 = n_0$.

Trường hợp $gcd(x, y, z) = d \neq 1$ thì bằng cách loại bỏ thừa số chung ta được phương trình $x'^n + y'^n = z'^n$ vô nghiệm
khi $n \geq 3$, với $gcd(x', y', z') = 1$.

Như vậy định lý cuối cùng của Fermat chỉ có thể không đúng với $n < n_0$, tức là bài toán bị chặn và nếu xác định được $C_\epsilon = C_1$ thì bài toán được giải quyết xong. Chẳng hạn, chọn $C_\epsilon = \epsilon = 1$ thì định lý cuối cùng của Fermat đúng khi $n \geq 6$. Các trường hợp $n < 6$ đã được chứng minh vào trước đó.
Vào năm 1825 Ơle đã chứng minh với $n = 3$, từ phương trình $x^4 + y^4 = z^2$ không có nghiệm nguyên dương ta suy ra định lý cuối cùng của Fermat đúng với $n = 4$ ( xem [14]), Diricle với $n = 5$.

Giả thuyết abc có thể áp dụng nghiên cứu các phương trình điôphăng với ba ẩn số, trong đó có phương trình Fermat mở rộng.

**2.2.2. Định lý (Giả thuyết Fermat mở rộng):**

*Nếu giả thuyết abc là đúng , thì với mọi A, B, C phương trình:*

$$Ax^l + B.y^m = C.z^n$$

*chỉ có hữu hạn nghiệm nguyên dương x, y, z, l, m, n thỏa mãn:*

$$l^{-1} + m^{-1} + n^{-1} < 1,$$

*và* $(x, y, z) = 1$.

**Chứng minh:**

Nếu $z = 1$ thì định lý đúng ngay cả khi không có giả thuyết *abc*.

Nếu $z \geq 2$ và $(x, y, z) = 1$, gọi $d = (A.x^l, B.y^m, C.z^n)$.

Khi đó d gới nội. Áp dụng giả thuyết abc cho: $(A.x^l/d; B.y^m/d, C.z^n/d)$, ta nhận được:

$$C.z^n/d \leq C_1(\epsilon)(r(ABCx^l y^m z^n/d^3))^{1+\epsilon}.$$

Từ đó:

$$z^n \leq C_2(\epsilon, C)((dr(ABCx^l y^m z^n/d^3))^{1+\epsilon},$$

$$C_3(\epsilon, A, B, C)(xyz)^{1+\epsilon}.$$

Vì $A.x^l < C.z^n$ và $B.y^m < Cz^n$

nên $x < C_4(A, C).z^{n/l}$ và $y < C_5(B, C).z^{n/m}$.

Hơn nữa: $z^n \leq C_6(\epsilon, A, B, C)(z^n)^{(l^{-1}+m^{-1}+n^{-1})(1+\epsilon)}$,

Và do đó: $(z^n)^{1-(1+\epsilon)(l^{-1}+m^{-1}+n^{-1})} \leq C_6(\epsilon, A, B, C)$.

Nếu $l^{-1} + m^{-1} + n^{-1} < 1$ và nếu $\epsilon$ đủ nhỏ thì:

$1 - (1 - \epsilon)(l^{-1} + m^{-1} + n^{-1}) > 0$ thì $z^n$ gới nội .

Cũng như thế với $x, y, z, l, m, n$, suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét:

Nếu $A = B = C = 1$, thì chỉ có 10 nghiệm đã biết thỏa mãn:

$l^{-1} + m^{-1} + n^{-1} < 1$;

$1 + 2^3 = 3^2$, $\quad 13^2 + 7^3 = 2^9$

$17^3 + 2^7 = 71^2$, $\quad 2^5 + 7^2 = 3^4$,

$3^5 + 11^4 = 2^2.61^2 \quad 17^7 + 76271^3 = 21063928^2$

$1414^3 + 2213459^2 = 65^7$,

$9262^3 + 15312283^2 = 113^7$,

$43^8 + 96222^3 = 30042907^2$,

$33^8 + 1549034^2 = 15613^3$.

Tương tự như định lý Davenport cho đa thức ta có giả thuyết Hall cho số nguyên phát biểu vào năm 1965. Đây chính là lời giải của bài toán đã được phát biểu vào năm 1921: Tìm các số x,y nguyên dương sao cho $x^3 - y^2 = k$,

với k là số nguyên cho trước.

**2.2.3 Giả thuyết Hall:** *Giả sử x, y là các số nguyên dương sao cho* $x^3 - y^2 \neq 0$. *khi đó, với mọi* $\epsilon > 0$, *tồn tại số* $C_\epsilon$ *sao cho*

$$| x^3 - y^2 | > C_\epsilon x^{\frac{1}{2}-\epsilon}.$$

Thật vậy, trước hết ta có sự phân tích $x^3 = (x^3 - y^2) + y^2$. Để tiện lợi trong kí hiệu ta có thể giả sử $x^3 - y^2 > 0$. Theo giả thuyết abc ta có:

$$\max\{| x^3 |, | x^3 - y^2 |, | y^2\} \leq C_\epsilon.[rad(x^3(x^3 - y^2)y^2]^{1+\epsilon}.$$

Vì ta có công thức đánh giá sau:

$$rad(xyz) \leq rad(x).rad(y).rad(z)$$

và $rad(x^n) = rad(x) \leq x$.

Do đó,

$$x^3 \leq C_\epsilon.[rad(x^3(x^3 - y^2)y^2]^{1+\epsilon}.$$

Suy ra

$$x^3 \leq C_\epsilon[rad(x^3)]^{1+\epsilon}[rad(x^3 - y^2)]^{1+\epsilon}[rad(y^2)]^{1+\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow x^3 \leq C_\epsilon x^{1+\epsilon}(x^3 - y^2)^{1+\epsilon} y^{1+\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow x^{2-\epsilon} \leq C_\epsilon (x^3 - y^2)^{1+\epsilon} y^{1+\epsilon}. \qquad 2.4$$

Tương tự

$$y^2 \leq C_\epsilon x^{1+\epsilon}(x^3 - y^2)^{1+\epsilon} y^{1+\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow y \leq C_\epsilon x^{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} (x^3 - y^2)^{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}. \qquad 2.5$$

Thay (2.5) vào (2.4) ta được

$$x^{2-\epsilon} \leq C_\epsilon (x^3 - y^2)^{\frac{(1+\epsilon)^2}{1-\epsilon}+(1+\epsilon)} x^{\frac{(1+\epsilon)^2}{1-\epsilon}}$$

$$\Leftrightarrow x^{\frac{1-5\epsilon}{1-\epsilon}} \leq C_\epsilon (x^3 - y^2)^{\frac{2+2\epsilon}{1-5\epsilon}}$$

$$\Leftrightarrow x \le C_\epsilon(x^3-y^2)^{\frac{2+2\epsilon}{1-5\epsilon}} = C_\epsilon(x^3-y^2)^{2+\frac{12\epsilon}{1-5\epsilon}}$$

Như vậy,

$$x^{\frac{1}{2}-\frac{12\epsilon}{1-5\epsilon}} \le C_\epsilon(x^3-y^2)^{(2+\frac{12\epsilon}{1-5\epsilon})(\frac{1}{2}-\frac{12\epsilon}{1-5\epsilon})}$$

Đặt $\epsilon_1 = \dfrac{12\epsilon}{1-5\epsilon}$. Khi đó, ta được

$$x^{\frac{1}{2}-\epsilon_1} \le C_\epsilon(x^3-y^2)^{(2+\epsilon_1)(\frac{1}{2}-\epsilon_1)} = C_\epsilon(x^3-y^2)^{1-\frac{3}{2}\epsilon_1-\epsilon_1^2}.$$

Tức là,

$$x^{\frac{1}{2}-\epsilon_1} \le C_\epsilon(x^3-y^2)$$
$$\Leftrightarrow | x^3-y^2 | > C_{\epsilon_1}.x^{\frac{1}{2}-\epsilon_1}.$$

Ta có thể biến đổi kêt quả của giả thuyết Hall như sau:

$$| x^3-y^2 | > C_\epsilon.x^{\frac{1}{2}-\epsilon}.$$
$$\Leftrightarrow | x^3-y^2 |^{\frac{2}{1-2\epsilon}} > C_\epsilon.x$$
$$\Leftrightarrow | x^3-y^2 |^{\frac{6}{1-2\epsilon}} > C_\epsilon.x^3$$
$$\Leftrightarrow | x^3-y^2 |^{6+\frac{12}{1-2\epsilon}} > C_\epsilon.x^3$$
$$\Leftrightarrow | x^3-y^2 |^{6+\epsilon_1} > C_{\epsilon_1}.x^3.$$

Bằng cách chứng minh tương tự như trên, ta có thể mở rộng giả thuyết Hall cho các số lũy thừa nguyên m và n bất kỳ.

**Giả thuyết Hall tổng quát:** *Cho m và n là các số nguyên lớn hơn 1. Giả sử x, y là các số nguyên sao cho $a.x^m - b.y^n \neq 0$. Khi đó, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số $C_\epsilon$ sao cho*

$$| x^m | < C_\epsilon | x^m - y^n |^{\frac{n.m(1+\epsilon)}{mn-n-m}}. \qquad 2.6$$

**Chứng minh** [ xem [1.2.5 ] , trang 11, chương 1 ]

**2.2.4 Hệ quả về bộ ba số nguyên:**

**2.2.4.1 Mệnh đề:** *Nếu giả thuyết abc là đúng thì* $\forall\epsilon > 0$, *tồn tại hằng số* $C(\epsilon) > 0$, *sao cho với mọi bộ ba các số nguyên dương* $(x_1, x_2, x_3)$ *thỏa mãn* $x_1 + x_2 = x_3$ *và* $(x_1, x_2) = 1$ *một trong các* $x_i$ *với* $i \in \{1, 2, 3\}$ *thỏa mãn:*

$$x_i \leq C(\epsilon)/(r(x_i))^{3+\epsilon}.$$

Ta cũng có kết quả sau:

**2.2.4.2 Định lý:** *Nếu giả thuyết abc là đúng với* $\forall\epsilon > 0$ *và với* $\forall a \geq 1$ *tồn tại hằng số* $C_1(\epsilon, a) > 0$, *sao cho với mọi số nguyên* $n \geq 2$ *và với mọi số nguyên* $x \geq 2$ *thỏa mãn* $(a, x) = 1$ *ta có:*

$$x^{n-1} \leq C_1(\epsilon, a)(r(x^n - a^n))^{1+\epsilon}.$$

**Chứng minh:** Giả sử $\epsilon$ cố định sao sho $0 < \epsilon < 1/2$.
Áp dụng giả thuyết abc cho quan hệ:
$(x^n - a^n) + a^n = x^n$, với $(a, x) = 1$, ta được:

$$x^n \leq C(\epsilon, a)(r(x^n - a^n))^{1+\epsilon}x^{1+\epsilon},$$

Khi đó:

$$x^{n-1} \leq C(\epsilon, a)^{(n-1)/(n-1-\epsilon)}(r(x^n - a^n))^{(n-1)(1+\epsilon)/(n-1-\epsilon)}.$$

Nếu $\epsilon$ đủ bé với $n \geq 2$, một mặt ta có:
$(n-1)/(n-1-\epsilon) < 2$, và mặt khác:

$$\frac{(n-1)(1+\epsilon)}{n-1-\epsilon} \leq \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} = 1 + \epsilon^{'}.$$

Với $\epsilon^{'} = 2\epsilon/(1-\epsilon)$. Như vậy ta nhận được kết quả của định lý.

**2.2.5 Một số hệ quả khác của giả thuyết abc**

Ta đưa ra một số hệ quả khác của giả thuyết abc liên quan đến phương trình Điophăng.

**2.2.5.1 Mệnh đề:**

*Giả sử* $A > 0; B > 0$ *và* $k$ *nguyên. Giả thuyết abc suy ra rằng: phương trình*

$$A.x^m - B.y^n = k$$

*chỉ có hữu hạn nghiệm nguyên, với* $x > 1, y > 1; m > 1; m.n > 4$.

Mệnh đề này là giả thuyết của Pillai.

Nếu $A = 1; B = 1; k = 1$ thì đây là giả thuyết của Catalan, hơn nữa, năm 1976 Tijdeman khẳng định rằng phương trình Catalan có hữu hạn nghiệm .

**2.2.5.2 Mệnh đề:**

*Giả thuyết abc suy ra rằng phương trình :*

$$(\frac{x}{v})^m - (\frac{y}{w})^n = 1$$

*chỉ có nghiệm nguyên dương với mọi* $v, w, x, y, m, n > 1$ *thỏa mãn* $(x, v) = 1; (y, w) = 1$ *và* $m.n > 4$.

**2.2.5.3 Mệnh đề:**

*Giả thuyết abc suy ra rằng phương trình:*

$$(x!)^n + 1 = y^m$$

*chỉ có hữu hạn nghiệm nguyên nếu* $x > 0; y > 0, n \geq 1, m \geq 2$.

Mệnh đề này liên quan đến bài toán của Brocad mà chứng minh của nó dựa trên bất đẳng thức sau đây của Stirling và Chebyshew với $x \geq 2$.

**2.2.5.4 Mệnh đề:**

*Giả thuyết abc suy ra rằng phương trình:*

$$n! + 1 = P_k^a.P_{k+1}b$$

*chỉ có hữu hạn nghiệm nguyên trong đó:*

$n \geq 1; a \geq 0; b \geq 0$ *và* $P_{k-1} \leq n \leq P_k$ *với mọi* $P_i$ *với* $i \geq 1$ *là dãy số nguyên tố.*

Mệnh đề này liên quan đến giả thuyết của Erdos - Stewart.

**2.2.5.5 Mệnh đề:**

*Giả thuyết abc suy ra rằng phương trình:*

$$x^n + y^n = n!z^n$$

*chỉ có hữu hạn nghiệm nguyên* $x > 0; y > 0; z > 0$ *và* $n \geq 4$.

Giả thuyết này liên quan đến bài toán mở về phương trình Diôphăng.

**2.2.5.6 Mệnh đề:**

*Giả thuyết abc suy ra rằng với mọi số nguyên $a \geq 1$ phương trình:*

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = az^m$$

*chỉ có hữu hạn nghiệm nguyên, trong đó $x > 0, y > 0; z > 0; n > 0; m > 1$, với $(x, y) = (1, 3)$,* $\quad n^{-1} + m^{-1} < 1$.

Mệnh đề này cho câu trả lời bài toán của H.Edgar và Shorey- Tijdeman.

**2.2.5.7 Mệnh đề:**

*Giả thuyết abc suy ra rằng phương trình:*

$$\frac{x^m - 1}{x - 1} = \frac{y^n - 1}{y - 1},$$

*chỉ có hữu hạn nghiệm nguyên $x > y > 1$, và $m > n > 3$*

Việc tìm nghiệm này là bài toán của Goosmaghtigh
với $n = 3 (x, y, m, n) = (2, 5, 5, 3)$ là được biết nghiệm duy nhất.

**2.2.5.8 Mệnh đề:**

*Giả thuyết abc suy ra rằng, với mọi $d \geq 1$ thì phương trình:*

$$x(x + d)....(x + kd) = y^n,$$

*chỉ có hữu hạn nghiệm nguyên dương $x > 0; y > 0; k \geq 2; n \geq 2$.*

Mệnh đề này chỉ ra mối quan hệ giữa giả thuyết abc với cấp số cộng. Năm 1975 Erdos và J.L.Selfrilge đã chứng minh phương trình trên không có nghiệm với
d = 1.

## 2.3. Ứng dụng giả thuyết abc đề xuất các bài tập số học

Ở phần (1.3) từ định lý Mason ta có một số bài toán về đa thức, ở phần này từ giả thuyết abc ta cũng có một số bài toán tương tự cho các số nguyên. Sau đây là giả thuyết Tijdeman-Zagier.

**Bài toán 2.1:( Giả thuyết Tijdeman-Zagier)**

Nếu p, q, r là các số nguyên lớn hơn hoặc bằng 3 thì phương trình $x^p + y^q = z^r$ không có nghiệm nguyên $x, y, z$ khác 0, nguyên tố cùng nhau.

Thật vậy, giả sử tồn tại các số nguyên $x, y, z$ khác 0, nguyên tố cùng nhau thỏa mãn phương trình $x^p + y^q = z^r$. Theo giả thuyết abc ta được

$$\max\{x^p, y^q, z^r\} \leq C_\epsilon.[rad(x^p y^q z^r)]^{1+\epsilon}.$$

Ta chứng minh bài toán này trong trường hợp số mũ đủ lớn. Tức là,

$$\min(p, q, r) > k, \tag{2.7}$$

trong đó $k = \dfrac{\log C_\epsilon}{\log 2} + (3 + 3\epsilon)$.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $\max\{x, y, z\} = x$. Khi đó,

$$x^p \leq C_\epsilon[rad(x^p y^q z^r)]^{1+\epsilon},$$

$$\Leftrightarrow x^p \leq C_\epsilon.(xyz)^{1+\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow x^p \leq C_\epsilon.x^{3+3\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow x^{p-3-3.\epsilon} \leq C_\epsilon$$

$$\Leftrightarrow p \leq \frac{\log C_\epsilon}{\log 2} + (3 + 3.\epsilon) = k.$$

Điều này mâu thuẫn với (2.7).

Vậy phương trình $x^p + y^q = z^r$ không có nghiệm tầm thường, nguyên tố cùng nhau khi p, q, r là các số nguyên lớn hơn hoặc bằng 3.

Hay nói cách khác, nếu p, q, r là các số nguyên lớn hơn 2 và thỏa mãn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq 1$ thì phương trình $x^p + y^q = z^r$ chỉ có nghiệm tầm thường trong Z hoặc các nghiệm có ước chung khác 1.

Vấn đề dặt ra là khi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ và p, q, r là các số nguyên bất kỳ, bỏ đi giả thiết lớn hơn hoặc bằng 3, thì phương trình $x^p + y^q = z^r$, với $gcd(x, y, z) = 1$, có nghiệm (x,y,z) không tầm thường trong Z hay không? Đây chính là giả thuyết Fermat- Catalan.

**Bài toán 2.2:(Giả thuyết Fermat-Catalan)**

Nếu p, q, r là các số nguyên dương thỏa mãn hệ thức $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ thì

tồn tại hữu hạn các số nguyên tố cùng nhau x, y, z là nghiệm của phương trình $x^p + y^q = z^r$.

Thật vậy, giả sử tồn tại các số nguyên x, y, z khác 0 nguyên tố cùng nhau thỏa mãn phương trình $x^p + y^q = z^r$. Ta có thể giả sử $p \leq q \leq r$, nếu ngược lại thì ta đổi vị trí các số hoặc chuyển vế cho phương trình.

Khi đó, (p, q, r) có một trong các cặp sau:
(2, 3, r) với $r \geq 7$, hoặc (2, 4, r) với $r \geq 5$, hoặc (2, q, r) với $r \geq q \geq 5$, hoặc (3, 3, r) với $r \geq 4$, hoặc (3, q, r) với $r \geq q \geq 4$, hoặc (p, q, r) với $r \geq q \geq p \geq 4$.

Trong các trường hợp trên thì

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{41}{42},$$

và

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{41}{42}$$

khi $(p, q, r) = (2, 3, 7)$.

Theo giả thuyết abc ta được

$$\max\{x^p, y^q, z^r\} \leq C_\epsilon.rad(x^p y^q z^r)^{1+\epsilon}. \qquad 2.8$$

Chọn $\epsilon = \dfrac{1}{42}$ và đặt $\max\{| x^p |, | y^q |, | z^r |\} = M$.

Khi đó, theo (2.8) ta có

$$M \leq C.[rad(x^p).rad(y^q).rad(z^r)]^{1+\frac{1}{42}},$$

với $C = C_{\frac{1}{42}}$.

Do đó

$$M \leq C.(| x || y || z |)^{\frac{43}{42}}$$

$$\Leftrightarrow M \leq C.(M^{\frac{1}{p}} M^{\frac{1}{q}} M^{\frac{1}{r}})^{\frac{43}{42}}$$

$$\Leftrightarrow M \leq C.M^{(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}).\frac{43}{42}}$$

$$\Leftrightarrow M^{\frac{1}{1764}} \leq C.$$

Điều này chứng tỏ M bị chặn, tức là x, y, z bị chặn. Vì vậy có hữu hạn các số x, y, z nguyên tố cùng nhau thỏa phương trình $x^p + y^q = z^r$ khi p, q, r là các số nguyên dương thỏa mãn hệ thức $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$.

Bây giờ, ta xét một trường hợp riêng của bài toán (2.2). Đây chính là phương trình Catalan cho số nguyên.

**Bài toán 2.3**

Phương trình $x^p - y^q = 1$ với $p, q \geq 2$ chỉ só nghiệm nguyên dương duy nhất $(x, y) = (3, 2)$.

Thật vậy, theo bài toán (2.2), với $p = 2, q = 3, r \geq 7$ thì bài toán có nghiệm $(x, y) = (3, 2)$. Nếu $p, q \geq 3$, áp dụng kết quả (2.1) thì phương trình vô nghiệm.

Như vậy, theo bài toán (2.1) thì phương trình $x^p + y^q = z^r$ vô nghiệm khi $p, q, r$ là các số nguyên dương lớn hơn hoặc bằng 3, khi đó ta có $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq 1$.
Theo bài toán (2.2) thì phương trình $x^p + y^q = z^r$ có hữu hạn nghiệm $(x, y, z)$, nguyên tố cùng nhau khi $p, q, r$ là các số nguyên dương thỏa mãn hệ thức $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$.
Từ hai kết quả này ta suy ra phương trình $x^p + y^q = z^r$ chỉ có nghiệm khi chỉ có duy nhất một trong ba số $p, q, r$ bằng 2 và thỏa $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$.

Chẳng hạn ta có các nghiệm của phương trình như sau:
$1 + 2^3 = 3^2; 2^5 + 7^2 = 3^4; 7^3 + 13^2 = 2^9; 2^7 + 17^3 = 71^2; 3^5 + 11^4 = 122^2$
$17^7 + 76271^3 = 21063928^2; 33^8 + 1549034^2 = 15613^3$.....
Trường hợp $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$ thì việc tồn tại nghiệm của phương trình $x^p + y^q = z^r$ được xét gần giống như bài tập [1.3 ] cho đa thức. Cụ thể như sau:

**Bài toán 2.4:**

Cho $p, q, r$ là các số nguyên dương thỏa $2 \leq p \leq q \leq r$ và giả sử x, y, z là các số nguyên, nguyên tố cùng nhau từng cặp, khi đó:

a) Nếu $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}>1$, tức là $(p,q,r)=(2,2,r)$ với $r\geq 2$ hoặc $(p,q,r)=(2,3,r)$ với $3\leq r\leq 5$ thì phương trình $x^p+y^q=z^r$ vô nghiệm.

b) Nếu $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}=1$ thì phương trình $x^p+y^q=z^r$ không có nghiệm khi $(p,q,r)=(3,3,3)$ và $(p,q,r)=(2,4,4)$ nhưng có nghiệm khi
$(p,q,r)=(2,3,6)$,
chẳng hạn phương trình $x^2+y^3=z^6$ có nghiệm là $(3,-2,1)$.

Các kết quả này được chứng minh bởi lý thuyết hàm Modular, không thể áp dụng được giả thuyết abc.

Tương tự như bài toán tồn tại đa thức, ta phát biểu bài toán tìm số nguyên thỏa điều kiện cho trước.

Theo bài toán (1.6 ): Cho a là số phức khác 0. khi đó, nếu tồn tại các đa thức một biến với hệ số phức $f(t),g(t)$ thỏa phương trình $f^2(t)=g^3(t)+a$ thì $f$ và $g$ là các đa thức hằng.

Ta thay đa thức trong bài toán này bởi các số nguyên thì bài toán sẽ có nghiệm.

**Bài toán 2.5**

Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^3-y^2=4$.
Chúng ta có thể giải bài toán trên dựa vào số nguyên Gauss. Tuy nhiên phương pháp này khá phức tạp. Chúng ta có cách giải ngắn gọn hơn nhiều dựa vào giả thuyết Hall. Theo giả thuyết Hall ta có

$$\mid x^3-y^2\mid^{6+\epsilon}>C_\epsilon x^3$$

$$\mid x^3-y^2\mid^{6+\epsilon}>C_\epsilon y^2.$$

Như vậy x và y đều bị chặn bởi những số nhỏ. Mặt khác, từ phương trình $x^3-y^2=4$ ta suy ra được $x\leq y$ nên ta dễ dàng thay các giá trị của x và y vào phương trình. Phương trình có nghiệm duy nhất $(x,y)=(2,2)$.

Tương tự như bài toán trên, áp dụng giả thuyết Hall cho các số mũ m, n lớn hơn 1 với công thức

$$\mid x^m\mid<C_\epsilon\mid x^m-y^n\mid^{\overline{\frac{n.m(1+\epsilon)}{mn-n-m}}}, \qquad 2.9$$

ta suy ra được định lý Lebesgue: Giả sử p là số nguyên tố. Khi đó phương trình $x^p - y^2 = 1$ không có nghiệm nguyên thỏa $x.y \neq 0$.

Đồng thời áp dụng công thức (2.9) ta tìm được $(x, y) = (0, 1)$ là nghiệm duy nhất của phương trình $x^3 + 1 = y^4$. Bài toán này chỉ là một trường hợp của bài toán tổng quát sau.

**Bài toán 2.6 ( Trích đề thi vô địch quốc gia ấn Độ 1998).**

Tìm các số $(x, y, n)$ nguyên dương sao cho $(x, n+1) = 1$ và thỏa mãn hệ thức $x^n + 1 = y^{n+1}$.

Bài toán này được giải quyết đơn giản khi ta áp dụng giả thuyết Hall. Ta xét các trường hợp sau.

Nếu $n = 1$, ta được phương trình $x + 1 = y^2$ có vô số nghiệm đều thỏa mãn điều kiện $(x, 2) = 1$. Ta suy ra x là số lẻ y là số chẵn. Chẳng hạn $(x, y) = (3, 2), (15, 4), (35, 6), ...$ là các nghiệm của phương trình.

Nếu $n > 1$, theo giả thuyết Hall ta có: với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số $C_\epsilon$ sao cho

$$| x^m |< C_\epsilon | x^m - y^n |^{\overline{\frac{n.m(1+\epsilon)}{mn-n-m}}}.$$

Thay $m = n; n + 1 = m$ và $| x^m - y^n |= 1$, ta được

$$| x^n |< C_\epsilon.1.$$

Do đó $x = 0$ và $y = 1$ thỏa hệ thức $x^n + 1 = y^{n+1}$. Mặt khác, theo giả thiết $(x, n+1) = 1$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Vậy bài toán chỉ có nghiệm khi $n = 1$, x lẻ và y chẵn.

**Bài toán 2.7 (Trích đề thi vô địch Nga 1997)**

Tìm các số nguyên tố p và q thỏa mãn hệ thức sau:

$$(p + q)^3 + q^4 = p^5. \qquad 2.10$$

Ta có thể giải bài toán trên mà không cần áp dụng giả thuyết abc như sau:

Xét trường hợp $p = q$, ta được phương trình $p^3(p^2 - p - 8) = 0$ (loại )

Xét trường hợp $p \neq q$, khi ấy ta có:

$$(p + q)^3 + q^4 = p^5,$$

$$\Leftrightarrow q^4 + q^3 + 3pq(p+q) = p^5 - p^3,$$

$$\Leftrightarrow q[q^2(q+1) + 3p(q+1) + 3p(q-1)] = p^3(p^2-1).$$

Kết hợp với p và q là các số nguyên tố nên ta suy ra

$$\begin{cases} p \mid (q+1) \\ q \mid (p^2-1) \end{cases}$$

Xét khả năng thứ nhất

$$\begin{cases} p \mid (q+1) \\ q \mid (p-1) \end{cases}$$

Ta suy ra

$$\begin{cases} p \leq (q+1) \\ q \leq (p-1) \end{cases},$$

tức là $(p-1) \leq q \leq p-1)$. Ta được $p-1=q$ mà p và q là các số nguyên tố nên ta suy ra $p=3, q=2$, thay vào phương trình (4.6) không thỏa mãn .

Xét khả năng thứ hai

$$\begin{cases} p \mid (q+1) \\ q \mid (p+1) \end{cases}$$

Ta suy ra

$$\begin{cases} p \leq (q+1) \\ q \leq (p+1) \end{cases},$$

tức là $(p-1) \leq q \leq (p+1)$. Ta được $q = p-1$ hoặc $q = p$ hoặc $q = p+1$ mà p và q là các số nguyên tố nên ta suy ra $p = 3, q = 2$ hoặc $p = 2, q = 3$, thay vào phương trình (2.10) không thỏa.

Vậy bài toán vô nghiệm.

Bài toán ( 2.7) có thể giải quyết thật ngắn gọn khi chúng ta dùng đến giả thuyết abc mà trực tiếp là giả thuyết Tijdeman- Zagier, trong đó $x = p+q, y = q, z = p, (p,q) = 1$ và các số mũ đều lớn hơn hoặc bằng 3. Khi đó, phương trình (2.10) vô nghiệm.

Giả sử chúng ta thay đổi giả thiết của bài toán và nếu ta không áp dụng giả thuyết Tijdeman- Zagier liệu có giải được bài toán sau không?

**Bài toán 2.8**

Tìm các số nguyên, nguyên tố cùng nhau thỏa mãn hệ thức sau:

$$(p+q)^3 + q^4 = p^5. \qquad 2.11$$

Bằng cách lập luận tương tự như bài tập (2.7) ta suy ra các trường hợp $q = p - 1$ hoặc $q = p$ hoặc $q = p + 1$ mà p và q là các số nguyên tố cùng nhau nên chúng ta không thể thử hết các giá trị của các số p và q nguyên tố cùng nhau thỏa mãn hệ thức (2.7). Do đó ta không thể kết luận được bài toán. Tuy nhiên, khi áp dụng giả thuyết Tijdeman- Zagier thì bài toán (2.8) thỏa mãn các điều kiện của giả thuyết. Do đó bài toán vô nghiệm.
Bây giờ chúng ta xét bài toán tương tự như bài toán (1.9 ) cho số nguyên và cũng có cách giải tương tương tự.

**Bài toán 2.9**

Tìm tất cả các số nguyên a và b thỏa mãn phương trình

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3.$$

Bài toán 4.9 có thể giải theo hằng đẳng thức như sau:

$$\begin{gathered}(a+b)^3 = a^3 + b^3 \\ \Leftrightarrow 3a^2.b + 3a.b^2 = 0 \\ \Leftrightarrow 3a.b(a+b) = 0.\end{gathered}$$

Từ đó suy ra $a = 0$ hoặc $b = 0$ hoặc $a = -b$. Tuy nhiên, việc giải bài toán cho số mũ tổng quát $n \geq 3$ thì sẽ rất khó khăn khi dùng hằng đẳng thức. Trong trường hợp đó, chúng ta sẽ dùng giả thuyết abc mà hệ quả của nó là định lý cuối cùng của Fermat cho số nguyên để giải quyết bài toán. Bài toán (2.9) là một trường hợp của bài toán sau.

**Bài toán 2.10:**

Cho n là một số nguyên lớn hơn hoặc bằng 3. Tìm tất cả các số nguyên a và b thỏa mãn phương trình

$$(a+b)^n = a^n + b^n. \qquad 2.12$$

a) Xét trường hợp n là số lẻ.

Giả sử $(a, b) = 1$ thì $gcd(a, b, a+b) = 1$. Khi đó, áp dụng giả thuyết abc hoặc định lý Fermat cho số nguyên, ta suy ra được không tồn tại hai số nguyên a và b thỏa mãn phương trình $(a+b)^n = a^n + b^n$.

Ta thấy rằng, $a = -b$ hoặc ít nhất $a = 0$ hoặc $b = 0$ thỏa mãn phương trình (2.12) .

Trường hợp khác, khi $(a, b) = c$, hiển nhiên $c \neq 0, c \neq a$. Khi đó, tồn tại các số nguyên u, v sao cho $a = c.u, b = c.v$. Phương trình

$$(a+b)^n = a^n + b^n$$

$$\Leftrightarrow (u+v)^n = u^n + v^n. \tag{2.13}$$

Hiển nhiên $(u, v) = 1$ nên theo định lý Fermat cho số nguyên ta suy ra phương trình (2.13) vô nghiệm.

Như vậy, khi n là số lẻ thì phương trình (2.12) chỉ có nghiệm $a = -b$ hoặc ít nhất $a = 0$ và $b = 0$.

b) Xét trường hợp n là chẵn.

Giả sử $(a, b) = 1$ thì $gcd(a, b, a+b) = 1$. Khi đó, áp dụng giả thuyết abc hoặc định lý Fermat cho số nguyên, ta suy ra được không tồn tại hai số nguyên a và b thỏa mãn phương trình $(a+b)^n = a^n + b^n$.

Ta thấy rằng, ít nhất $a = 0$ và $b = 0$ thỏa mãn phương trình (2.12)

Trường hợp $(a, b) = c, c \neq 0$. Khi đó, tồn tại các số nguyên u, v sao cho $a = c.u, b = c.v$. Phương trình

$$(a+b)^n = a^n + b^n$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^n = a^n + b^n. \tag{2.14}$$

Hiển nhiên $(u, v) = 1$ nên theo định lý Fermat cho số nguyên phương trình (2.14) vô nghiệm.

Như vậy, khi n là số chẵn thì phương trình (2.12) chỉ có nghiệm khi ít nhất $a = 0$ hoặc $b = 0$.

Trong khi đó, nếu ta không dùng định lý Fermat cho số nguyên mà áp dụng khai triển nhị thức Newton thì chúng ta sẽ gặp được khó khăn và không kết luận được bài toán.

Thật vậy, $(a+b)^n = a^n + b^n$

$$\Leftrightarrow C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ..... + C_n^{n-1} a b^{n-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow ab(C_n^1 a^{n-2} + C_n^2 a^{n-3} b + .... + C_n^{n-1} b^{n-2}) = 0.$$

Sẽ rất khó để tìm a và b thỏa $C_n^1 a^{n-2} + C_n^2 a^{n-3} b + ..... + C_n^{n-1} b^{n-2} = 0$.
Chúng ta phát biểu tương tự cho số nguyên của bài toán (1.13),

**Bài toán 2.11**

Tồn tại hay không số nguyên a sao cho mọi ước nguyên tố của $a$ và $a+1$ đều có số mũ bội.

Giả sử tồn tại số nguyên a sao cho mọi ước nguyên tố của $a$ và $a+1$ đều có số mũ bội.

Do mũ bội của một số nguyên nhỏ nhất là bội 2 và mọi ước nguyên tố của $a$ đều là mũ bội nên $rad(a) \leq \sqrt{a}$.

Tương tự mọi ước nguyên tố của $a+1$ đều là có số mũ bội nên

$$rad(a+1) \leq \sqrt{a+1}.$$

Từ đó, ta suy ra

$$rad(a).rad(a+1) \leq \sqrt{a.(a+1)}.$$

Như vậy, ta có

$$[rad(a).rad(a+1)]^2 \leq a.(a+1). \qquad 2.15$$

Ta có sự phân tích $(a+1) - a = 1$, rõ ràng $(a, a+1) = 1$, vì nếu ngược lại thì tồn tại số nguyên b là ước chung lớn nhất của $a$ và $a+1$. Khi đó, $(a, a+1) = 1$, áp dụng giả thuyết abc cho các số nguyên $a, 1$ và $a+1$ ta có

$$\max\{a, a+1\} \leq C_\epsilon.[rada(a+1)]^{1+\epsilon}.$$

Do đó,

$$a.(a+1) \leq C_\epsilon.[rad(a(a+1))]^{2\epsilon}(\text{đúng}).$$

Như vậy, khác với bài toán [ 1.13, trang 20 ] cho đa thức không tồn tại nghiệm, đối với Bài toán (2.11) tồn tại số a, chẳng hạn $a = 8$, khi đó $8 = 2^3$ và $9 = 3^2$.

Chúng ta phát biểu tương tự cho số nguyên của bài toán (1.14).

**Bài toán 2.12:**

Tìm hai số nguyên $a$ và $b$ sao cho $rad(a) = rad(b)$ và $rad(a+1) = rad(b+1)$.

Ta dễ dàng chỉ được các số như sau: $a = 2, b = 8$ vì $rad2 = rad8 = 2$ và $rad3 = rad9 = 3$ hoặc $a = 75, b = 1215$.

# Chương 3
# Định lý MaSon mở rộng

Ta biết rằng định lý Mason phát biểu cho ba đa thức nguyên tố cùng nhau từng cặp, không đồng thời là hằng số. Vậy định lý Mason có thể áp dụng cho n hàm số $n \geq 3$ được hay không? Khi đó bất đẳng thức trong định lý Mason sẽ như thế nào? Ta đã biết đến một cách chứng minh khác của định lý này là dùng định thức của đại số tuyến tính. Trong những năm gần đây, bằng kỹ thuật Wronskian chúng ta có thể mở rộng cho hàm nhiều biến.

## 3.1. Bậc của một phân thức và tính chất

**3.1.1 Định nghĩa:** Bậc của một phân thức

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$$

với $f(x), g(x)$ là các đa thức thức hệ số phức nguyên tố cùng nhau, ký hiệu $deg\varphi$, được định nghĩa là $deg\varphi = degf - degg$.

Giả sử $\varphi(x)$ là một phân thức với mỗi $a \in C$, viết $\varphi(x)$ dưới dạng:

$$\varphi(x) = (x-a)^k \frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

trong đó $f_1(x)$ và $g_1(x)$ là các đa thức nguyên tố cùng nhau và không nhận a làm nghiệm .

Số k xác định như trên gọi là bậc của $\varphi$ tại a; ký hiệu $ord_a\varphi$. Từ định nghĩa 3.1.1 ta có:

**3.1.2 Mệnh đề** *Nếu $\varphi_1; \varphi_2$ là các phân thức $a \in C$ thì khi đó:*

*(i)* $ord_a(\varphi_1.\varphi_2) = ord_a\varphi_1 + ord_a\varphi_2$

*(ii)* $ord_a(\dfrac{1}{\varphi_1}) = -ord_a\varphi_1$

*(ii)* $ord_a(\dfrac{\varphi_1}{\varphi_2}) = ord_a\varphi_1 - ord_a\varphi_2.$

**3.1.3 Mệnh đề:** *Giả sử $\varphi$ là đa thức có hệ số phức, $a \in C$. Khi đó nếu $\varphi^{(k)} \leq 0$ thì:*

$$ord_a(\frac{\varphi^k}{\varphi}) \geq -k.$$

**Chứng minh:** Giả sử $\varphi(x) = (x-a)^m.\dfrac{f(x)}{g(x)}$ với $f(x), g(x)$ không có nghiệm chung và không nhận a làm nghiệm. Ta có:

$$\varphi(x)^{'} = (x-a)^{m-1}.\frac{((m.f(x) + (x-a).f(x)').g(x) - (x-a)f(x).g(x)^{'})}{(g(x))^2}.$$

Do $ord_a(g(x)) = 0$ và

$ord_a((m.f(x) + (x-a).f(x)').g(x) - (x-a)f(x).g(x)^{'}) \geq 0,$

nên $ord_a(\varphi(x)^{'}) \geq m-1$ Do đó:

$ord_a(\dfrac{\varphi^{'}}{\varphi}) = ord_a(\varphi^{'}) - ord_a(\varphi) \geq m-1-m = -1$, vì vậy:

$ord_a(\dfrac{\varphi^k}{\varphi}) = ord_a(\dfrac{\varphi^{'}}{\varphi}.\dfrac{\varphi^{''}}{\varphi^{'}}....\dfrac{\varphi^k}{\varphi^{k-1}})$

$$= ord_a(\frac{\varphi^{'}}{\varphi}).ord_a(\frac{\varphi^{''}}{\varphi^{'}})....ord_a(\frac{\varphi^k}{\varphi^{k-1}}) \geq -k.$$

**3.1.4 Mệnh đề:** *Giả sử $f, g$ là các phân thức, $a \in C$ khi đó*

$$ord_a(f+g) \geq min(ord_af, ord_ag).$$

**Chứng minh:** Giả sử

$$f(x) = (x-a)^{k_1}\frac{f_1(x)}{f_2(x)},$$

$$g(x) = (x-a)^{k_2}\frac{g_1(x)}{g_2(x)}.$$

Trong đó $f_1, f_2, g_1, g_2$ không nhận a làm nghiệm:

Đặt $k = min(k_1, k_2)$ ta có:

$$f(x)+g(x)=\frac{(x-a)^k[(x-a)^{k_1-k}.f_1(x).g_2(x)+(x-a)^{k_2-k}.f_2(x).g_1(x)]}{f_2(x).g_2(x)}.$$

Do $f_2, g_2$ không nhận a làm nghiệm nên:

$$ord_a(f+g)\geq k=min(ord_af, ord_ag).$$

**3.1.5 Định nghĩa:** Giả sử $f_1, f_2, ....f_n$ là các hàm phân thức:

a) Ta gọi Wronskian của chúng là:

$$w(f)=\| f_1....f_n \|=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1^{'} & f_2^{'} & \cdots & f_n^{'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{n-1} & f_2^{n-1} & \cdots & f_n^{n-1}. \end{vmatrix}$$

b) Giả sử rằng

$f_i \neq 0$ với mọi i, và $f_1+f_2+....f_n=0$.

Lấy đạo hàm $n-1$ lần, thu được một hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{vmatrix} f_1+f_2+.....+f_n=0 \\ (\frac{f_1^{'}}{f_1})f_1+....+.(\frac{f_n^{'}}{f_n})f_n=0 \\ ................................ \\ (\frac{f_1^{n-1}}{f_1})f_1+....+.(\frac{f_n^{n-1}}{f_n})f_n=0. \end{vmatrix}$$

c) Giả sử:

$$L(f_1....f_n)=\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (\frac{f_1^{'}}{f_1})f_1 & \cdots & (\frac{f_n^{'}}{f_n})f_n^{'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\frac{f_1^{n-1}}{f_1})f_1 & \cdots & (\frac{f_n^{n-1}}{f_n})f_n, \end{vmatrix}$$

$$L_i(f_1....f_n)=\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots 1 \\ (\frac{f_1^{'}}{f_1})f_1 & \cdots & 0 & \cdots (\frac{f_n^{'}}{f_n})f_n^{'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\frac{f_1^{n-1}}{f_1})f_1 & \cdots & 0 & \cdots (\frac{f_n^{n-1}}{f_n})f_n. \end{vmatrix}$$

Khi đó $L(f) = w(f)/(f_1...f_n)$ và tương tự đối với $L_i(f)$. Nếu $f_1 f_2 ... f_n$ độc lập tuyến tính thì $W(f) \neq 0$ và do đó $L(f) \neq 0$ ta có $f_i = L_i(f)/L(f)$.

## 3.2. Định lý Mason mở rộng

### 3.2.1 Định lý Mason mở rộng

*Giả sử $f_1 f_2 ... f_n$ là các đa thức trên trường đặc số 0, không có nghiệm chung, khồng đồng thời là các đa thức hằng. Giả sử rằng $gcd(f_i, f_j, f_k) = 1$ với các số khác nhau bất kỳ $i, j, k, \in \{1, 2, ....n\}$, $f_1 + f_2 + ....f_n = 0$ và $f_1 f_2 ... f_{n-1}$ độc lập tuyến tính. Khi đó:*

$$\max_{1 \le i \le n} (deg f_i) \le (n-2)[\sum_{i=1}^{n} n_0(f_i) - 1]. \qquad 3.1$$

**3.2.2. Chứng minh:** Giả sử $\{\alpha_1, ....\alpha_n\}$ là $n-1$ chỉ số phân biệt của tập hợp các chỉ số $\{1, 2, ...n\}$. Do $f_1 + f_2 + ....f_n = 0$,
nên $\| f_{\alpha_1}, ....f_{\alpha_{n-1}} \| = \delta \| f_1.....f_{n-1} \|$ . $\qquad (\delta = \pm 1)$
Trong đó $\| f_1, f_2, .....f_{n-1} \|$ là Wronskian của các hàm $f_1, f_2, .....f_{n-1}$

$$w(f) = \| f_1....f_{n-1} \| = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} \\ f_1^{'} & f_2^{'} & \cdots & f_{n-1}^{'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{n-2} & f_2^{n-2} & \cdots & f_{n-1}^{n-2}. \end{vmatrix}$$

Do $f_1, f_2, .....f_{n-1}$ độc lập tuyến tính nên $\| f_1, f_2, .....f_{n-1} \| \neq 0$
và do đó $\| f_{\alpha_1}, ....f_{\alpha_{n-1}} \| \neq 0$. Đặt

$$P(t) = \frac{\| f_1, f_2, .....f_{n-1} \|}{f_1, f_2, .....f_{n-1}},$$

$$Q(t) = \frac{f_1, f_2, .....f_n}{\| f_1, f_2, .....f_{n-1} \|}.$$

Suy ra $f_n(t) = P(t).Q(t)$, do đó $deg f_n = deg P + deg Q$.
Trước hết, ta chứng minh

$$deg Q \le (n-2)(\sum_{i=1}^{n} n_0(f_i)).$$

Thật vậy, giả sử $a$ là một nghiệm bất kỳ của $Q(t)$, suy ra $a$ là một nghiệm-của

$$\prod_{i=1}^{n} f_i.$$

Do $f_1, f_2, .....f_n$ nguyên tố cùng nhau nên tồn tại $i_0, 1 \leq i_0 \leq n$ sao cho $f_{i_0}(a) \neq 0$. Giả sử $\alpha_1, \alpha_2, ....\alpha_{n-1}$ là $n-1$ chỉ số còn lại. Từ (3.2.1) suy ra

$$Q(t) = \delta \frac{f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2} .... f_{\alpha_{n-1}}}{\parallel f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2} .... f_{\alpha_{n-1}} \parallel} f_{i_0}(t).$$

Đặt

$$R(t) = \frac{\parallel f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2} .... f_{\alpha_{n-1}} \parallel}{f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2} .... f_{\alpha_{n-1}}}.$$

Suy ra:

$$R(t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots 1 \\ \frac{f'_{\alpha_1}}{f_{\alpha_1}} & \frac{f'_{\alpha_2}}{f_{\alpha_2}} & \cdots \frac{f'_{\alpha_{n-1}}}{f_{\alpha_{n-1}}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{f^{n-2}_{\alpha_1}}{f_{\alpha_1}} & \frac{f^{n-2}_{\alpha_2}}{f_{\alpha_2}} & \cdots \frac{f^{n-2}_{\alpha_{n-1}}}{f_{\alpha n-1}}. \end{vmatrix}.$$

Định thức trên bằng tổng các số hạng có dạng: $\gamma \frac{f'_{i_1}.f''_{i_2}....f^{n-2}_{i_{n-1}}}{f_{i_1}.f_{i_2}....f_{i_{n-2}}}$.
Với $1 \leq i_1, i_2....i_n \leq n \qquad (\gamma = \pm 1)$.
Giả sử rằng số hạng $\gamma \frac{f'_{i_1}.f''_{i_2}....f^{n-2}_{i_{n-1}}}{f_{i_1}.f_{i_2}....f_{i_{n-2}}}$, chứa tất cả các $f_i$ mà $f_i(a) = 0$ theo mệnh đề 3.1.4 thì:

$$ord_a(\frac{f'_{i_1}.f''_{i_2}....f^{n-2}_{i_{n-2}}}{f_{i_1}.f_{i_2}....f_{i_{n-2}}}) = ord_a(\frac{f'_{i_1}}{f_{i_1}}) + .... + ord_a(\frac{f^{n-2}_{i_{n-2}}}{f_{i_{n-2}}}).$$

Áp dụng mệnh đề (3.1.6) suy ra:
$ord_a(\frac{f^k_{i_k}}{f_{i_k}}) \geq -k \geq -(n-2)$ với mọi $i_k$ mà $f_{i_k}(a) = 0$. Vì vậy:

$$ord_a(\frac{f'_{i_1}.f''_{i_2}....f^{n-2}_{i_{n-1}}}{f_{i_1}.f_{i_2}....f_{i_{n-2}}}) \geq (n-2)(\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ f_k(a)=0}} 1).$$

Áp dụng mệnh đề (3.1.6) suy ra:

$$ord_a R(t) \geq -(n-2)(\sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ f_k(a)=0}} 1).$$

Do đó,

$$ord_a Q(t) = -ord_a R(t) \leq (n-2)(\sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ f_k(a)=0}} 1).$$

Bất đẳng thức trên đúng với $a$ là nghiệm của $Q(t)$ theo định nghĩa bậc của phân thức ta có:

$$degQ(t) \leq (n-2)(\sum_{i=1}^{n} n_0(f_i)). \qquad 3.2$$

Bây giờ ta chứng minh $degP \leq -\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$. Thật vậy:

$$P(t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots 1 \\ \dfrac{f_1'}{f_1} & \dfrac{f_2'}{f_2} & \cdots \dfrac{f_{n-1}'}{f_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{f_1^{n-2}}{f_1} & \dfrac{f_2^{n-2}}{f_2} & \cdots \dfrac{f_{n-1}^{n-2}}{f_{n-1}}. \end{vmatrix}$$

Định thức trên bằng tổng các số hạng có dạng:

$$\gamma \frac{f_{\beta_1}'}{f_{\beta_1}} \frac{f_{\beta_2}''}{f_{\beta_2}} \cdots\cdots \frac{f_{\beta_{n-2}}^{n-2}}{f_{\beta_{n-2}}}, \qquad (\gamma = \pm 1).$$

Đối với mỗi số hạng thì

$$deg(\frac{f_{\beta_1}'}{f_{\beta_1}} \frac{f_{\beta_2}''}{f_{\beta_2}} \cdots\cdot \frac{f_{\beta_{n-2}}^{n-2}}{f_{\beta_{n-2}}}) = deg(\frac{f_{\beta_1}'}{f_{\beta_1}}) + deg(\frac{f_{\beta_2}''}{f_{\beta_2}}) \cdots\cdots + deg(\frac{f_{\beta_{n-2}}^{n-2}}{f_{\beta_{n-2}}})$$

$$= (-1) + (-2) + \ldots. + (-(n-2)) = -\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Áp dụng mệnh đề ( 3.1.4) suy ra:

$$degP(t) \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} \qquad 3.3$$

và từ (3.2) và (3.3) ta có:

$$deg f_n \leq (n-2)(\sum_{i=0}^{n} n_0(f_i)) - \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Hoàn toàn tương tự đối với $f_1, f_2, ....f_{n-1}$ ta có:

$$\max_{1\leq i\leq n}(deg f_i) \leq (n-2)(\sum_{i=0}^{n} n_0(f_i)) - \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Ta lại có $\frac{(n-2)(n-1)}{2} > n-2, \forall n \geq 3$ nên

$$\max_{1\leq i\leq n}(deg f_i) \leq (n-2)[\sum_{i=1}^{n} n_0(f_i) - 1].$$

Được điều phải chứng minh.

## 3.3. Áp dụng Mason mở rộng vào nghiên cứu các đa thức nhiều biến

### 3.3.1 Định lý cuối cùng của Fermat cho các đa thức nhiều biến.

*Phương trình*

$$f_1^m + f_2^m + .... + f_{n-1}^m = f_n^m. \quad 3.4$$

*vô nghiệm khi $m \geq (n-2)n$, trong đó các đa thức nhiều biến $f_1, f_2, ...f_n (n \geq 3)$ trên vành $C[x_1, x_2, ...x_l]$ nguyên tố cùng nhau từng cặp, không đồng thời là các đa thức khác hằng, đồng thời hệ $f_1^m, f_2^m, .... + f_n^m$ độc lập tuyến tính trên trường $C$.*

Thật vậy, giả sử phương trình (3.4) có nghiệm không tầm thường, áp dụng định lý Mason cho các hàm nhiều biến ta có

$$\max_{1\leq j\leq n} f_j^m \leq (n-2)[n_0(f_1^m.f_2^m....f_n^m) - 1].$$

Do đó,

$$deg f_j^m \leq (n-2)[n_0(f_1.f_2...f_n) - 1], \forall j = 1, 2, ...n.$$

Ta suy ra

$$degf_j \leq \frac{(n-2)}{m}[deg(f_1) + deg(f_2) + .... + deg(f_n) - 1],$$

$\forall j = 1, 2, ...n.$

Lấy tổng vế theo vế $n$ các bất đẳng thức trên ta được

$$\sum_{j=1}^{n} degf_j \leq \frac{(n-2)n}{m}[\sum_{j=1}^{n} degf_j - 1].$$

Chuyển vế ta được

$$(1 - \frac{(n-2)n}{m})\sum_{j=1}^{n} degf_j \leq -\frac{(n-2)n}{m} < 0.$$

Từ đó, ta suy ra $(1 - \frac{(n-2)n}{m}) < 0$ hay $m < (n-2)n$.

Trường hợp $l = 1, n = 3$ ta được định lý cuối cùng Fermat cho đa thức của ba hàm số một biến: phương trình vô nghiệm khi $n \geq 3$ [ xem Định lý 1.2.1]. Tường tự , chúng ta có định lý sau cho các số mũ khác nhau.

### 3.3.2 Định lý Fermat tổng quát cho các đa thức nhiều biến.

*Phương trình*

$$f_1^{m_1} + f_2^{m_2} + .... + f_{n-1}^{m_{n-1}} = f_n^{m_n}. \qquad 3.5$$

*vô nghiệm khi* $m_j \geq n(n-2), \forall j = 1, 2, ...n,$ *trong đó, các đa thức nhiều biến* $f_1, f_2, ...f_n.(n \geq 3)$ *trên vành* $C[x_1, x_2, ...x_l]$ *nguyên tố cùng nhau từng cặp, không đồng thời là các đa thức khác hằng, đồng thời hệ* $f_1^{m_1}, f_2^{m_2}, .... + f_n^{m_n}$ *độc lập tuyến tính trên trường* $C$.

Thật vậy, giả sử phương trình (3.5) không có nghiệm tầm thường, áp dụng định lý Mason cho các hàm nhiều biến ta có

$$\max_{1\leq j\leq n} f_j^{m_j} \leq (n-2)[n_0(f_1^{m_1}.f_2^{m_2}....f_n^{m_n}) - 1].$$

Do đó,

$$degf_j^{m_j} \leq (n-2)[n_0(f_1.f_2...f_n) - 1], \forall j = 1, 2, ...n.$$

Ta suy ra

$$m_j degf_j \leq (n-2)[deg(f_1) + deg(f_2) + .... + deg(f_n) - 1],$$

$\forall j = 1, 2, ...n.$

Lấy tổng vế theo vế $n$ các bất đẳng thức trên ta được

$$\sum_{j=1}^{n}[m_j - (n-2)n]deg(f_j) \leq -(n-2)n < 0.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $m_i \geq n(n-2), \forall j = 1, .2...n.$ Vậy phương trình (3.5) vô nghiệm.

Trường hợp $l = 1, n = 3$ ta được định lý Fermat tổng quát cho đa thức của ba hàm số một biến: phương trình vô nghiệm [ bài toán 1.2 ]

### 3.3.3 Phương trình Fermat- Catalan cho các đa thức nhiều biến

Cho các số nguyên dương $m_i (1 \leq j \leq n)$. Nếu

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + ..... + \frac{1}{m_n} \leq \frac{1}{n-2}$$

thì phương trình

$$f_1^{m_1} + f_2^{m_2} + .... + f_{n-1}^{m_{n-1}} = f_n^{m_n}, \qquad 3.6$$

vô nghiệm, trong đó, các đa thức nhiều biến $f_1, f_2, ...., f_n (n \geq 3)$ trên vành $C[x_1, x_2, ...x_l]$ nguyên tố cùng nhau từng cặp, không đồng thời là các đa thức hằng và giả sử rằng hệ $f_1^{m_1}, f_2^{m_2}, .... + f_n^{m_n}$ độc lập tuyến tính trên trường C.

Thật vậy, giả sử phương trình (3.6) có nghiệm không tầm thường, áp dụng định lý Mason cho các hàm nhiều biến ta có

$$\max_{1 \leq j \leq n} f_j^{m_j} \leq (n-2)[n_0(f_1^{m_1}.f_2^{m_2}....f_n^{m_n}) - 1].$$

Do đó,

$$degf_j^{m_j} \leq (n-2)[n_0(f_1.f_2...f_n) - 1], \forall j = 1, 2, ...n.$$

Ta suy ra

$$m_j deg f_j \leq (n-2)[deg(f_1) + deg(f_2) + .... + deg(f_n) - 1],$$

$\forall j = 1, 2, ...n.$

Tức là

$$deg(f_j) \leq \frac{1}{m_j}(n-2)[deg(f_1) + deg(f_2) + .... + deg(f_n)] - \frac{n-2}{m_j}.$$

Lấy tổng theo vế $n$ các bất đẳng thức trên ta được

$$\sum_{j=1}^{n} deg(f_i) \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{m_j}(n-2)[deg(f_1)+deg(f_2)+....+deg(f_n)]-(n-2)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{m_j}.$$

Do đó

$$\sum_{j=1}^{n} deg(f_j)(1-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{m_j}(n-2)) \leq -(2n-1)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{m_j} < 0.$$

Ta suy ra

$$1-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{m_j}(n-2) < 0,$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{m_j}(n-2) > 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{m_j} > \frac{1}{n-2}.$$

Như vậy phương trình (3.6) có nghiệm khi

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{m_j} > \frac{1}{n-2}.$$

Do đó khi

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{m_j} \leq \frac{1}{n-2}$$

thì phương trình (3.6) vô nghiệm.

Trường hợp $l=1, n=3$ ta được phương trình Fermat- Catalan cho đa thức của ba hàm số một biến

$$f_1^{m_1}+f_2^{m_2}=f_3^{m_3},$$

vô nghiệm khi $\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}+\dfrac{1}{m_3} \leq 1$ [bài tập 1.3]

# Kết luận

Luận văn trình bày sự tương tụ giữa số nguyên và đa thức, cụ thể là sự tương tự của giả thuyết abc và định lý Mason và một số hệ quả của chúng. Từ đó luận văn giới thiệu một số bài toán sơ cấp là tương tự của đa thức sang số nguyên, một số kết quả mở rộng của định lý Mason. Các kết quả này đã được viết ở dạng các bài báo cáo của nhiều tác giả. Do đó trong quá trình thực hiện luận văn này, chúng tôi chủ yếu thực hiện việc đọc hiểu và trình bầy lại các kết quả đã có một cách chi tiết và hệ thống, đồng thời bổ xung thêm một số bài tập cho phong phú hơn.

Luận văn đã đạt được các kết quả sau.

- Trình bầy hệ thống và chứng minh chi tiết định lý Mason và các hệ quả của nó. Ứng dụng lý thuyết đó đề xuất một số bài tập về tồn tại đa thức, các bài toán về nghiệm trong $C[t]$.

- Trình bày hệ thống và chứng minh chi tiết các tương tự số học của định lý Mason và các hệ quả của nó. Giải chi tiết các bài tập tương tự số học của các bài toán về đa thức ở trên.

- Trình bày mở rộng của định lý Mason cho nhiều hàm số một biến, hoặc hàm số nhiều biến, và các hệ quả của nó.

# Tài liệu tham khảo


[1] Hà Huy Khoái - Phạm Huy Điển - *Số học thuật toán* - Nxb Khoa học , Hà Nội, năm 1996.

[2] Nguyễn Văn Mậu - *Một số vấn đề toán học chọn lọc*, NXB Giáo dục, tháng 10, 2008.

[3] Nguyễn Thành Quang - *Luận án tiến sĩ toán học* - Trường Đại học sư phạm vinh 1998.

[4] Andrew Granville anh Thomas J. Tucker, *It's As Easy As abc*, Vol. 49 Number 10, Notices of the AMS, November 2002.

[5] Alin Bostan and Philippe Dumas, *Bodu09 wronskians and Linear independence, Algorithms Project*, Inria Rocquencourt, France.

[6] Frits Beukers, *The genneralzed Fermat equatino*, January 20, 2006.

[7] Henri Cohen, *Number Theory, Vol. 2, Analytic and mondern tool*, Springer, 2007.

[8] Mason, *Equations over function fields*, Oxford Unierssity Press, 1990.